

A técnica da resolução das equações Relativas à Interpolação da Lei de Mitscherlich pelo Método dos Quadrados Mínimos

IZAIAS RANGEL NOGUEIRA
Assistente substituto da 16a. cadeira da E. S. A.
"Luiz de Queiroz"

Conforme mostraram *Pimentel Gomes e Malavolta*, a interpolação da equação de Mitscherlich

$$y = A \left[1 - 10^{-c(x+b)} \right]$$

pelo método dos quadros mínimos conduz á equação em c :

$$(I) \begin{vmatrix} \Sigma y_i & n & \Sigma 10^{-cx_i} \\ \Sigma x_i y_i 10^{-cx_i} & \Sigma x_i 10^{-cx_i} & \Sigma 10^{-2cx_i} x_i \\ \Sigma y_i 10^{-cx_i} & \Sigma 10^{-cx_i} & \Sigma 10^{-2cx_i} \end{vmatrix} = 0$$

cuja resolução se consegue mais fácilmente tomando :

$x_i = q.m_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), sendo m_i um número inteiro, e fazendo :

$$Z = 10^{-cq} \text{ obtem-se assim a equação algébrica em } Z$$

$$(II) \begin{vmatrix} \Sigma y_i & n & \Sigma Z^{m_i} \\ \Sigma x_i y_i Z^{m_i} & \Sigma x_i Z^{m_i} & \Sigma Z^{2m_i} x_i \\ \Sigma y_i Z^{m_i} & \Sigma Z^{m_i} & \Sigma Z^{2m_i} \end{vmatrix} = 0$$

cujo desenvolvimento pode ser feito por qualquer dos métodos conhecidos.

Achamos preferível, porém, desenvolver o determinante segundo os elementos da primeira coluna, e isso pelos motivos seguintes :

1) Com excessão desta 1a. coluna todos demais elementos do determinante não contém valores de y .

Isto significa que se as mesmas doses de fertilisantes foram usadas para diversas experiências, aquêles elementos têm o mesmo valor para tôdas elas, de sorte que os complementos algébricos dos elementos da 1a. coluna são sempre os mesmos.

2) Observando o que acontece ao determinante quando $Z = 1$, temos :

$$(III) \Delta (1) = \begin{vmatrix} \Sigma y_i & n & n \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i & \Sigma x_i \\ \Sigma y_i & n & n \end{vmatrix}$$

concluimos que os menores correspondentes à 1a. coluna são nulos (pois tem cada um dêles 2 colunas iguais).

Se êles são nulos, os polinômios dêles oriundos, por desenvolvimento, se anulam para $Z = 1$, isto é, a soma de seus coeficientes deve ser nula. Dai se conclui que são divisíveis por $(Z - 1)$.

Esta propriedade nos auxilia muito no desenvolvimento, pois que nos permite tirar a prova dos nossos cálculos, simplesmente somando os coeficientes de Z em cada polinômio.

Estes devem, como vimos acima, ter soma nula.

O 1o. desenvolvimento, segundo a 1a. coluna, conduz então à equação :

$$P_1(Z) \sum y_i + P_2(Z) \sum x_i y_i Z^{m_i} + P_3(Z) \sum y_i Z^{m_i} = 0$$

* onde $P_1(Z)$, $P_2(Z)$ e $P_3(Z)$ são nulos para $Z = 1$

Efetuada agora êsses produtos, chegamos ao polinômio $P(Z)$ de grau geralmente elevado.

Este também para Z igual a 1, deve dar uma soma de coeficiente nula, pois (I) deve anular-se para êsse valor de Z .

Mas uma vez portanto, podemos tirar a prova dos nossos cálculos.

Vamos a seguir determinar o valor da raiz Z da equação (I), que como se sabe (Pimentel Gomes e Malavolta, 1949, pg. 15), deve estar compreendida entre 0 e 1.

A localização da raiz de uma equação de grau elevado é feita por tentativa, localizando-se primeiramente o intervalo onde ela se encontra.

No nosso caso, como acima referimos, ela já está localizada. Procuraremos então no intervalo citado, o valor mais aproximado da raiz, seguindo para tal o processo de Briot-Ruffini (um exemplo numérico esclareceria bem a marcha a seguir).

Uma vez localizada a raiz, calculamos os outros parâmetros da equação de Mitscherlich, pelo processo já referido por Pimentel Gomes e Malavolta.

Como um exemplo, apresentamos um trabalho por nós pesquisados, em dados de calagem de trigo, realizado em Ponta Grossa, em 1947.

As doses de cal utilizadas foram de 2, 4, 6 e 8 toneladas por Ha, e as médias dos valores obtidos, 2378, 2658, 2724 e 2798 Kg/Ha, sendo que a testemunha deu 2.040 Kg.

Se tomarmos como unidade, para facilitar o cálculo, 2 toneladas/Ha, as doses de cal serão 0, 1, 2, 3 e 4.

Em resumo teremos

(*) Evidentemente os polinômios $P_1(Z)$, $P_2(Z)$ e $P_3(Z)$ podem ser tabulados, trazendo êste fato grande vantagem para o cálculo de Z

Doses	Valores obtidos
0	2040
1	2378
2	2658
3	2724
4	2798

Soma total: 12.598

Utilizando a equação (II) e desenvolvendo o determinante segundo os elementos da 1a. coluna obtemos:

$$12.5988 \frac{(1 + Z + 3Z^2 + 3Z^3 + Z^4 - Z^6 - 3Z^7 - 3Z^8 - Z^9 - Z^{10}) - (2378 + 5316Z + 8172Z^2 + 11.192Z^3)}{(4 - 2Z + 2Z^2 - 4Z^3 - 4Z^5 + 2Z^6 - 2Z^7 + 4Z^8) + (2040 + 2378Z + 2658Z^2 + 2724Z^3 + 2798Z^4)} (-1 + 2Z - 6Z^2 - 10Z^4 + 6Z^5 - 7Z^6 + 16Z^7) = 0$$

Os termos grifados dão, conforme podemos verificar, um valor nulo para $Z = 1$.

Efetuando os produtos acima obtemos a equação final:
 $1096Z^{10} + 346Z^9 - 444Z^8 - 6280Z^7 + 5298Z^6 - 2472Z^5 + 6204Z^4 - 3426Z^3 + 840Z^2 - 2208Z + 1046 = 0$

Esta equação também tem valor nulo para $Z = 1$.

Efetuando a pesquisa da raiz pelo método de Briot-Ruffini, encontramos $Z = 0,5614$

Utilizando as fórmulas: $10 = Z, A = \frac{-2c}{\begin{vmatrix} \Sigma y_i & \Sigma Z^{m_i} \\ \Sigma x_i y_i Z^{m_i} & \Sigma x_i Z^{2m_i} \end{vmatrix}}$

$$e \quad b = \frac{1}{c} \log \left| \frac{A \cdot \Sigma Z^{m_i}}{nA - \Sigma y_i} \right|$$

(Fórmulas estas indicadas no trabalho de Pimentel Gomes e Malavolta, pg 7), encontramos:

$$c = 0,12536 \quad A = 2.887,3 \quad e \quad b = 4,22$$

Substituindo êsses valores na equação $y = A \left[1 - 10^{-c(x+b)} \right]$

temos

$$y = 2.887,3 \left[1 - 10^{-0,12536 (x + 4,22)} \right]$$

Substituindo os valores de x (doses de fertilisantes), nesta equação, encontramos os seguintes valores:

Em resumo:

Valores Observados	Valores esperados
2040	2.033,3
2378	2.407,8
2658	2.618,1
2724	2.736,2
2798	2.802,5
<hr/>	<hr/>
Somas totais 12.598	12.597,9

BIBLIOGRAFIA CITADA

PIMENTEL Gomes Frederico e Euripedes MALAVOLTA —
 Considerações Matemáticas sôbre a Lei de Mitscherlich.
 Piracicaba 1949.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities.

2. It then outlines the various methods used to collect and analyze data, including surveys, interviews, and focus groups.

3. The next section describes the results of the data collection process, highlighting key findings and trends.

4. Finally, the document concludes with a summary of the overall findings and recommendations for future research.

5. The following table provides a detailed breakdown of the data collected during the study.

6. This table shows the distribution of responses across different categories, allowing for a more granular analysis of the data.

7. The data indicates that a significant portion of respondents reported a positive impact on their well-being.

8. However, there were also some concerns raised, particularly regarding the lack of resources and support.

9. These findings suggest that while there is potential for positive outcomes, further support and resources are needed.

10. The following table provides a summary of the key findings and recommendations.

11. This table highlights the most important results and offers practical suggestions for addressing the identified issues.

12. The findings of this study have important implications for the development of effective interventions.

13. By understanding the needs and challenges of the target population, we can better tailor our programs to meet their needs.

14. This research provides a valuable foundation for future work in this area.

15. The following table provides a list of references used in this document.