ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

Los parámetros y las infinitas soluciones en sistemas de ecuaciones lineales

Parameters and Infinite Solutions of Linear Equation Systems

Luis Enrique **Hernández-Zavala**[*]

ORCID iD 0000-0003-0746-7503

Claudia **Acuña-Soto**[**]

ORCID iD 0000-0003-3828-0557

Vicente **Liern**[***]

ORCID iD 0000-0001-5883-9640

Resumen

En el presente trabajo investigamos la utilidad didáctica de usar parámetros como *variables de naturaleza dual* (variables activas o inactivas), así como la actualización de cinco profesores mexicanos en este saber. En esta actualización se analizaron sistemas de ecuaciones lineales (SEL) con dos ecuaciones y tres incógnitas que tienen infinitas soluciones. Para ello propusimos, vía internet, cinco artefactos semióticos: 1. una definición, 2. la inclusión del parámetro en el SEL, 3. el cálculo de soluciones, 4. representaciones gráficas y 5. la aplicación a un problema en contexto. Los resultados revelaron la pertinencia de la introducción del parámetro mediante este proceso y, además, los profesores lograron un control sobre las soluciones válidas de entre las infinitas del sistema planteado. Para algunos profesores, la estrategia y el papel del parámetro fue sólo un método más que se agrega a los ya conocidos; sin embargo, para otros, permitió dar una explicación a la relación entre la variable y el parámetro, así como la posibilidad del uso controlado de las infinitas soluciones.

Palabras clave: Parámetros. Infinitas Soluciones. Sistemas de ecuaciones lineales. Artefactos semióticos. Actualización de Profesores.

Abstract

In the present work, we investigate the didactic usefulness of using parameters as variables of dual nature (active or inactive variables), as well as the actualization of five Mexican teachers in this knowledge. In this actualization we analyzed systems of linear equations (SLE) with two equations and three unknowns that had infinite solutions. For this purpose, we proposed, via the Internet, five semiotic artifacts: 1. A definition, 2. The inclusion of the parameter in the SLE, 3. The calculation of solutions, 4. Graphical representations, and 5. The application to a problem in context. The results revealed the relevance of introducing the parameter through this process and, in addition, the teachers achieved control over the valid solutions among the infinite ones of the system posed. For some teachers, the strategy and the role of the parameter was just one more method to be added to those already

[*] Estudiante del programa de Doctorado en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV), C. De México, México. E-mail: luisenri.hernadez@cinvestav.mx.

[**] Doctora en Ciencias Pedagógicas (Matemáticas), Instituto Superior Enrique José Varona (ISPEJV). Investigadora en Matemática Educativa, Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV), C. De México, México. E-mail: claudiamargarita_as@hotmail.com.

[***] Doctor en Ciencias Matemáticas (Física Teórica), Universitat de València (UV). Catedrático de Matemáticas para la Economía y la Empresa, Universitat de València (UV), Valencia, España. E-mail: vicente.liern@uv.es.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

known; however, for others, it allowed an explanation of the relationship between the variable and the parameter, as well as the possibility of the controlled use of the infinite solutions.

Keywords: Parameters. Infinite solutions. Systems of linear equations. Semiotic artifacts. Teacher Update.

1 Introducción

Los parámetros son un tipo de variables muy útiles para la matemática pura y la aplicada, por lo que se esperaría que se les introdujera adecuadamente en las escuelas. Sin embargo, están casi ocultos en los currículos de matemáticas, los programas de estudio y los libros de texto (HERNÁNDEZ; ACUÑA, 2021). No se introducen de forma adecuada o explícita, incluso en los cursos de licenciatura, lo que hace que se les trate como una estructura marginal y oportunista, que será introducida sólo bajo ciertas circunstancias particulares que, como nunca se esclarecen, resultan ambiguas.

Al mismo tiempo, en los estudios sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL), con frecuencia se omiten los tres casos posibles de solución: que no exista solución, que exista una única solución o que existan infinitas soluciones. Este último caso es abordado ocasionalmente (TRIGUEROS; OKTAÇ; MANZANERO, 2007; OKTAÇ, 2018) y con frecuencia se asocia con representaciones gráficas donde se sobreponen algunas rectas o planos, donde se destacan las soluciones como puntos de intersección de conjuntos infinitos, pero las soluciones no se calculan y los sistemas son abandonados sin explicación, dando la impresión de estar ante una situación inmanejable o que se ha resuelto de manera poco satisfactoria, lo que está lejos de ser cierto.

En esta investigación, nos planteamos dos objetivos: 1. indagar si la propuesta de incluir un parámetro como herramienta de control contribuye con la actualización y formación continua del profesorado[1], cuando mostramos la utilidad didáctica de este recurso para ampliar su idea de las infinitas soluciones. 2. Diagnosticar si esta aproximación resulta adecuada, desde el punto de vista de los contenidos matemáticos manejados desde la docencia.

Para ello, llevamos a cabo un proceso de actualización de saberes con cinco profesores y profesoras, mediante una secuencia de artefactos semióticos aplicados a un SEL con dos ecuaciones y tres incógnitas que se resuelve mediante el uso de un parámetro, para abordar el caso de las infinitas soluciones.

[1] El Plan de Mejora de la Formación Continua y Desarrollo Profesional Docente 2021-2026 establece que el ejercicio de la función docente implica diferentes desafíos y cada profesional responde a ellos a partir de su propia experiencia, la cual es preciso fortalecer mediante una formación que movilice sus saberes y conocimientos y asegure los aprendizajes de sus estudiantes (MEJOREDU, 2022).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

En esta investigación, las y los profesores trabajaron en una labor conjunta[2] (RADFORD, 2020) con el investigador, a lo largo de una entrevista basada en tareas (GOLDIN, 2000), vía internet (impuesta por las condiciones de pandemia), a lo largo de 90 minutos en cada sesión individual. Los diálogos conformaron los datos de esta investigación de tipo cualitativa-exploratoria. Estas acciones fueron grabadas en video y transcritas para su análisis.

En la segunda sección de este artículo se muestran resultados sobre el concepto de parámetro en la investigación en Educación Matemática. Posteriormente, se abordan los referentes teóricos de esta investigación, entre los que se encuentran algunos aspectos de la Teoría de la Objetivación, aspectos de la formación permanente del profesorado de matemáticas y, por último, algunas consideraciones sobre el uso del Teorema de la Función Implícita en los Sistemas de Ecuaciones Lineales, para sustentar el tratamiento matemático del que hacemos uso.

En la cuarta sección se presenta el marco metodológico que guió esta investigación. En la sección siguiente, se presentan los resultados derivados de este estudio. Y, por último, proponemos una reflexión sobre los aportes de esta investigación a la Educación Matemática.

2 Antecedentes

El parámetro es una variable especial y en la educación matemática se han identificado distintos papeles basados en sus propiedades excepcionales. Por ejemplo, Freudenthal (1983) detecta tres usos distintos de los parámetros desde el punto de vista de la fenomenología: uno sobre su actividad procedimental (lo define como *sleeping variable*), el segundo se refiere a la dependencia o independencia de esta variable y, finalmente, el tercero se enfoca en la propiedad de la parametrización cuando se usa con la intención de estudiar la descripción de curvas y superficies. Desde otra perspectiva, Drijvers (2001) identifica a los parámetros como variables de orden superior y, en particular, como cantidades cambiantes y dinámicas que hacen variar lo que de por sí ya varía.

Por su lado, Ursini y Trigueros (2004) caracterizan a los parámetros como variables que se comportan: 1) como números generales de segundo orden, 2) que asumen el papel de incógnita o 3) de variable relacionada, dependiendo del contexto.

En lo que respecta a la interpretación de los estudiantes, Bloedy-Vinner (1994) encuentra que ellos los describen como: “una constante que varía y una variable con un valor

[2] Radford (2020, p. 26) afirma que el saber cultural debe ser puesto en movimiento por los profesores y los estudiantes mediante la actividad conjunta.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

constante" (BLOEDY-VINNER, 1994, p.180), expresión que intenta recuperar el uso que se hace de ellos en los procedimientos que los involucran. Mientras que Furinghetti y Paola (1994) encuentran que las diferencias que hacen los alumnos entre variables y parámetros están relacionadas con las prácticas operativas y el uso del lenguaje en contextos determinados. Observamos que la percepción de los estudiantes se apoya en el uso práctico que se da a los parámetros al resolver problemas, pero hace falta de una definición explícita y un estudio de las propiedades de estos.

Esta situación puede provocar una reflexión sobre la naturaleza del parámetro y las condiciones para su comportamiento dual como *constantes-variables.* A nuestro parecer, debería aclararse que se trata de una *variable* que juega papeles *activos o inactivos,* es decir, de naturaleza dual, según las condiciones del tratamiento algebraico. Por supuesto, dadas las circunstancias, no cualquier variable de un SEL puede ser candidato para transformarse en un parámetro, sino que se deben cumplir las condiciones del *Teorema de la Función Implícita*[3] (COURANT, 1950).

En esta investigación, partimos de una definición del parámetro en la que caracterizamos su naturaleza dual, como una *variable activa* o *inactiva*. Esta postura tiene una ventaja respecto a aquellas que lo proponen desde el carácter ambiguo de un objeto que es, al mismo tiempo, variable o constante, porque desde el inicio se advierte su carácter de variable que proporciona criterios para usar un aspecto u otro dependiendo de las condiciones operativas. Esta definición no requiere establecer relaciones de variabilidad sobre aquello que de por sí ya varía (DRIJVERS, 2001), tampoco necesita mostrarse como un número general de segundo orden (URSINI; TRIGUEROS, 2004) que ha mostrado ser una idea compleja, que requiere de una madurez e imaginación que se logra después de mucho tiempo de desarrollo, en cambio, el reconocimiento de la dualidad nos permite remarcar la diferencia entre el parámetro y la variable en términos de su funcionamiento.

3 Marco Teórico

3.1 Teoría de la Objetivación

La presente investigación toma como referencia a la Teoría de la Objetivación (TO), que

[3] En esta investigación, tomamos como referencia el capítulo 3: *Developments and aplications of the differential calculus* del libro *Differential and Integral Calculus* de R. Courant (1950), sin embargo, presentamos una versión del teorema adecuada para este artículo.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

concibe la enseñanza y el aprendizaje de la matemática como un único proceso, que implica tanto el *saber* cómo el *ser* (RADFORD, 2020).

El *saber* matemático que nos ocupa está contenido en el diseño de una organización de instrumentos o artefactos semióticos, que se abordan a través procesos de acción y de reflexión para lograr un encuentro con el saber. Ese encuentro se da en un entorno de *mediación semiótica* sobre sistemas de pensamiento, histórica y culturalmente constituidos, es lo que se define como proceso de *objetivación*[4] (RADFORD, 2020).

Pese a que el acceso a los conceptos no se logra directamente a través de los signos, sino a través de la actividad de los sujetos, esta involucra a los signos (RADFORD, 2015). Por lo tanto, la *mediación semiótica* juega un papel relevante debido a que se piensa *con* y *a través* de los artefactos y signos culturales (RADFORD, 2006).

La noción de mediación semiótica la podemos considerar constituida por dos elementos: la mediación como acceso al conocimiento y la cuestión del significado. Además, la actividad desde un punto de vista semiótico es esencialmente una actividad de significación. Por lo tanto, la mediación constituye un proceso semiótico en donde el profesor (o investigador) y el estudiantado movilizan signos, buscando dar significado a los objetos matemáticos que se les presentan. Por tanto, el encuentro con el saber es resultado de una *mediación semiótica* de los artefactos, que requiere de la interacción social entre un sujeto y los *recursos semióticos o artefactos* y que tienen como base una *práctica reflexiva* para lograr un *proceso de objetivación* (RADFORD, 2006; RADFORD, 2010a).

En este estudio, proponemos articular un conjunto de *artefactos semióticos*, que al ser coordinados, permiten que el saber potencial (en nuestro caso: la existencia de infinitas soluciones en un SEL y el parámetro que permite resolverlo) pueda convertirse en un objeto de pensamiento e interpretación que, al ser puestos en movimiento a través de una *práctica reflexiva,* posibilite poner en práctica la introducción de al menos un parámetro al sistema y que, de esta manera, los saberes asociados al manejo de las infinitas soluciones sean actualizados[5].

La secuencia de *artefactos semióticos* fue diseñada con el objetivo de que los profesores tuvieran acceso a distintos *medios de representación semiótica* asociados al parámetro y los SEL. Optamos por un acercamiento holístico, considerando que: “un sistema semiótico nos

[4] La Objetivación se refiere a manifestaciones de toma de consciencia. La conciencia puede ser captada a través de sus manifestaciones: el discurso, gestos, y demás acciones sensuales (RADFORD; ROTH, 2011).
[5] Retomamos la idea de que los objetos del conocimiento (conceptos físicos y matemáticos) en la conciencia de los estudiantes aparecen a partir de la actualización del saber a través de sus casos particulares. Esta actualización es posible gracias a la mediación semiótica.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

proporciona maneras específicas para asignar significados o para decir ciertas cosas, mientras que otro sistema semiótico nos proporciona otros tipos de significados" (RADFORD, 2010b, p. 44), por ejemplo, el sentido y el significado que se obtiene a través de las palabras y los gestos[6] no es el mismo que el que se consigue con una fórmula o un gráfico.

Por tanto, proponemos la interpretación del parámetro como una herramienta semiótica, que puede permitirnos el control de las soluciones del sistema con apoyo en su naturaleza dual, así como del análisis de representaciones gráficas asociadas a problemas en contexto.

3.2 Formación Permanente del Profesorado de Matemáticas

Las investigaciones científicas sobre los procesos de actualización de los profesores de matemáticas muestran que no es fácil, ni inmediato, lograr una modificación real de las prácticas docentes tradicionales. Sin embargo, estas sugieren que la formación profesional y la actualización de sus saberes tienen un claro impacto sobre la calidad de su actividad profesional (BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017; PONTE, 2001; EVEN; BALL, 2009; LLINARES, 2013; SILVERMAN; THOMPSON, 2008; CASTILLO *et al.*, 2005). En consecuencia, proponemos este recurso potencialmente determinante para incluir el estudio de los parámetros asociados a las infinitas soluciones de un SEL en la educación actual.

En la dirección de incidir en las prácticas de los profesores, el uso y la resolución de problemas en contexto ha mostrado ventajas, tal es el caso de los problemas ligados a los SEL, que pueden asociarse, por ejemplo, a problemas de distribución para la toma de decisiones. Sin embargo, su uso puede ser trivializado si no se aclara que ese entorno puede ser fundamento para una mejor enseñanza (BOALER, 1993; GREER, 1997; VERSCHAFFEL, 2002; CHAPMAN, 2006).

3.3 Teorema de la Función Implícita en los Sel

Este trabajo pretende, también, desarrollar el interés y el compromiso del profesor sobre la validez de las infinitas soluciones de un SEL, del que podrán: 1. calcular soluciones específicas de entre las que son infinitas; 2. interpretar la transformación de una variable en un parámetro, para 3. discutir las soluciones que incluyan parámetros y negociar aquellas que sean válidas para resolver el problema específico. Todo esto con el fin de reconocer la estructura

[6] Debido a la naturaleza de esta investigación (llevada a cabo vía Zoom) no fue posible observar y analizar las expresiones y los gestos de los profesores, por lo que no se pudo obtener datos sobre este aspecto.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

matemática subyacente en términos de algunas de sus *aplicaciones* (BOALER, 1993; GREER, 1997).

Para introducir un parámetro en lugar de alguna de las variables, que nos permite resolver el sistema que planteamos en esta investigación, es necesario que este cumpla ciertas condiciones matemáticas establecidas por el *Teorema de la Función Implícita* (COURANT, 1950), las que no fueron discutidas con los profesores debido a que en este primer acercamiento estuvimos interesados en el proceso operativo de la introducción del parámetro, y no en las condiciones de suficiencia del proceso, a diferencia del efecto que otorgamos a las evidencias gráficas y contextuales que fueron clave para la adquisición de la idea de parámetro como variable de naturaleza dual y de este proceso para obtener soluciones válidas.

Respecto a la introducción de uno o varios parámetros en los SEL se requiere que las variables del sistema puedan ser transformadas en parámetros, y eso sucede si el sistema cumple las condiciones dadas por el *Teorema de la Función Implícita,* lo que nos lleva a condiciones de independencia lineal entre las variables elegidas para transformarse en parámetros y las restantes del sistema. Podemos enunciar este teorema de la siguiente manera:

> *Dada una función* $f: A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ *de clase* C^k*, supongamos que para un punto* $(x_0, y_0) \in A$ *se verifica que* $f(x_0, y_0) = 0 \in \mathbb{R}^m$*. Sea el determinante*
> $$\triangle = det\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$
> *Si* $\triangle\,(x_0, y_0) \neq 0$*, entonces existe* $U \subset \mathbb{R}^n$*, un entorno de* x_0*,* $V \subset \mathbb{R}^m$*, un entorno de* y_0*, y una única función* $g: U \rightarrow V$ *de manera que* $f(x, g(x)) = 0$*. Además,* g *es de clase* C^k*.*

Este teorema establece condiciones suficientes para transformar, en cada caso, una o varias de las variables en un parámetro; en el caso de esta investigación, sólo nos proponemos incluir un parámetro.

En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales $\triangle$ se refiere al determinante de la matriz de coeficientes del sistema y la condición del teorema se reduce a que los determinantes menores sean distintos de cero.

Para inspeccionar la independencia lineal de los vectores asociados al siguiente sistema *I,* hacemos uso del cálculo de los determinantes menores de la matriz formada por los vectores del sistema, que requiere que la variable respectiva cumpla que *el determinante del menor de orden igual o menor al mínimo entre* n *y* m *debe ser distinto de cero.*

A modo de ejemplo, que justifica el procedimiento usado en esta investigación, consideremos el siguiente sistema *I*:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

$$I = \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

Para saber si podemos transformar la variable x en un parámetro λ, consideramos el siguiente determinante del menor cuadrado de tamaño $2x2$, cuyo cálculo se muestra enseguida:

$$det \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Notemos que el determinante es igual a cero, por lo tanto, concluimos que la variable x no puede transformarse en un parámetro en este sistema, porque es linealmente dependiente de las otras variables, pero se comprueba fácilmente que el resto de las variables sí, pueden transformarse en parámetros.

Por ejemplo, el determinante menor para la variable y es distinto de cero:

$$det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Lo que significa que y es una candidata a ser transformada en un parámetro λ_1, de lo que se obtiene el siguiente sistema que incluye un parámetro, en el que λ_1 hace las veces de variable inactiva:

$$\begin{cases} x + z = 3 - \lambda_1 \\ 2x + z = 4 - \lambda_1 \end{cases}$$

Haciendo los cálculos con $y = \lambda_1$, tenemos que la solución del sistema es la siguiente:

$(x, y, z) = (1,\ \lambda_1, 2 - \lambda_1)$ para todo $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Para el caso de la variable z tenemos que:

$$det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Lo que nos permite afirmar que es posible transformar a z en un parámetro, porque es una variable linealmente independiente de las demás, y así transformamos $z = \lambda_2$, donde nuevamente λ_2 es una variable inactiva del sistema, de lo que se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 - \lambda_2 \\ 2x + y = 4 - \lambda_2 \end{cases}$$

Y su solución es la siguiente:

$(x, y, z) = (1,\ 2 - \lambda_2,\ \lambda_2)$ para todo $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

En este ejemplo observamos que el procedimiento de introducción del parámetro es válido únicamente para las variables y ó z, y la diferencia entre los conjuntos solución se relaciona con la forma particular de escribirla. Por supuesto, si hacemos $\lambda_1 = 2 - \lambda_2$ ambas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

expresiones coinciden. En un sistema de este tipo, la cantidad de parámetros que se pueden introducir está dada por los vectores linealmente independientes del SEL en cuestión.

La introducción de los parámetros en la mencionada modalidad permite que un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas pueda transformarse en un sistema que incluya un parámetro, en este caso uno formado por dos ecuaciones con dos incógnitas, aspecto que fue aprovechado como parte de la estrategia presentada. Plantear este nuevo sistema colocó al profesor en un terreno conocido, lo que permitió introducir artefactos gráficos y contextuales, proceso en el que se puso en funcionamiento la siguiente metodología.

4 Metodología

4.1 Métodos e Instrumentos de Recolección de Datos

En el presente trabajo, realizamos un estudio exploratorio sobre una *Investigación Cualitativa Mediada por Internet* (HEWSON, 2014) con una población de cinco profesores mexicanos en servicio, de entre 24 a 30 años y con cuatro años promedio de docencia. Para contar con los participantes se hizo una invitación abierta a distintas instituciones educativas de México, pero debido a las condiciones dadas por la pandemia, únicamente cinco profesores en servicio accedieron a trabajar con nosotros.

Los perfiles de trabajo docente de la muestra con quienes trabajamos son los siguientes: uno de ellos trabajaba en bachillerato, dos en secundaria y dos en licenciatura. Para dar solución a las condiciones suscitadas por la pandemia, procedimos a desarrollar una intervención con cada uno de ellos, mediante entrevistas basadas en tareas[7] (GOLDIN, 2000; MAHER; SIGLEY, 2020) entre el profesor y el investigador, para promover *un encuentro con el saber* (RADFORD, 2020) alrededor de la idea de parámetro como una herramienta de control de naturaleza dual.

El discurso interactivo de las sesiones de trabajo que se sostuvieron en cada una de las entrevistas basadas en tareas fue la fuente de los datos. Las entrevistas fueron semiestructuradas (COHEN; MANION; MORRISON, 2018) e individuales a largo de 90 minutos cada una. Los diálogos fueron videograbados y transcritos para su análisis.

En la *labor conjunta* el rol del investigador no fue el de un guía ni un mediador, sino,

[7] En el campo de la Matemática Educativa, Maher y Sigley (2020, p. 821) definen las *Task-Based Interviews* cómo: “Entrevistas en las que un sujeto o grupo de sujetos hablan mientras trabajan en una tarea o conjunto de tareas matemáticas”.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

más bien, el de un conciliador que mediante un diálogo constante propuso un espacio de acción y reflexión donde se negociaban significados mediante actividades y tareas específicas, en donde se involucraban el profesor y el investigador en lo que Radford (2017) define como una *búsqueda común,* es decir, una búsqueda con otros de la solución a un problema planteado.

Cabe mencionar que el criterio de las variables como instrumentos de control también es posible proponerlo para apreciar la diferencia del carácter de las variables en un SEL, que pueden tomar valores distintos sin afectar las soluciones del sistema original y que, por tanto, pueden ser transformadas en parámetros, aproximación que no será desarrollada en esta investigación.

El instrumento de investigación se propuso a través de un *cuaderno de trabajo (en la plataforma Jupyter Notebook*[8]*)* por medio de la plataforma virtual Zoom, que estuvo conformado por una secuencia de cinco artefactos semióticos a saber: 1) la definición del parámetro, 2) la transformación de SEL de dos ecuaciones con tres incógnitas *(2x3)* a SEL de dos ecuaciones con dos incógnitas *(2x2),* por virtud del parámetro, 3) el uso de un programa computacional que calculaba el conjunto solución de un SEL de m ecuaciones con n incógnitas, 4) el uso de representaciones gráficas de los conjuntos solución de los SEL, de manera dinámica y simultánea en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y, finalmente, 5) la solución de problemas en contexto mediante el uso aplicación de un parámetro.

Los resultados se apoyan en el discurso relacionado con la identificación del papel de ambas variables en las soluciones de los SEL, en la gráfica o en el problema contextual. Desarrollamos un análisis global del discurso de los cinco profesores para identificar si la propuesta resultó útil y significativa para los profesores, desde el punto de vista de la apropiación del contenido acorde con sus antecedentes académicos. Luego, para mostrar más detalladamente estas relaciones, hicimos una segunda inspección de tres de los profesores para profundizar las distintas formas de apropiación de la propuesta global.

Para llevar a cabo la entrevista el investigador siguió un esquema general de intervención, en el cual se propuso una serie de preguntas que promovieron el diálogo y la reflexión conjunta con los profesores. El esquema constó de siete apartados:

1. *Inicio de entrevista.*
2. *Breve recordatorio sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales en con 2 y 3 variables.*

[8] Jupyter es una plataforma computacional que permite utilizar diferentes lenguajes (Julia, Python y R) y que combina la ejecución de código de programación, inclusión de texto, además de escritura de lenguaje matemático en LaTeX, video, y todo lo que se pueda visualizar con un navegador.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

3. *Introducción de la definición de parámetro enfatizando su naturaleza dual.*
4. *Introducción a la solución de sistemas de dos ecuaciones y tres incógnitas.*
5. *Tratamiento del parámetro como herramienta de control.*
6. *Representación gráfica y solución de un problema contextual.*
7. *Cierre de la intervención.*

En los apartados 1 y 2 se indagó sobre los saberes de los profesores con respecto a los SEL y sus conjuntos solución en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, así como sus nociones sobre el concepto de parámetro. En los apartados 3 a 6 se presentaron los *artefactos semióticos* discutidos anteriormente, esto se hizo mediante actividades, tareas y preguntas. Y, por último, en el apartado 7, a modo de reflexión, se invitó al profesor a responder las siguientes preguntas:

1. *Con respecto al caso de las infinitas soluciones en un SEL ¿Qué piensas respecto a la utilidad de éstas?*
2. *Con respecto a la idea de utilizar el parámetro como herramienta de control ¿qué opinas sobre su uso?*
3. *¿Te fue de ayuda la representación gráfica para darle significado a los SEL con infinitas soluciones y al parámetro?*
4. *¿El problema contextual fue de ayuda para comprender el uso del parámetro?*
5. *¿Te parece útil presentar los parámetros de esta manera?*
6. *¿Crees útil utilizar el parámetro como parte de actividad en tus clases?*

A continuación, mostramos la trayectoria seguida por el investigador en los apartados 3 a 6, en donde se describen con detalle los *artefactos semióticos* puestos en funcionamiento en esta investigación.

En un primer momento, usamos y presentamos al profesor la siguiente definición operativa de parámetro basada en Freudenthal (1983):

> El parámetro es una variable especial de naturaleza dual, que funciona como una variable activa o inactiva, es decir, cuando es necesario varía y cuando no lo es, puede ser considerada como un objeto que se comporta como un valor constante, dependiendo de las necesidades del problema (FREUDENTHAL, 1983, p.500).

Para trabajar con los profesores, propusimos como ejemplo el SEL rectangular $I\ (2x3)$, que fue reducido a un SEL cuadrado $(2x2)$ que incluye un parámetro (véase Figura 2), del que conocíamos el comportamiento de las variables respecto a su independencia lineal, condiciones que no fueron compartidas con los profesores ya que no era un requisito para los objetivos de esta investigación. Propusimos el siguiente sistema:

$$I = \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 29 \end{cases}$$

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

El tratamiento algebraico fue acompañado de una representación gráfica (véase Figuras 1 y 3).

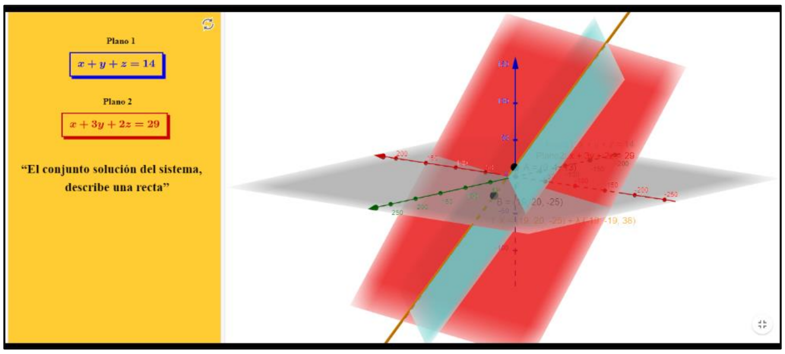

Figura 1 – Representación de SEL *I* en $\mathbb{R}^3$
Fuente: elaboración propia

El procedimiento sugerido a los profesores para resolver el sistema *I* fue transformar la variable z en un parámetro λ, lo que se expresa como $z = \lambda$, pero donde λ cumple las propiedades mencionadas, lo que nos permite hacer uso de λ como variable inactiva; el SEL resultante cuenta con dos ecuaciones y dos incógnitas. Respecto a la reducción del sistema *I* al *J* (ver Figura 2) se advirtió a los profesores que la variable *z* no desaparece, sino que está presente en la nueva expresión que incluye un parámetro y que la variable puede ser recuperada cuando sea necesario.

$$I = \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 29 \end{cases} \qquad J = \begin{cases} x + y = 14 - \lambda \\ x + 3y = 29 - 2\lambda \end{cases}$$

Figura 2 – Transformación del sistema *I* al *J* mediante la introducción de un parámetro
Fuente: elaboración propia

Para resolver el sistema *J* que incluía al parámetro λ recurrimos a un programa computacional que calcula el conjunto solución de un SEL de *n* ecuaciones con *m* incógnitas y que sólo requiere de la introducción de los coeficientes o expresiones algebraicas en formato computacional. Con este programa obviamos los cálculos y los distintos métodos de resolución, información con la que los profesores ya cuentan, lo que nos permitió enfocarnos en la interpretación de las soluciones que incluyen al parámetro y que son infinitas, para, luego, determinar las que son válidas. En este tratamiento nos llamó la atención que los profesores no repararán en los efectos que la calculadora podría tener en la enseñanza del tema.

Luego del cálculo de estas soluciones, se les presentó a los profesores un *applet* en GeoGebra con la representación gráfica del nuevo sistema *J* (véase Figura 3) y se discutió la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

interpretación de las infinitas soluciones, donde aparecen como familias de rectas asociadas a cada punto de intersección sobre el conjunto solución original, que, en este caso se trata de una recta (amarilla). Además, se discutió la idea de tomar intervalos acotados sobre el conjunto solución del sistema, determinado por el parámetro para el uso o aplicación en problemas que impongan restricciones sobre el tipo de solución requerida.

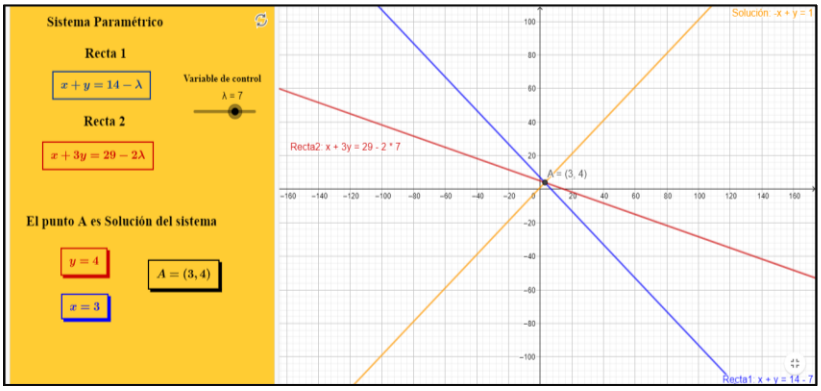

Figura 3 – Representación gráfica del conjunto solución *J* (amarillo) y algunas soluciones específicas (intersección de rojo y azul)
Fuente: elaboración propia

Mostramos la representación gráfica de las funciones que constituyen los sistemas *I y J* (véase Figura 4)*,* es decir, el sistema original y el que incluye al parámetro simultáneamente, con el objetivo de evidenciar la relación de cambio entre ambas representaciones antes y después de la inclusión del parámetro λ, de manera que λ cambia en la misma forma como lo hace *z,* que de por sí ya varía (DRIJVERS, 2001). Se mostró una proyección del espacio tridimensional en el plano cartesiano, cuyos cambios pueden ser observados simultánea y dinámicamente mediante un deslizador que simulaba la variación del parámetro.

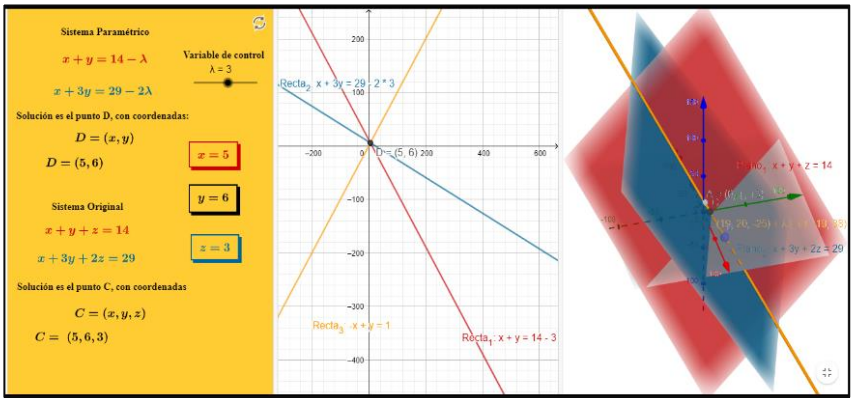

Figura 4 – Representación de las soluciones de *J* y de *I*
Fuente: elaboración propia

Luego de discutir la representación gráfica, abordamos situaciones prácticas a través de problemas en contexto, que pueden ser resueltas mediante la introducción de un parámetro como en el caso del siguiente problema (Figura 5):

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

La siguiente tabla muestra el número de miligramos de vitaminas A y B contenidas en un gramo de cada uno de los alimentos x; y; z.

	x	y	z
A	1	1	1
B	1	3	2

Se debe preparar una mezcla que contenga exactamente 14 mg de A y 29 mg de B. El sistema I es el modelo matemático asociado a la situación planteada:

$$I = \begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + 3y + 2z = 29 \end{cases}$$

a) Resuelva el sistema I en términos de un parámetro λ.

b) Determine el conjunto solución del sistema paramétrico, de manera que la solución sea adecuada a una situación real.

c) Determine la mayor cantidad de miligramos de y que puedan estar contenidos en una mezcla.

Figura 5 – Problema contextual
Fuente: elaboración propia

Para abordar las soluciones infinitas el investigador orientó al profesor para incluir el parámetro en el SEL y encontrar la expresión algebraica que describe el comportamiento de las soluciones del sistema, haciendo uso del programa que calculaba el conjunto solución y los recursos gráficos-dinámicos.

No fueron discutidos con los profesores los aspectos relativos a la independencia lineal de las variables del sistema que permiten la inclusión del parámetro, debido a que queríamos centrar su atención en el uso y las consecuencias de la definición para observar si esta aproximación es útil y pertinente (desde un punto de vista didáctico y de la actualización), así como el uso de las evidencias gráficas y contextuales.

4.2 Análisis de Datos

Para analizar los datos utilizamos un *método de análisis de contenido cualitativo,* que combina procesos inductivos y deductivos (KUCKARTZ, 2014). En primer lugar, realizamos un análisis global de los datos (transcripciones de las entrevistas) y los categorizamos en un esquema de codificación que incluye cinco categorías (ver Cuadro 1):

Categoría	Criterios de análisis
Manejo de SEL	Conocimientos generales de sistemas de ecuaciones lineales y sus conjuntos solución.
Manejo de SEL con infinitas soluciones	Conocimientos sobre la resolución de SEL con infinitas soluciones.
Uso de parámetros	Conocimientos del uso de los parámetros en los SEL.
Parámetro como variable dual	Efecto de la intervención con respecto al uso de los parámetros en los SEL.
Actualización de saberes	Efecto de la intervención en sus conocimientos sobre las infinitas soluciones en un SEL.

Cuadro 1 – Esquema de codificación de datos 1
Fuente: elaboración propia

De la misma manera, codificamos los datos obtenidos de los profesores 1, 2 y 4 en tres

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

categorías. Estás tres categorías y sus indicadores emergen de la diversidad de formas de adoptar los *artefactos semióticos* en la actualización llevada a cabo (ver Cuadro 2).

Categoría	Criterios de análisis	Indicadores
Interpretación de la definición	Cómo es percibido el parámetro (variable o constante).	Percepción del parámetro como una variable especial.
	Detección de la naturaleza dual del parámetro.	Resultados de la aplicación de la naturaleza dual del parámetro.
Interpretación simultánea de las representaciones gráficas	Cuál es el impacto que tuvieron las representaciones gráficas asociadas al parámetro y a las infinitas soluciones.	Identificación de los conjuntos solución en las gráficas.
	Qué relaciones son detectadas cuando se usa el parámetro.	Uso del parámetro como una herramienta de control.
Solución e interpretación de problemas contextuales	Cómo son interpretados los problemas contextuales de un SEL con infinitas soluciones.	Interpretación de las infinitas soluciones en los problemas contextuales.
	Interpretación de las soluciones válidas relacionadas con las infinitas soluciones.	Aceptación e interpretación de las soluciones válidas.

Cuadro 2 – Esquema de codificación de datos 2
Fuente: elaboración propia

Como ejemplo del análisis del discurso, mencionamos el de la profesora 1, en el que consideramos momentos en los que las expresiones enfatizaban una *práctica reflexiva* en cada una de las categorías anteriores, y que dan cuenta de la incorporación de saberes asociados a la utilidad de los parámetros y de las infinitas soluciones, como en el siguiente ejemplo que corresponde a la interpretación de la definición:

> *70. Profesora 1: ¡Sí!, me di cuenta, que es lo que decías, que podría ser constante [variable inactiva] y variable [activa].*
> *71. Profesora 1: Y eso es lo interesante... cuando se introduce el parámetro al sistema, el parámetro toma el rol de una constante [variable inactiva], es decir, el sistema se transforma de un 2x3 a un 2x2, el cual es más fácil de manipular algebraicamente* (Entrevista No.1 Profesora 1, 2021).

Identificamos que, para la profesora 1, el parámetro es un signo que tiene una estructura distinta a las variables comunes. El investigador invita a la profesora 1 a familiarizarse con la naturaleza dual del parámetro (de una manera en que ella no había pensado anteriormente) a través de las palabras y el discurso, esto mediante un proceso que permite reconocer los usos del parámetro.

Respecto a la interpretación simultánea de las representaciones gráficas tenemos el siguiente fragmento:

> *74. Investigador: ¿Qué sucede ahora? la variable de control [herramienta de control] nos permite controlar esa λ.*
> *113.Profesora 1: [...] tú puedes controlar si quieres que las soluciones sean positivas o*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

> *negativas, o si quieres que y sea positiva o negativa, tú puedes hacer variar el parámetro, y va a tomar el rol de constante cuando fijes el valor del parámetro* (Entrevista No.1 Profesora 1, 2021).

Destacamos la manera en que la profesora 1 y el investigador reconocen la relación de variación del parámetro y el control asociado a las infinitas soluciones. La exclamación de la línea 113 añade un significado visual a lo que dicen las palabras. En este momento, la profesora utiliza el parámetro como un símbolo, es decir, como herramienta de control y en su doble naturaleza.

Por último, respecto a la solución e interpretación de problemas contextuales analizamos el siguiente fragmento:

> *165. Profesora 1: Pues, ya me aclaraste dudas, y tal vez me faltaba eso último, de que tenía que ser en un problema dado, para que tuviera más sentido, ¿verdad? para mí, porque así a primera instancia, pues son infinitas soluciones y pues puedo utilizar todas, y ya con ese problema, son todas la positivas, ya vemos en qué intervalo, porque también hasta que yo vi las gráficas que me enseñaste, vi que fijando lambda igual a 15, y se volvía negativa. Y pues, está muy bien, le entendí muy bien a todo lo que explicaste, las gráficas y lo algebraico* (Entrevista No.1 Profesora 1, 2021).

Para la profesora, la resolución de problemas contextuales puso en movimiento los saberes anteriores: la definición y las representaciones gráficas. Para ella, el parámetro se ha convertido en una herramienta psicológica[9] y, además, encuentra una utilidad didáctica.

La labor conjunta entre el investigador y la profesora 1 dio origen a un conjunto de significados multisemióticos asociados al parámetro. Estos significados dieron sentido al proceso a través del cual se resuelven situaciones contextuales que implican un SEL compatible indeterminado.

Ese proceso que resulta en la toma de conciencia de los usos y los significados de los parámetros es lo que llamamos un *proceso de objetivación*. Lo que se revela a la conciencia en ese proceso es una forma matemática de ver y percibir los SEL compatibles indeterminados como objetos que pueden ser modificados utilizando parámetros.

En la siguiente sección se muestran los resultados obtenidos del discurso de los profesores 1, 2 y 4, y se establece una discusión en torno a ellos para dilucidar los *procesos de objetivación* desarrollados por cada uno.

5 Resultados y Discusión

[9]Las funciones psicológicas superiores se desarrollan a través del uso de herramientas y de signos psicológicos (tales como el lenguaje). Estos mediadores son utilizados para controlar la actividad propia y la de los demás (KOZULIN, 2000).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

5.1 Resultados Generales

A continuación, en primer lugar, se presentan los resultados referentes a la pertinencia de la propuesta, para luego presentar los que dan cuenta de las distintas posturas respecto a la forma de apropiarse o no de ésta.

En el Cuadro 3 mostramos, en las cuatro primeras filas, las condiciones generales de inicio: 1. los antecedentes de las y los profesores sobre sus perfiles docentes; 2. el tipo de SEL que manipulan y trabajan en clase; 3. declaración personal sobre el manejo de los SEL en su práctica y antecedentes académicos, así como del conocimiento de las infinitas soluciones y 4. el conocimiento o uso de los parámetros.

Los resultados de la entrevista por cada profesor aparecen en las siguientes dos columnas, donde se expone: 1. los resultados de la actualización en lo relativo al uso del parámetro como variable de naturaleza dual y 2. su reflexión sobre los resultados de la actualización y la utilidad de la propuesta presentada.

Profesor	Docente en el nivel	Manejo de SEL	Manejo de SEL con infinitas soluciones	Uso de parámetros	Parámetro como variable dual	Actualización
1	Preparatoria abierta	Sólo maneja sistemas cuadrados, con soluciones únicas y numéricas.	Considera que este tipo de sistemas no pueden resolverse por que se llega a una contradicción algebraica.	Desconoce el uso de los parámetros en los SEL.	Mediante este recurso dio sentido y fue capaz de manipular el conjunto solución con infinitas soluciones.	La redujo a un método para encontrar soluciones y decidir sobre ellas, no apreciando la utilidad de la naturaleza dual del parámetro.
2	Licenciatura Humanidades	Manejo adecuado de SEL cuadrados y rectangulares.	Maneja este tipo de SEL, pero en su práctica docente no los aborda.	Conoce y ha utilizado los parámetros, sin embargo, desconoce su naturaleza dual.	Con este recurso dio sentido y manipuló las infinitas soluciones.	Conocía el tratamiento paramétrico, pero sólo ahora tuvo conocimiento de cómo abordar a las infinitas soluciones y su relación de variación.
3	Licenciatura Ciencias Sociales	Sólo maneja sistemas cuadrados, con soluciones únicas y numéricas.	No lo maneja adecuadamente, y tiene una concepción puntual de este tipo de soluciones. Considera que, si el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones, este no será resuelto.	Ha escuchado de los parámetros, pero desconoce su uso y su naturaleza.	Con base en la naturaleza dual dio sentido y fue capaz de manipular las infinitas soluciones.	Dio sentido al gráfico y al problema contextual. Identificó un intervalo adecuado de soluciones válidas en las infinitas soluciones.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

4	Secundaria	Sólo maneja sistemas cuadrados, con soluciones únicas y numéricas.	No aborda este caso en clase y considera que, si el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones, el sistema no será resuelto.	No ha oído hablar de los parámetros y nunca los ha utilizado.	Mediante la naturaleza dual dio sentido al parámetro y manipuló las infinitas soluciones.	Estableció la relación entre las variables en el caso gráfico, así como la utilidad de las soluciones válidas en el caso del problema en contexto.
5	Secundaria	Únicamente maneja sistemas cuadrados, con soluciones únicas y numéricas.	No aborda este caso en clase y considera que, si el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones, el sistema no será resuelto.	No ha oído hablar de los parámetros y nunca los ha utilizado.	Mediante la naturaleza dual dio sentido y fue capaz de manipular el conjunto de soluciones infinitas.	Considera la dualidad del parámetro, pero sólo como medio para obtener soluciones en condiciones distintas a las conocidas.

Cuadro 3 – Antecedentes sobre manejo de SEL y resultados generales
Fuente: elaboración propia

En el Cuadro 3 podemos observar que los profesores de nuestra muestra han trabajado con SEL cuadrados, formados por dos o tres ecuaciones y el mismo número de incógnitas. También, encontramos que desconocen o no abordan el caso de las infinitas soluciones como tradicionalmente sucede y lo asocian con un problema que no se puede resolver, ya sea porque es inaprehensible o porque no se plantea.

Luego de la intervención, para la introducción del procedimiento propuesto, los profesores consideraron, de manera general, que los parámetros son herramientas que les permiten la manipulación de las infinitas soluciones y los procedimientos son considerados como: *1. un nuevo procedimiento para resolver SEL (profesora 1); 2. una justificación para el método para introducir un parámetro (profesor 2; 3. la detección de una relación de variabilidad (profesor 3 y profesora 4) y 4. la detección de la naturaleza dual del parámetro (profesor 5).*

Y si bien, en todos los profesores se detectó un progresivo uso de los artefactos propuestos, así como de los significados asociados, para mostrar la profundidad de este proceso y la forma como fue personalmente adoptado, se han seleccionado algunos diálogos que dan muestra de momentos de *práctica reflexiva* de los profesores, en donde los artefactos usados fueron piezas fundamentales para el desarrollo de una *mediación semiótica* que condujo a procesos de *objetivación,* y se centran en los siguientes rubros:

- Definición de parámetro como variable de naturaleza dual y herramienta de control, que permite resolver el sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas como si fuese de dos ecuaciones con dos incógnitas, pero que incluye un parámetro.
- Interpretación de las soluciones en la representación gráfica-dinámica

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

simultánea del sistema en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

- Aplicación a problemas en contexto.

5.2 Resultados de los Profesores 1, 2 Y 4

Para mostrar con mayor profundidad los resultados respecto a los objetivos de esta investigación, hemos hecho una selección de diálogos de los profesores 1, 2 y 4 para mostrar los efectos de los *artefactos semióticos*.

A continuación, mostramos los antecedentes de los profesores involucrados:

- Profesora 1: docencia en nivel elemental (bachillerato), estudios en Matemática Educativa, conocimiento de SEL cuadrados y existencia de infinitas soluciones.
- Profesor 2: docencia en nivel licenciatura, estudios de posgrado en Economía, conocimiento de SEL cuadrados, rectangulares, existencia infinitas soluciones y de los parámetros.
- Profesora 4: docencia en nivel elemental (secundaria), estudios en escuela para profesores, desconocimiento de SEL de tamaño mayor a 2 o rectangulares, así como desconocimiento de la existencia de infinitas soluciones.

5.2.1 Momentos de Práctica Reflexiva

Los momentos clave, para detectar la ocurrencia de la *práctica reflexiva* de los profesores, se refieren a: *1. interpretación de la definición*, *2. interpretación simultánea de las representaciones gráficas* y *3. la solución e interpretación de problemas contextuales*. Aspectos que analizamos a continuación.

1.Interpretación de la definición

Respecto a este aspecto nos interesan especialmente los siguientes indicadores.

1. Percepción del parámetro como una variable especial.
2. Resultados de la aplicación de la naturaleza dual del parámetro.

A continuación, presentamos extractos de los diálogos con los profesores en donde se manifiestan estos puntos, junto con las preguntas o comentarios que propiciaron la reflexión entre el profesor y el investigador:

66.Investigador: Entonces tenemos un sistema que le llamamos sistema paramétrico, dado que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

ya introducimos λ igual a z.
67.Investigador: ¿Cómo resolverías este sistema de manera algebraica? ¿Lo podrías resolver?
68.Profesora 1: Si, pues ya nada más tenemos a x y y como incógnitas.
70.Profesora 1: ¡Si!, me di cuenta, que es lo que decías, que podría ser constante [variable inactiva] y variable [activa].
71.Profesora 1: Y eso es lo interesante… cuando se introduce el parámetro al sistema, el parámetro toma el rol de una constante [variable inactiva], *es decir, el sistema se transforma de un 2x3 a un 2x2, el cual es más fácil de manipular algebraicamente.*
93.Profesora 1: Si, sin duda, porque es lo básico, ya que se transformó a un sistema de dos variables, eso ya lo sé resolver, sé lo que es una constante, puedo trabajar con una constante (Entrevista No.1 Profesora 1, 2021).

55. Profesor 2: Ok, entonces a esta variable de control, que es la que va a quedar sujeta y en la que va a quedar más bien, como una variable que va a establecer los valores de las demás variables, ¿verdad? si estoy entendiendo bien, imaginemos que la variable de control es x entonces esta variable de control x va a actuar como variable [activa] si, va a cambiar de valor y esto va a hacer que cambie de valor de la y y la z.
57. Profesor 2: Pero también puede actuar como una constante [variable inactiva] ya cuando se queda fijada en un cierto valor, esa x entonces queda fijada también el valor de las otras dos variables ¿verdad?
78. Profesor 2: Y, en este caso lambda puede ser lo que él quiera y a través del valor de lambda se establece el valor de x y el valor de y, exacto…
80. Profesor 2: […] en este caso, por ejemplo, si es correcto, ¿no?, ya el lambda ya se transforma en una constante [variable inactiva] y, por lo tanto, ya no tenemos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, sino que tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas porque lambda es una constante [variable inactiva] (Entrevista No.2 Profesor 2, 2021).

58. Profesora 4: No, si, si me queda claro, si entiendo el concepto que quieres dar a entender con el parámetro, que no sabía, que pertenece a las variables.
61. Investigador: Hasta ahora, ¿qué te parece esta propuesta?
63. Profesora 4: Te comentaba, que pues ahora con el parámetro, a lo que lo relaciono con lo del caso 3 [infinitas soluciones] *es que este parámetro pues lo definiste de esta manera, porque te va a permitir identificar si es una variable constante* [variable inactiva] *o no constante, o variable* [activa] (Entrevista No.4, Profesora 4, 2021).

De los diálogos anteriores y considerando los indicadores mencionados, mostramos el siguiente análisis de contenido cualitativo de los extractos anteriores (Cuadro 4).

Profesor	**Percepción del parámetro como una variable especial**	**Resultados de la aplicación de la naturaleza dual del parámetro**
1	Al parecer el *cambio* de x a λ advierte a la profesora la *diferencia* entre el parámetro y las variables comunes.	Detecta que, por medio del rol del parámetro como variable inactiva, se puede *resolver* un sistema *2x3* que antes no era posible.
2	Detecta la *variabilidad* del parámetro, lo cual nos muestra que ha trascendido al sólo cambio de la naturaleza de la variable a la de un parámetro, es decir, de x por λ.	Identifica el papel del parámetro dependiendo de la *necesidad operativa*.
4	Se percata que el parámetro es una variable especial, pero de *distinta naturaleza*.	Identifica los *cambios* de los roles del parámetro, de manera particular, asociado a las infinitas soluciones.

Cuadro 4 – Análisis sobre definición de parámetro de los profesores 1, 2 y 4
Fuente: elaboración propia

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

En los casos mencionados, la definición pasó de ser un artefacto nominativo a uno operativo asociado a la naturaleza dual del parámetro. Las opiniones al respecto varían desde, considerar el cambio de notación, hasta el cambio en su naturaleza.

2.Interpretación simultánea de las representaciones gráficas

Los indicadores relevantes de la *interpretación simultánea de las representaciones gráficas* son los siguientes:

1. Identificación de los conjuntos solución en las gráficas.
2. Uso del parámetro como una herramienta de control.

Presentamos, a continuación, los diálogos respectivos, así como las preguntas y comentarios que suscitaron la reflexión:

> *74. Investigador: ¿Qué sucede ahora? la variable de control [herramienta de control] nos permite controlar esa λ.*
> *113.Profesora 1: [...] tú puedes controlar si quieres que las soluciones sean positivas o negativas, o si quieres que y sea positiva o negativa, tú puedes hacer variar el parámetro, y va a tomar el rol de constante cuando fijes el valor del parámetro* (Entrevista No.1 Profesora 1, 2021).
>
> *85. Profesor 2: [...] está muy bien y la parte de esto que me acabas de mostrar, de ya graficados estos planos y luego la línea en donde los dos planos están interceptando, pues creo que queda bastante claro, [...] sí ayuda esa parte de hacer la z una constante [variable inactiva] cuando se resuelve el sistema, y ya después cuando ya tenemos los valores de x y de y convertirla en una variable [activa] para que sea un parámetro.*
> *97. Profesor 2: Que justamente es esa recta [en el plano] y nosotros la representamos en tres dimensiones, es la recta donde se intersectan los planos, ¿verdad?*
> *98. Profesor 2: Sí, exactamente es la sombra en dos dimensiones, si está muy bien, excelente.*
> *190. Profesor 2: [...]sin duda las gráficas ayudan muchísimo para entender el funcionamiento de un sistema* (Entrevista No.2, Profesor 2, 2021).
>
> *116. Investigador: ¿Y, que logras observar aquí?*
> *117. Profesora 4: Que ya tenemos un sistema de dos por dos.*
> *121. Profesora 4: ¡Ajá! entonces por eso se convierte z en λ, para poder estar trabajando con rectas, y trabajar con infinitas soluciones…*
> *123. Profesora 4: ¡Exactamente y es más fácil!*
> *162.Profesora 4: Y, si pues la idea de que en lugar de estar trabajando con planos vas a estar trabajando con rectas nada más*
> *176.Profesora 4: Sí, y de manera algebraica la 2x3 se convierte en 2 x 2, y así puedes encontrar todas las soluciones de esta recta* (Entrevista No.4, Profesora 4, 2021).

De los diálogos anteriores, y considerando los indicadores mencionados, realizamos el siguiente análisis de contenido cualitativo (Cuadro 5).

Profesor	Identificación de los conjuntos solución en las gráficas	Uso del parámetro como una herramienta de control
1	Da sentido a los roles del parámetro y detecta la variabilidad de este. Además, *asocia la*	Detecta el *control de las soluciones***,** asociado a la variación del parámetro.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

	reducción del tamaño del SEL al uso del parámetro, por medio del rol de variable inactiva.	Identifica gráficamente el *control de las soluciones por medio del parámetro* y la capacidad de elección asociado a la no negatividad de estas.
2	Identifica la relación entre el conjunto original y el que incluye un parámetro, gráficamente, como una *proyección del espacio en el plano cartesiano*.	Identifica la relación de *cambio* entre las representaciones en $\mathbb{R}^2 y\ \mathbb{R}^3$. Detecta la posibilidad de *control* sobre las infinitas soluciones, en la gráfica, mediante el rol del parámetro como una variable activa.
4	Identifica la *reducción del tamaño del SEL* por medio del parámetro, además, de una ventaja para poder trabajar con rectas en lugar de planos.	Detecta la *variabilidad del parámetro asociado al control* de las soluciones en la gráfica. La *reducción del tamaño del SEL*, la pone en un terreno conocido y cómodo, en donde puede controlar y encontrar soluciones

Cuadro 5 – Análisis sobre representación gráfica simultánea de los profesores 1, 2 y 4
Fuente: elaboración propia

En los casos antes comentados se aprecia que la modificación del tamaño del sistema se logra por virtud del parámetro y la representación gráfica fue un aval de este proceso. Las opiniones de los profesores van desde, asociarlo a una evidencia gráfica, hasta considerarlo como la evidencia de una relación entre los resultados de los sistemas *I* y *J,* con base en la variación.

3. Solución e interpretación de problemas contextuales

Para la selección de los diálogos, respecto a la solución e interpretación de problemas contextuales, consideramos que los indicadores relevantes son:

1. Interpretación de las infinitas soluciones en los problemas contextuales.
2. Aceptación e interpretación de las soluciones válidas.

Presentamos los diálogos respectivos enseguida, así como las preguntas y comentarios que propiciaron la reflexión:

129. Investigador: Si te das cuenta aquí tiene sentido por qué no tomar las negativas.
130. Profesora 1: Si, por que no puedes tener cantidades negativas de gramos, no es posible.
165. Profesora 1: Pues, ya me aclaraste dudas, y tal vez me faltaba eso último, de que tenía que ser en un problema dado, para que tuviera más sentido, ¿verdad? Para mí, porque así a primera instancia, pues son infinitas soluciones y pues puedo utilizar todas, y ya con ese problema, son todas la positivas, ya vemos en qué intervalo, porque también hasta que yo vi las gráficas que me enseñaste, vi que fijando lambda igual a 15, y se volvía negativa. Y pues, está muy bien, le entendí muy bien a todo lo que explicaste, las gráficas y lo algebraico (Entrevista No.1 Profesora 1, 2021).

103. Profesor 2: ¿Pero eso se establece dependiendo del contexto?, dependiendo de qué es lo que estás trabajando, creo que esto está muy bien.
104. Profesor 2: Porque ya al momento de definir qué valores puede tomar lambda o en este caso z pues ahí sí ya se puede establecer como que una lógica, ¿no? De los valores que puede tomar, pues para no ir en contra del contexto del problema […] pues lambda puede irse por todos lados [*variable activa*]*, él puede tomar cualquier valor que él quiera, pero ya cuando*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

estamos hablando de un contexto en particular, ¡ahí sí!, ahí ya se establecerían ciertos límites en los cuales lambda pueda tomar valores.
170 Investigador: Y, dime ¿llevarías a tus clases, esta propuesta, con tus alumnos?
171. Profesor2: ¡Claro!, sí, o sea yo creo que sí es importante llevar esta parte a las clases, pero como te digo no solamente darles la parte algebraica sino con estas situaciones que estás presentando, creo que la verdadera forma de poder hacer esto o de poder llevar a las clases de que tenga algún sentido para el alumno, es que veamos la parte de la herramienta que tú les estás proporcionando [parámetro de naturaleza dual] y las situaciones, ver que hay situaciones en la vida cotidiana o reales por así decirlo de alguna manera, verdad, que pues hacen que se utilicen este tipo de soluciones [infinitas] (Entrevista No.2 Profesor 2, 2021).

145. Investigador: ¿Te queda más claro, crees que tenga más sentido cuando se trabaja con problemas contextualizados?
146. Profesora 4: Sí, yo creo que el abordar lo que son las matemáticas, siempre es un poquito más… hay un aprendizaje más significativo cuando es más contextualizado a la vida real.
159.Investigador: ¿Te quedó clara la idea de variable de control [herramienta de control]*?*
160.Profesora 4: Sí, o sea tú lo puedes mover de acuerdo con lo que se indique en el problema y es la que te va a permitir obtener los valores de x y y al sustituir lambda por una variable, prácticamente.
178. Investigador: Y, dime, ¿qué te parece la idea del parámetro de naturaleza dual?
179. Profesora 4: ¡No, pues super bien!, bueno… y ya tú decides cuál del 0-13… puede ser 7, 8 o 10 ¿verdad? Tu variable de control [herramienta de control] *ya depende del problema, y pues está súper bien, o sea si lo manejas abiertamente pues tienes muchos valores, muchos puntos de intersección, pero si lo estableces solamente a un valor, ejemplo a 13 como dijimos, pues ahora sí que nada más va a ser esta variable [inactiva].* (Entrevista No.4 Profesora 4, 2021).

De lo anterior y considerando los indicadores antes mencionados, destacamos los siguientes elementos mediante un análisis de contenido cualitativo (Cuadro 6).

Profesor	Interpretación de las infinitas soluciones en los problemas contextuales	Aceptación e interpretación de las soluciones válidas
1	Estos le permiten *organizar* los artefactos anteriores y dar *sentido* a las infinitas soluciones.	Reconoce la *posibilidad de poder manipular, acotar y elegir* soluciones particulares, en un conjunto de infinitas soluciones. Identifica un *intervalo de soluciones válidas*, asociado a las condiciones específicas del problema.
2	Dan un sentido lógico al uso del parámetro, de forma que *no se contradiga* la realidad de los contextos. Además, identifica la utilidad de las infinitas soluciones.	*Reconoce la lógica* del caso de las infinitas soluciones, asociadas a una situación en un contexto realista. Identifica la *posibilidad de manipular, acotar y elegir* soluciones particulares en un conjunto de infinitas soluciones.
4	Afirma que para que un *aprendizaje sea más significativo,* estos problemas son adecuados.	Identifica cierta *particularidad en las soluciones* de un problema contextual, pero no la validez de estas.

Cuadro 6 – Análisis sobre problemas contextuales de los profesores 1, 2 y 4
Fuente: elaboración propia

En los casos anteriores, encontramos un aprecio por el uso de los problemas en contexto, lo que aporta la sensación de certidumbre respecto al procedimiento. Las opiniones van desde la adquisición de un aval confiable y que da sentido a la propuesta, hasta la idea que ésta permite la adquisición de sentido para la existencia y cálculo de las infinitas soluciones.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

A continuación, se hace un análisis de los *procesos de objetivación* de cada profesor.

5.2.2 Análisis de Procesos de Objetivación

Los *procesos de objetivación* desarrollados por cada profesor, respecto a los aspectos anteriormente mencionados, se mostraron, en líneas generales, se establecen en los párrafos siguientes.

La profesora 1 considera al parámetro como una variable especial. En un primer momento, detecta esta diferencia en el cambio textual de las literales, esto es, en el cambio de signos de x por λ, pero, luego logra detectarla a través del uso de la naturaleza dual. Se percata del cambio en las representaciones gráficas y dinámicas y las considera como un aval para la propuesta. Por último, esta profesora encontró que los problemas contextuales coordinan los artefactos planteados, de tal forma que se dan sentido a las infinitas soluciones, asociados a un proceso que le ayuda a tener control de las soluciones e identificar un intervalo de soluciones válidas en donde el aspecto relevante es la transformación de la variable en parámetro.

El desarrollo de los momentos de *práctica reflexiva* de la profesora 1 se apoyaron en la *mediación semiótica* de los procedimientos, que iban desde reconocer un cambio en la naturaleza de la variable a la de un parámetro, lo que permitió reducir el tamaño del SEL, hasta obtener un intervalo acotado de infinitas soluciones y de ellas las que son válidas que resolvieron el problema contextual.

El profesor 2 se percata de la naturaleza dual del parámetro, sin embargo, considera el papel de variable activa o inactiva dependiendo de la necesidad operativa, y aún más, detecta la variabilidad de este, además de la relación de cambio entre los elementos de los conjuntos solución. También, interpreta las representaciones gráficas como una proyección del espacio tridimensional en el plano cartesiano y accede al control de las infinitas soluciones incluyendo un parámetro, de modo que reconoce en esta aproximación un método que va más allá de un procedimiento. Por último, el problema en contexto le permitió aterrizar la situación a la que hacen referencia las infinitas soluciones.

Los momentos de *mediación semiótica* en este profesor incluyen tanto a los procedimientos como a las relaciones de variabilidad, por lo que los momentos de *práctica reflexiva* del profesor 2 estuvieron relacionados con aspectos lógicos y transformacionales; para este profesor, los problemas contextuales evidenciaron la posibilidad del control de las soluciones, que fue establecido por el parámetro y su naturaleza dual.

La profesora 4 acepta la naturaleza dual del parámetro. Sumado a lo anterior, la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

reducción del tamaño del sistema y el tratamiento gráfico coloca a la profesora en un terreno conocido, por lo que da gran importancia a los procedimientos. Así mismo, detecta la variabilidad del parámetro sobre la gráfica y la relación de cambio entre los conjuntos solución. Mientras que opina que los problemas contextuales son un recurso para un aprendizaje *más significativo*, lo que puede estar relacionado con pensar en la actividad ligada a su labor docente, no obstante, este tratamiento no parece enriquecer el significado del parámetro más allá de la definición, sino sólo como una herramienta para resolver sistemas con infinitas soluciones, a la par de los otros métodos de solución.

En fin, la *mediación semiótica* desarrollada por la profesora 4 se centró en un proceso que permitía abordar las infinitas soluciones, así como en el método que le permitió resolver y tener control sobre ellas por virtud del parámetro, de igual manera, esto sucedió con los problemas en contexto, por lo que sus momentos de *práctica reflexiva* propiciaron la certeza sobre que el procedimiento sirve para obtener soluciones.

A continuación, planteamos una reflexión sobre los aspectos más relevantes proporcionados en esta investigación.

6 Reflexiones Finales

En esta investigación hemos presentado un acercamiento a la enseñanza y el uso del concepto de parámetro enfatizando su naturaleza dual, como una *variable activa* e *inactiva,* y que puede funcionar como una herramienta de control para abordar el caso de un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones.

Cuando en clase son detectadas las infinitas soluciones de un SEL el problema no se resuelve. Nuestro objetivo fue mostrar a los profesores que una cantidad infinita de soluciones no hace que el sistema sea inmanejable, para lo cual propusimos no sólo una forma para proceder con el parámetro y resolver esos sistemas, sino que proporcionamos significados de tipo gráfico y contextual que facilitaron su uso, para que, eventualmente, puedan llevarlos a sus salones de clase.

Los resultados mostraron que esta propuesta de actualización es pertinente, porque al final del proceso, los profesores se enfrentaron con éxito a la obtención y manejo de infinitas soluciones, adquiriendo los procedimientos propuestos, así como la obtención de los significados asociados; éxito que tuvo efectos distintos debido a los intereses y antecedentes de cada uno de ellos. Esto derivó en distintos *procesos de objetivación*, pero que, a final de cuentas, implicó una actualización de sus saberes.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

Hemos mostrado que esta propuesta aporta una definición matemática adecuada y útil, desde un punto de vista didáctico, para dar sentido y significado a los parámetros. Así mismo, el parámetro planteado como una variable de naturaleza dual puede ser base para calcular y manejar las infinitas soluciones, aspecto que no se trata ni en los libros de texto, ni en la práctica docente (en muchos casos). Además, se contribuye a que la idea de infinito, como algo inaccesible, sea transformada y ampliada por la de una expresión algebraica calculable.

Adicionalmente, esta investigación también muestra que proponer al parámetro como variable de naturaleza dual, bajo las condiciones de el *Teorema de la Función implícita,* puede ser un recurso didácticamente valioso para ser considerado en la práctica docente.

Finalmente, consideramos que esta investigación aporta resultados que sugieren la pertinencia del uso de los parámetros en el Álgebra lineal, así mismo, se amplía el conocimiento en la investigación sobre los saberes matemáticos del profesor en torno a los parámetros y sobre sus concepciones de las infinitas soluciones. También, proporciona una herramienta que permite tener el control de un conjunto infinito de soluciones, además de ampliar las estrategias para dar solución a un SEL. Por último, nuestra propuesta contribuye a despejar la incertidumbre que presentan las infinitas soluciones, así como a la idea de la validez de éstas mediante la introducción de la categoría de solución válida.

Referencias

BLOEDY-VINNER, H. An algebraic mode of thinking - the case of parameter. *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 18., 1994, Lisbon. **Procedings…** Lisbon: International Group for the Psychology of Mathematics Education/ Lisbon University, 1994. v. 2, p. 88-95. Notes: DA PONTE, J. P.; MATOS, J. F. (eds). Disponible en: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED383537.pdf. Acceso en: 17 mayo 2023.

BOALER, J. The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do they Make Mathematics More Real? **For the learning of mathematics**, Montreal, v. 13, n.2, p. 12-17, 1993.

BREDA, A.; PINO-FAN, L.; FONT, V. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflections and assessment on teaching practice. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, Eastbourne, v. 13, n. 6, p. 1893-1918, jun. 2017.

CASTILLO, A.; JIMÉNEZ, J.; HUGUES, E.; DÓRAME, L. Un Proceso de Actualización Integral de Profesores de Matemáticas en el Uso Didáctico de los Sistemas de Cómputo Simbólico: Resultados Preliminares y Reflexiones. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, México DF, México, v.18, n.1, p. 711-715, 2005.

CHAPMAN, O. Classroom practices for context of mathematics word problems. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 62, n.2, p. 211-230, 2006.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. Interviews. *In:* COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. (eds). **Research Methods in Education**. Routledge: Taylor & Francis Group, 2018. p. 506-541.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

COURANT, R. (ed.) *Developments and aplications of the differential calculus*. **Differential and Integral Calculus.** New York: Interscience Publishers,1950. p. 111-132. (Vol. 2).

DRIJVERS, P. The concept of parameter in a computer algebra environment. *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings…** Utrecht: Freudenthal Institute, 2001. v. 2, p. 385-392. Notes: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (ed). Disponible en: https://www.worldcat.org/es/title/156911324

EVEN, R.; BALL, D. (eds.). **The professional education and development of teachers of mathematics.** New York: Springer, 2009.

FREUDENTHAL, H. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 16, n.1, p.461-491;1983.

FURINGHETTI, F.; PAOLA, D. Parameters, unknowns and variables: a little difference? *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 18., 1994, Lisbon. **Procedings…** Lisbon: International Group for the Psychology of Mathematics Education/ Lisbon University, 1994. v. 2, p. 368-375. Notes: DA PONTE, J. P.; MATOS, J. F. (eds). Disponible en: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED383537.pdf. Acceso en: 17 mayo 2023.

GOLDIN, G. A scientific perspective on structures, task-based interviews in mathematics education research. In: LESH, R.; KELLY A. E. (eds). **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 517-545.

GREER, B. Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. **Learning and instruction**, Belfast, U.K, v. 7, n. 4, p. 293-307, 1997.

HERNANDEZ, L.; ACUÑA-SOTO, C. The parameter in textbooks a documental analysis. *In:* ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 43., 2021, Philadelphia. **Proceedings…** Philadelphia, PA, 2021. v.1, p.465-472. Notes: OLANOFF, D., JOHNSON, K., & SPITZER, S.(eds).

HEWSON, C. Qualitative Approaches in Internet-Mediated Research: Opportunities, Issues, Possibilities. In: LEAVY, P. (ed.). **The Oxford handbook of qualitative research.** New York, USA:Oxford University Press, 2014. p. 423-451.

KOZULIN, A. **Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva sociocultural**. Barcelona: Paidós, 2000.

KUCKARTZ, U. **Qualitative text analysis.** Thousand Oaks: Sage, 2014.

LLINARES, S. Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. **Sisyphus-Journal of Education**, Lisbon, v. 1, n. 3, p. 76-93, 2013.

MAHER, C.A., SIGLEY R. Task-Based Interviews in Mathematics Education. *In*: LERMAN S. (eds). **Encyclopedia of Mathematics Education**. Dordrecht: Springer, 2020. p.821-824.

COMISIÓN NACIONAL PARA LA MEJORA CONTINUA DE LA EDUCACIÓN - MEJOREDU. **Modelo interno para la formulación de lineamientos y criterios para la mejora de la formación continua y desarrollo profesional de docentes.** Educación básica y media superior. Ciudad de México, México: Secretaría de Educación Pública, 2022.

OKTAÇ, A. Conceptions About System of Linear Equations and Solution. *In:* STEWART, S.; ANDREWS-LARSON, C.; BERMAN A.; ZANDIEH, M. (eds). **Challenges and Strategies in**

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a23

Teaching Linear Algebra. ICME-13 Monographs. Hamburg: Springer, 2018. p. 71-101.

PONTE, J. P. Investigating mathematics and learning to teach mathematics. *In:* LIN, F. L.; COONEY, T. J. (eds.). **Making sense of mathematics teacher education**. Dordrecht: Springer, 2001. p. 53-72.

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México DF, v.1, n.Esp, p.103-129, 2006.

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Research in Mathematics Education,** London, v. 12, n.1, p. 1-19, 2010a.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA***,* Granada, v. 4. n. 2, p. 37-62, 2010b.

RADFORD, L.; ROTH, W. M. Intercorporeality and Ethical Commitment: An Activity Perspective on Classroom Interaction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 77, n.2, p. 227-245, 2011.

RADFORD, L. Methodological aspects of the theory of objectification. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 8, n.18, p.547-567, 2015.

RADFORD, L**.** Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. *In*: D´AMORE, B; RADFORD, L. (eds). **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos**. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017. p. 115-136.

RADFORD, L. A journey through the theory of objectification. *In:* TAKECO-GOBARA, S.; RADFORD, L. (eds.). **Teoria da Objetivação:** Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 15-42.

SILVERMAN, J.; THOMPSON, P. Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. **Journal of mathematics teacher education,** Dordrecht, v. 11, n. 6, p. 499-511, Nov. 2008.

TRIGUEROS, M.; OKTAÇ, A.; MANZANERO, L. Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. *In*: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 5. 2007, Lárnaca. **Proceedings…** Lárnaca: Universit of Cyprus, 2007. p. 2359-2368. Notes: PITTA-PANTAZI, D.; Philippou, G. (ed.).

URSINI, S.; TRIGUEROS, M. How Do High School Students Interpret Parameters in Algebra? *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen. **Proceedings…** Bergen: Bergen University College, 2004. v. 4, p. 361-368. Notes: HØINES, M. J.; FUGLESTAD, A. (eds.).

VERSCHAFFEL, L. Taking the modeling perspective seriously at the elementary level: Promises and pitfalls. *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26., 2002, Norwich. **Proceedings…**
Norwich: University of East Anglia, 2002. v. 1, p. 64-80. Notes: COCKBURN, A.D.; NARDI, E. (eds.).

Submetido em 15 de Fevereiro de 2022.
Aprovado em 16 de Dezembro de 2022.