

# PROPOSTA DE INTERSECÇÃO DE LINHAS GEODÉSICAS SOBRE A SUPERFÍCIE ESFÉRICA E SOBRE O ELIPSÓIDE DE REVOLUÇÃO

*Motion for intersection geodesic lines on spherical surface and on the revolution  
ellipsoid*

MARCOS AURÉLIO BASSO<sup>1</sup>  
LUIZ FERNANDO MACEDO MORESCKI JUNIOR<sup>1</sup>  
ALYNE RAMINELLI SIGUEL<sup>2</sup>  
CARLOS AURÉLIO NADAL<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Paraná  
Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
Centro Politécnico – Curitiba – PR - Brasil

<sup>2</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Curitiba – PR - Brasil

marcosbasso@ufpr.br; morescki@ufpr.br; alynesiguel@utfpr.edu.br;  
cnadal@ufpr.br.

## RESUMO

A Lei 8.617 de 1993 define a Zona Econômica Exclusiva como uma faixa de até duzentas milhas náuticas ao longo do mar territorial, na qual os recursos existentes podem ser explorados, rendendo royalties aos estados que confrontam com essas áreas. A demarcação das águas territoriais será efetivada através da intersecção entre duas linhas geodésicas. Neste trabalho, propõe-se uma solução para o problema da intersecção de linhas geodésicas nas superfícies esférica e elipsoidal. Inicialmente, fundamentaram-se os cálculos na trigonometria esférica, fornecendo resultados preliminares, que servem como uma primeira aproximação. Na sequência, propôs-se um método computacional recursivo, baseado nas formulações de Vincenty, onde são realizadas discretizações de azimutes de pequenos segmentos de arco, servindo como aproximação à intersecção por meio da obtenção do lugar geométrico do ponto oriundo da intersecção dos últimos segmentos obtidos.

**Palavras-chave:** Linha Geodésica; Trigonometria Esférica; Formulação de Vincenty.

### ABSTRACT

According to the Brazilian law number 8,617 of 1993, the Exclusive Economic Zone is defined as a range of up to two hundred nautical miles along the territorial sea in which existing resources can be exploited, yielding royalties to states confronting with these areas. In some cases, to comply what is provided by the applicable law, the demarcation of territorial waters may be established through the intersection of two geodesic lines. The goal of this study proposes a solution to the intersection problem of geodesic lines in the spherical and ellipsoidal surfaces. At first, the calculations were based on spherical trigonometry, providing preliminary results which work as a first approximation. Next, a recursive computation method based on Vincenty's formulation is proposed, which are performed in azimuth discretization of small arc segments, serving as an approach to the intersection by the geometric local of the encounter between the last segments obtained.

**Keywords:** Geodesic Line; Spherical Trigonometry; Vincenty's Formulation.

## 1. INTRODUÇÃO

A definição das divisas entre estados e países constitui um problema atual e de grande relevância para a sociedade. A intersecção entre linhas geodésicas é objeto de estudos de vários geodestas, como Baeschlin (1948) e Kneissl (1958), além de trabalhos mais recentes de Heitz (1988), Sjöberg (2002) e Grafarend (2006), que se baseou no método Newton-Raphson para o cálculo da intersecção.

A Lei federal nº 8.617 de 1993 preconiza a determinação da intersecção entre linhas geodésicas perpendiculares a costa, para definir as divisas territoriais entre estados. O uso econômico mais relevante deste problema diz respeito à distribuição de direitos referentes à extração do petróleo em Zonas Econômicas Exclusivas (ZEE). No entanto, a distribuição de royalties para os estados é afetada diretamente por este fato. Há também a possibilidade de exploração de recursos energéticos na região do pré-sal, que acaba por promover novamente uma discussão sobre como executar a divisão e a demarcação das águas territoriais.

Para efeitos de indenização sobre os recursos extraídos da Plataforma Continental, consideram-se confrontantes com poços produtores os estados, territórios e municípios contíguos à área marítima delimitada pelas linhas de projeção dos respectivos limites territoriais até a linha de limite da Plataforma Continental, onde estiverem situados os poços de exploração (Lei nº 7.525/1986).

Visto tal importância econômica, fica atribuído ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), de acordo com o artigo nono da Lei nº 7.525 de 22 de julho de 1986 – traçar as linhas de projeção dos limites territoriais dos estados, territórios e municípios confrontantes, segundo a linha geodésica ortogonal à costa

ou segundo o paralelo até o ponto de sua intersecção com os limites da Plataforma Continental.

Os critérios para a definição dos limites são:

I - linha geodésica ortogonal à costa para indicação dos estados onde se localizam os municípios confrontantes; e

II - sequência da projeção além da linha geodésica ortogonal à costa, segundo o paralelo para a definição dos municípios confrontantes no território de cada estado.

Segundo a Lei do Mar, Lei nº 8.617, uma Lei federal de 4 de janeiro de 1993, a Plataforma Continental se estende além do Mar Territorial até o bordo exterior da margem continental, ou, até duzentas milhas a contar das linhas de base.

Esta Lei define também, a Zona Econômica Exclusiva brasileira, que compreende uma faixa que se estende das doze às duzentas milhas marítimas, contadas desde as linhas de base que servem para medir a largura do Mar Territorial. Em algumas situações, a Plataforma Continental ultrapassa essa distância, estendendo a propriedade econômica do estado até trezentos e cinquenta milhas marítimas. No entanto, neste artigo, considera-se apenas a distância de duzentas milhas náuticas nos cálculos efetuados. Os pontos apropriados para o traçado das linhas de base retas ao longo da costa brasileira são dispostos no Decreto 4.983, de 10 de fevereiro de 2004.

Em alguns casos, para o cumprimento daquilo que se encontra disposto na legislação vigente, a demarcação das águas territoriais será estabelecida com base na intersecção entre duas linhas geodésicas. Portanto, este trabalho propõe uma solução onde, conhecidos dois pontos na superfície física da terra, denominados de  $A$  e  $B$ , deseja-se conhecer o ponto de intersecção  $P$ , que satisfaçam a condição de comprimento de 200 milhas náuticas (200') das linhas geodésicas que partem do ponto  $A$  até o  $P$ , e do ponto  $B$  até o ponto  $P$ . Para isso, deverão ser determinados os dois azimutes  $AAP$  e  $ABP$  que satisfaçam esta condição.

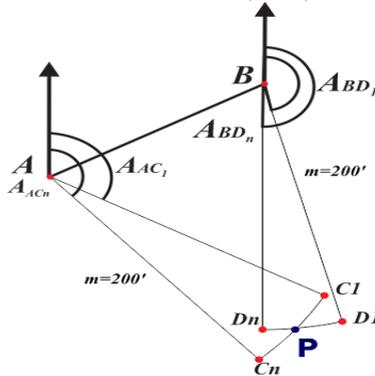
Este trabalho propõe, portanto, o desenvolvimento de um algoritmo recursivo, que discretiza em pequenos seguimentos de arcos os azimutes. Baseando-se nas fórmulas diretas de Vincenty, são determinadas diferentes coordenadas para os pontos geodésicos auxiliares denominados de  $C$  e  $D$ , com o comprimento da geodésica fixada em 200 milhas náuticas. A cada novo valor de azimutes, novos valores de coordenadas dos pontos  $C$  e  $D$  são definidos. O programa só será encerrado quando as coordenadas dos pontos  $C$  e  $D$  forem similares. Para reduzir os espaço de busca foi calculado primeiramente os azimutes sobre a superfície esférica.

A metodologia proposta foi testada na costa paranaense, utilizando dois pontos que fazem limites como estado de Santa Catarina e com o estado de São Paulo e foram realizados experimentos com diferentes resoluções de discretização.

## 2. INTERSECÇÃO ENTRE DUAS GEODÉSICAS

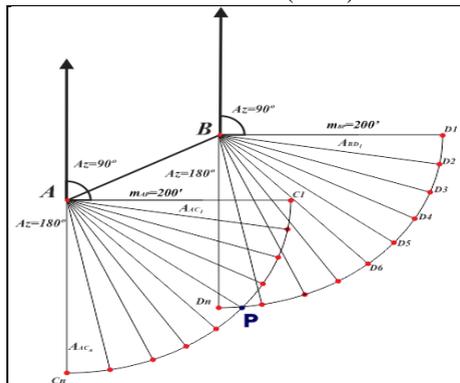
A Figura 1 mostra os seguintes elementos, os pontos  $A$  e  $B$ , com suas coordenadas geodésicas conhecidas sobre a superfície física da Terra, e as distâncias  $m_{AP}$  e  $m_{BP}$  que estão fixadas em 200'. Deseja-se, portanto, determinar em qual lugar geométrico ocorre a intersecção entre as duas geodésicas ( $P$ ), para isso deve-se computar os dois azimutes  $A_{AP}$  e  $A_{BP}$ .

Figura 1 - Intersecção entre duas geodésicas .  
 Fonte: O Autor (2014).



A proposta, portanto, para o cálculo dos azimutes, é discretizá-los em pequenos seguimentos de arco, para isso, é utilizado dois pontos geodésicos auxiliares  $C$  e  $D$ . Para cada novo valor de azimutes novos valores para as coordenadas dos pontos auxiliares são estabelecidos e a hipótese de ponto  $P$  é definida quando as coordenadas dos pontos  $C$  e  $D$  são similares, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Determinação do lugar geométrico do ponto  $P$ .  
 Fonte: O Autor (2014).



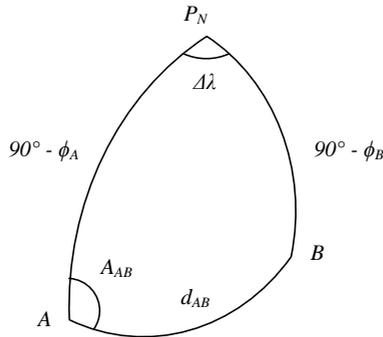
Na Figura 2, observa-se a discretização dos azimutes ente  $90^\circ$  e  $180^\circ$ , até encontrar os azimutes que satisfaçam a condição de  $200'$  para ambas as geodésicas.

Conforme um menor incremento na discretização dos azimutes, uma melhor aproximação é definida para o cálculo da intersecção do ponto  $P$ , mas isso eleva o tempo de processamento e prejudica a performance do algoritmo, caso a discretização seja de 1 segundo ( $1''$ ) do azimute. Para otimizar este processamento, foi realizado o cálculo da intersecção na superfície esférica entre arcos de circunferência máxima, definindo assim, os azimutes  $A_{AP}$  e  $A_{BP}$  como uma primeira aproximação, e posteriormente o refinamento destes valores na superfície do elipsóide. Na próxima seção, mostra-se o cálculo da intersecção do ponto  $P$  na superfície esférica.

## 2.1 Intersecção Entre Arcos de Circunferência Máxima

São definidos, na Figura 3, os lados e ângulos do triângulo esférico, denominado de triângulo de posição,  $AP_NB$ , que tem como vértices o Pólo Norte geográfico e dois pontos da esfera (A e B).

Figura 3 – Triângulo de posição  $AP_NB$ .  
Fonte: O Autor (2014).



Por convenção, são adotadas latitudes ( $\phi$ ) positivas no hemisfério norte e longitudes positivas ( $\lambda$ ) a leste do meridiano de *Greenwich*. A diferença entre longitudes é obtida pela Equação 1.

$$\Delta\lambda = \lambda_A - \lambda_B \quad (1)$$

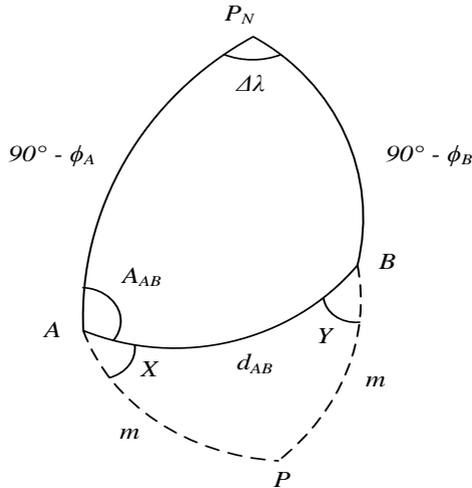
Com a aplicação da Lei dos Cossenos para os lados do triângulo de posição, Gemael (1981), determinam-se os valores do lado  $d_{AB}$  e do azimute da direção de A para B, ângulo  $A_{AB}$ , como mostram as Equações 2 e 3, respectivamente.

$$\cos d_{AB} = \cos(90^\circ - \varphi_A) \cos(90^\circ - \varphi_B) + \sin(90^\circ - \varphi_A) \sin(90^\circ - \varphi_B) \cos \Delta\lambda \quad (2)$$

$$\cos A_{AB} = \frac{\cos(90^\circ - \varphi_B) - \cos(90^\circ - \varphi_A) \cos d_{AB}}{\sin(90^\circ - \varphi_A) \sin d_{AB}} \quad (3)$$

A Figura 4 mostra o ponto  $P$ , oriundo da intersecção entre dois arcos de circunferência máxima que partem dos pontos  $A$  e  $B$ . Neste caso, adotar-se-ão os comprimentos  $AP$  e  $BP$  de 200 milhas náuticas, representados por  $m$ .

Figura 4 – Triângulo de posição  $AP_N B$  e triângulo esférico  $APB$ .  
 Fonte: O Autor (2014).



Aplicando-se a Lei dos Cossenos para os lados do triângulo esférico  $APB$ , calcula-se o ângulo  $X$ , congruente ao ângulo  $Y$ , utilizando-se a Equação 4.

$$\cos X = \frac{\cos m(1 - \cos d_{AB})}{\sin m \sin d_{AB}} \quad (4)$$

Com a Equação 5, calcula-se o azimute de  $A$  para  $P$ :

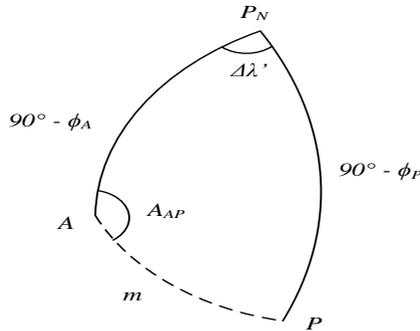
$$A_{AP} = X + A_{AB} \quad (5)$$

Aplicando-se a Lei dos Cossenos aos lados do triângulo esférico  $AP_N P$ , Figura 5, obtém-se a latitude  $\varphi_P$  do ponto de intersecção  $P$ , Equação 6.

$$\cos(90^\circ - \varphi_P) = \cos(90^\circ - \varphi_A) \cos m + \sin(90^\circ - \varphi_A) \sin m \cos A_{AP} \quad (6)$$

Figura 5 – Triângulo de posição  $AP_NP$ .

Fonte: O Autor (2014).



Considerando ainda o triângulo esférico  $AP_NP$  e utilizando novamente a Lei dos Cossenos, determina-se o valor de  $\Delta\lambda'$ , conforme a Equação 7.

$$\cos \Delta\lambda' = \frac{\cos m - \cos(90^\circ - \varphi_A) \cos(90^\circ - \varphi_P)}{\sin(90^\circ - \varphi_A) \sin(90^\circ - \varphi_P)} \quad (7)$$

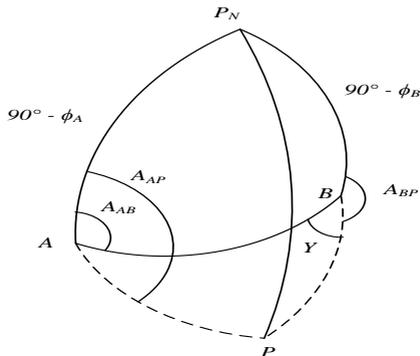
O valor da longitude do ponto de intersecção,  $\lambda_P$ , pode ser calculado pela Equação 8.

$$\Delta\lambda' = \lambda_A - \lambda_P \quad (8)$$

Para o cálculo dos azimutes de direções que serão utilizados como primeiras aproximações para a discretização computacional, utilizam-se fórmulas da trigonometria esférica. A Figura 6, ilustra os triângulos  $AP_NP$ ,  $PP_NB$  e  $APB$  e os azimutes das direções a serem utilizadas.

Figura 6 – Triângulos esféricos  $AP_NP$ ,  $PP_NB$  e  $APB$ .

Fonte: O Autor (2014).



O cálculo do azimute da direção do ponto  $B$  para o ponto  $P$  pode ser feito aplicando-se a Lei dos Senos ao triângulo  $AP_N B$  para o cálculo do ângulo  $B$ . Em seguida, determina-se o azimute  $A_{BP}$  como sendo o replemento da soma do ângulo  $B$  com o ângulo  $Y$ .

## 2.2 Transporte de Coordenadas na Superfície do Elipsóide

O transporte de coordenadas é um procedimento básico em Geodésia para a determinação da posição de pontos na superfície do elipsóide. Divide-se em dois problemas básicos, o problema direto, onde dada a coordenada de um ponto  $(\varphi_1, \lambda_1)$ , uma distância ( $m$ ) e um azimute recíproco ( $A$ ), determinam-se as coordenadas de outro ponto  $(\varphi_2, \lambda_2)$ . E o problema inverso ou indireto, onde dado as coordenadas de dois pontos  $(\varphi_1, \lambda_1)$  e  $(\varphi_2, \lambda_2)$  determinam-se a sua distância ( $m_{12}$ ), como também o seu azimute ( $A_{12}$ ).

Os denominados problemas direto e inverso da Geodésia foram solucionados historicamente por vários geodestas que desenvolveram fórmulas para a sua solução. Estas formulações podem ser algébricas com soluções imediatas (SODANO,1965), ou iterativas, resolvidas por meio de recursos computacionais (KIVIOJA,1971), (VINCENTY,1975) e (SAITO,1979). Para este experimento foram implementadas as consagradas fórmulas de Vincenty.

A formulação dos problemas direto e inverso de Vincenty pode ser encontrado em toda sua plenitude em Vincenty (1975). Suas fórmulas foram testadas e verificadas com erros menores de 0,115 mm, considerando a distância de 18000 km em todos os casos testados (THOMAS & FEATHERSTONE, 2005).

Em trabalho de GALO et al. (2003), foram empregadas as fórmulas de Vincenty para a discretização da geodésica, em diferentes resoluções, no cálculo de áreas de polígonos sobre o elipsóide utilizando projeções equivalentes. Neste caso, quanto menor o incremento da discretização da geodésica, mais próximo do valor verdadeiro da área era atingido.

## 3. METODOLOGIA

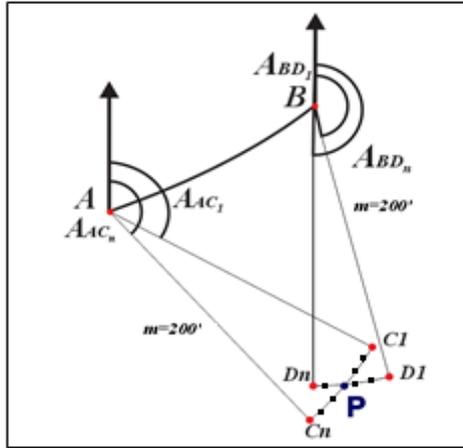
Nesta seção, é discutida a metodologia empregada para determinar o ponto de interseção entre dois pontos sob o elipsóide. Conforme mencionado anteriormente, a metodologia consiste em, inicialmente, determinar o ponto de interseção  $P$  com relação à superfície esférica, e utilizar os azimutes  $A_{AP}$  e  $A_{BP}$  determinados como a primeira aproximação na superfície do elipsóide.

### 3.1 Restringindo o Espaço de Busca

Na Figura 7, apresenta-se o espaço de busca reduzido através dos azimutes identificados na superfície da esfera. É possível observar também os elementos  $A_{AC_1}$  e  $A_{AC_n}$ , além de  $A_{BD_1}$  e  $A_{BD_n}$ .

Figura 7 – Restringindo o espaço de busca.

Fonte: O Autor (2014).



A determinação de tais elementos é realizada em função dos azimutes  $A_{AP}$  e  $A_{BP}$  na superfície da esfera, e sua determinação se faz da seguinte forma:

- seguimento de  $A$  para  $P$ :

$$A_{AC_1} = \text{Trunc}(A_{AP}) - 1^\circ \quad (9)$$

$$A_{AC_n} = \text{Trunc}(A_{AP}) + 1^\circ \quad (10)$$

- seguimento de  $B$  para  $P$ :

$$A_{BD_1} = \text{Trunc}(A_{BP}) - 1^\circ \quad (11)$$

$$A_{BD_n} = \text{Trunc}(A_{BP}) + 1^\circ \quad (12)$$

Portanto, estes elementos irão controlar o espaço de busca da intersecção, aplicando as fórmulas diretas de Vincenty através de um incremento angular denominado como *passo*, discretizando o valor de  $A_{AC_1}$  até  $A_{AC_n}$  e de  $A_{BD_1}$  até  $A_{BD_n}$ . Em cada discretização de  $A_{AC_1}$  até  $A_{AC_n}$  têm-se, portanto, novos valores de coordenadas do ponto  $C = \{(\varphi_{C_1}, \lambda_{C_1}); (\varphi_{C_2}, \lambda_{C_2}); (\varphi_{C_i}, \lambda_{C_i}); \dots; (\varphi_{C_n}, \lambda_{C_n})\}$  com  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Discretizando de  $A_{BD_1}$  até  $A_{BD_n}$  obtém-se um conjunto de valores de coordenadas  $D = \{(\varphi_{D_1}, \lambda_{D_1}); (\varphi_{D_2}, \lambda_{D_2}); (\varphi_{D_i}, \lambda_{D_i}); \dots; (\varphi_{D_n}, \lambda_{D_n})\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

Através deste conjunto de pontos  $C$  e  $D$  será feita uma busca para verificar quais pares de seguimento de geodésica se cruzam ou se tocam. Com base nestes

dois seguimentos é possível localizar um ponto de latitude e longitude em comum no conjunto de pontos  $C$  e  $D$ , e desta forma, encontra-se uma hipótese de ponto  $P$ .

### 3.2 Definindo a Hipótese de Intersecção

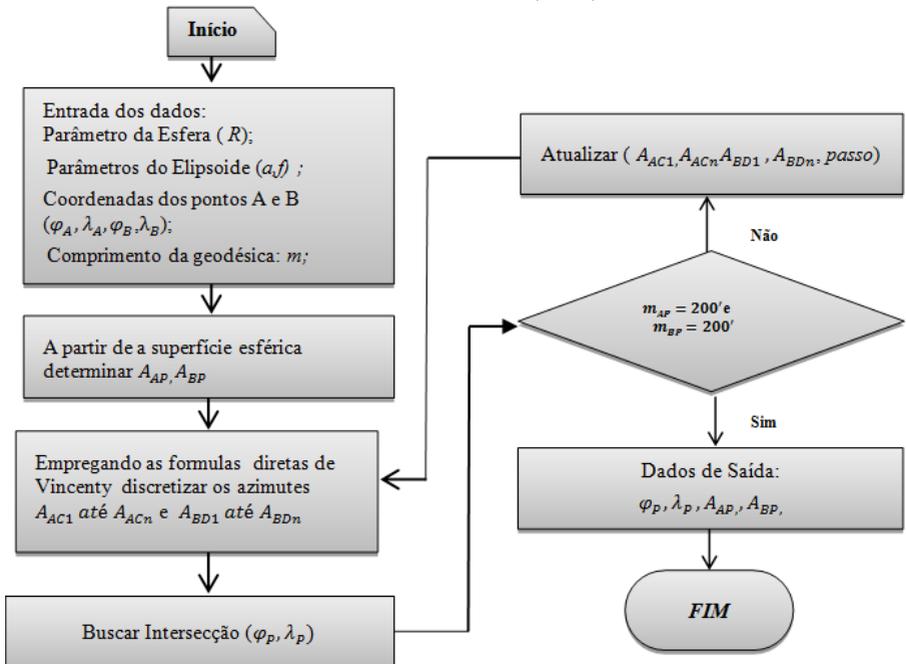
Para definir a hipótese de intersecção  $P$  é realizado um teste para verificar as distâncias de  $A$  para  $P$  e de  $B$  até  $P$  através das fórmulas inversas de Vincenty. Caso estas distâncias não estejam em conformidade, ou seja, que suas geodésicas não sejam de 200 milhas náuticas dentro de uma margem de erro igual a 0,010 m é realizado um novo processamento.

Neste novo processamento, os quatro pontos mais próximos da hipótese de intersecção  $P$  assumirão os novos valores de  $A_{AC_1}$  e  $A_{AC_n}$  e de  $A_{BD_1}$  e  $A_{BD_n}$ , e um novo valor de *passo* é empregado. De forma recursiva este processo se repete até que o valor do *passo* seja de apenas 1 segundo de arco. Assim, retorna-se o valor mais preciso possível dos azimutes que satisfaçam a condição de 200 milhas náuticas das geodésicas e a coordenada do ponto  $P$ .

A Figura 8 apresenta um fluxograma sintetizando todas as etapas do processamento. Para a implementação computacional foi desenvolvido um código em ambiente de programação *Lazarus* e a componente *TChart* para visualização dos dados.

Figura 8 – Fluxograma ilustrando as etapas de processamento.

Fonte: O Autor (2014).



Para garantir que haja intersecção o comprimento da geodésica entre o ponto A até B deverá ser menor que o dobro da distância de 200 milhas náuticas.

#### 4. EXPERIMENTOS

Para avaliação da metodologia proposta foram utilizados dois pontos da linha de costa, o ponto A localizado entre a divisa da costa paranaense, e o ponto B, localizado próximo à divisa da costa dos estados do Paraná e São Paulo. As coordenadas geodésicas dos respectivos pontos são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Coordenadas Geodésicas dos pontos A e B.

Ponto	Latitude	Longitude
A	25° 50' 27" S	48° 24' 18" W
B	23° 57' 45" S	45° 14' 03" W

O valor do raio da esfera empregado foi de 6.372.000 m, e os parâmetros do elipsóide utilizado (GRS-80) são definidos pela IUAG (*International Union of Geodesy and Geophysics*), como sendo:  $a=6378137,000$  m (semi-eixo maior) e  $f=1/298,257223563$  (achatamento).

#### 5. DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

No cálculo da intersecção na superfície da esfera, foi encontrado o seguinte valor para o ponto P:  $\varphi_p = 27^\circ 17' 30,02''S$ ,  $\lambda_p = 45^\circ 02' 58,04''W$ ; e os respectivos azimutes  $A_{AP}=116^\circ 35' 55,05''$ ;  $A_{BP}=177^\circ 20' 31,09''$ ). Conforme apresentado na metodologia, têm-se os seguintes valores para  $A_{AC_1}$  ( $115^\circ$ );  $A_{AC_n}$  ( $117^\circ$ ); e de  $A_{BD_1}$  ( $176^\circ$ );  $A_{BD_n}$  ( $178^\circ$ ). Sendo estes os azimutes que irão limitar o espaço de busca.

Dentro do aplicativo estão estabelecidos os valores de *passo* que são de  $10'$ ,  $5'$ ,  $30''$ ,  $10''$ ,  $5''$  e  $1''$ . As coordenadas do ponto de intersecção P, quando determinadas, são consideradas isentas de erro. Portanto, este erro se propagará no comprimento da geodésica. Na Tabela 2 mostra-se os erros absolutos que cada diferente resolução de discretização apresenta.

Tabela 2- Diferente resoluções na discretização dos azimutes.

<i>Passo</i>	Erro Esperado (m)	Erro Esperado ppm
10'	1078,669	2912,1733
5'	539,535	1456,6280
1'	107,867	291,2176
30''	55,934	151,0097
10''	17,978	48,5367
5''	8,989	24,2684
1''	1,798	4,8542

Conforme a Tabela 2, é possível verificar que quanto menor for o valor do *passo* menor será o erro na determinação da coordenada do ponto P, e consequentemente, o valor do comprimento das geodésicas  $m_{AP}$  e  $m_{BP}$ . Observa-se também que o erro absoluto da geodésica a 1" de arco, com distância de 200 milhas náuticas, atinge um erro de 1.798 m, podendo ser considerado, do ponto de vista prático, como um seguimento de reta.

A Tabela 3 apresenta o resultado do comprimento da geodésica  $m_{AP}$ , calculado com as diferentes resoluções de discretização, verificadas através das fórmulas inversas de Vincenty, com base no ponto de origem A para a determinação do ponto P.

Tabela 3– Erro em distância entre o ponto A até P

<i>Passo</i>	$m_{AP}$ (m)	Erro (m)	Erro (ppm)
10'	370399,932	0,068	-0,184
5'	370399,948	0,052	-0,140
1'	370399,970	0,030	-0,081
30"	370399,973	0,027	-0,073
10"	370399,977	0,023	-0,062
5"	370399,980	0,020	-0,054
1"	370400,008	0,008	0,022

Observa-se na Tabela 4, que o valor da distância atingiu no valor de *passo* igual a 1", a precisão estipulada, ou seja, inferior a 0,01 m. É possível visualizar também o resultado do comprimento da geodésica  $m_{BP}$ .

Tabela 4 – Erro em distância entre o ponto B até P.

<i>Passo</i>	$m_{BP}$ (m)	Erro (m)	Erro (ppm)
10'	370399,839	0,068	-0,435
5'	370399,861	0,052	-0,375
1'	370399,900	0,030	-0,270
30"	370399,946	0,027	-0,146
10"	370399,948	0,020	-0,140
5"	370399,948	0,020	-0,140
1"	370400,004	0,008	0,011

Na Tabela 5, podem ser verificadas as coordenadas de latitude e longitude ( $\varphi_P$   $\lambda_P$ ) do ponto de intersecção P, calculadas através das distâncias apresentadas e calculadas através das fórmulas inversas de Vincenty, utilizando como parâmetros as coordenadas do ponto A, B.

Tabela 5 – Coordenadas do ponto P.

<i>Passo</i>	$\varphi_P$	$\lambda_P$
10'	-27° 18'08,2763"	-45°03'39,6301"
5'	-27° 18'08,2798"	-45°03'39,6300"
1'	-27° 18'08,2811"	-45°03'39,6302"
30''	-27° 18'08,28215"	-45° 03'39,6304"
10''	-27° 18'08,28218"	-45° 03'39,6305"
5''	-27° 18'08,28219"	-45°03'39,6308"
1''	-27° 18'08,2824"	-45°03' 39,6306"

As fórmulas inversas de Vincenty, além de retornar os valores das distâncias  $m_{AB}$  e  $m_{BP}$ , também retornam os valores dos azimutes. Os seus respectivos valores são mostrados na Tabela 6.

Tabela 6 – Valores dos Azimutes.

<i>Passo</i>	$A_{AP}$	$A_{BP}$
10'	116° 39' 45,52622"	177° 20' 46,32051"
5'	116° 39' 45,27669"	177° 20' 46,17367"
1'	116° 39' 45,17997"	177° 20' 46,11048"
30''	116° 39' 45,20515"	177° 20' 46,11444"
10''	116° 39' 45,20508"	177° 20' 46,11414"
5''	116° 39' 45,20516"	177° 20' 46,11416"
1''	116° 39' 45,20956"	177° 20' 46,11461"

Conforme a Tabela 6, considerando-se que partisse do ponto *A* uma geodésica com 200 milhas náuticas e azimute igual a 116°39'45,20956", e do ponto *B* uma geodésica com o mesmo comprimento, e com azimute igual a 177°20'46,11461, ambas as linhas geodésicas se interceptariam no ponto *P* com coordenadas de -27°18'08,2824" de latitude e -45°03'39,6306" de longitude.

## 6. CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÃO

O desenvolvimento deste trabalho teve como objetivo principal obter o ponto de intersecção entre duas linhas geodésicas, garantindo uma distância de duzentas milhas náuticas da costa brasileira. Este comprimento corresponde à extensão que define a Zona Econômica Exclusiva, onde tal importância econômica acaba por resultar no interesse dos estados em delimitar suas correspondentes áreas marítimas, que dão direito a receber o pagamento de royalties. Na busca da definição de tais áreas, surgiu o interesse em buscar uma solução para este problema.

Primeiramente, foi realizada a intersecção entre as linhas geodésicas na superfície esférica, baseando-se em rígidas fórmulas da trigonometria. O resultado obtido serve como aproximação a intersecção na superfície elipsoidal, e os azimutes

calculados propiciaram um menor esforço computacional quando da aplicação do método utilizado para a intersecção na superfície elipsoidal.

O cálculo da intersecção das linhas geodésicas na superfície elipsoidal foi realizado por meio de um algoritmo computacional baseado nas formulações de Vincenty. A discretização dos azimutes iniciais, obtidos pela trigonometria esférica, propiciou um menor esforço computacional, pois reduz o espaço de busca para a hipótese de intersecção, o que permitiu a realização de análises com diferentes graus de discretização.

A intersecção entre duas linhas geodésicas foi obtida por dois métodos distintos na superfície elipsoidal e esférica. Conforme os resultados encontrados, considera-se que as soluções são satisfatórias com precisão superior a 10 mm.

Recomenda-se que a distância entre os pontos de partida (ponto A entre ponto B) não seja superior ao dobro de 370,400 km para que ocorra intersecção entre os dois azimutes, pois neste experimento, a distância entre o ponto A e o ponto B foi de 381,963 km.

Os autores sugerem também outras técnicas computacionais utilizando somente as fórmulas diretas de Vincenty. No qual, injunciona-se o comprimento da geodésica e utilizando algoritmos recursivos de tentativa e erro (*backtracking*) para a estimação dos azimutes que satisfaçam a condição de intersecção do ponto P, desta forma, dispensando o cálculo aproximado na superfície esférica.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAESCHLIN, C.F.: *Lerbuch Der Geodäsie*. Orell Fuessli Verlag, Zuerich, 1948.
- DECRETO Nº 4.983, DE 10 DE FEVEREIRO DE 2004. Estabelece os pontos apropriados para o traçado das Linhas de Base Retas ao longo da costa brasileira e dá outras providências. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/ato2004-2006/2004/decreto/d4983.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/ato2004-2006/2004/decreto/d4983.htm)>. Data de acesso: 14/02/2012.
- GALO, M.; MONICO, J. F. G.; OLIVEIRA, L .C. Cálculo de áreas de polígonos sobre o elipsóide usando projeções equivalentes. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2003. p. 465-479 (*Series Ciências Geodésicas*, v. 3).
- GEMAEL, C. *Elementos de Trigonometria Esférica*. Curitiba: Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1981.
- GRAFAREND, E.A.: *Map projections*. Springer, Heidelberg, 2006.
- HEITZ, S.: *Coordinates in geodesy*. Springer, Heidelberg, 1988.
- KNEISSL, M.: *Handbuch der Vermessungskunde*, Band IV. J B Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1958.
- KIVIOJA, L. A.: Computation of geodetic direct and indirect problems by computers accumulating increments from geodetic line elements. *Bull. Geod.*, 99, 55–63, 1971.
- LEI Nº 7.525, DE 22 DE JULHO DE 1986. Estabelece normas complementares para a execução do disposto no art. 27 da Lei nº 2.004, de 3 de outubro de 1953, com a redação da Lei nº 7.453, de 27 de dezembro de 1985, e dá outras

- providências. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/Leis/1980-1988/L7525.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/1980-1988/L7525.htm). Data de acesso: 14/02/2012.
- LEI Nº 8.617, DE 4 DE JANEIRO DE 1993. Dispõe sobre o mar territorial, a zona contígua, a zona econômica exclusiva e a Plataforma Continental brasileiros, e dá outras providências. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/Leis/L8617.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L8617.htm). Data de acesso: 14/02/2012.
- MORITZ, H. (1980). Geodetic Reference System 1980. *Bull. Geod.*54(4), 395–405.
- SAITO, T.: The computation of long geodesics on the ellipsoid through Gaussian quadrature.” *Bull. Geod.*, 98, 341–374,1979.
- SJOBERG, L.E. Geodetic intersection on the ellipsoid. *J Geod.*, n. 82, p. 565-567, 2008.
- SODANO, E. M. (1965). General non-iterative solution of the inverse and direct geodetic problems. *Bull. Geod.*, 75, 69–89.
- THOMAS, C. M., FEATHERSTONE, W. E. Validation of Vincenty’s Fórmulas for the Geodesic Using a New Fourth-Order Extension of Kivioja’s Formula. *Journal of Surveying Enginnering*, p 20-26, fevereiro 2005.
- VINCENTY, T.: Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations. *Surv. Rev.*, XXII (176), 88–93.1975.

Recebido em setembro de 2014. Aceito em novembro de 2014).