

Densidade de Carga Elétrica num Condutor Retilíneo Finito

(Electrical Charge density in finite rectilinear conductor)

Renê Robert

Departamento de Eletricidade da UFPR, CP 19047, Curitiba, Pr, 81531-990

Recebido em 15 de Outubro, 2003. Aceito em 28 de Novembro, 2003.

Mostram-se dois métodos numéricos para o cálculo da distribuição de carga elétrica num condutor filiforme de comprimento finito e pequeno diâmetro. Os resultados numéricos são comparados com uma solução analítica aproximada mostrando boa concordância de resultados.

Two numerical methods for the calculation of electrical charge distribution on a finite linear wire of small diameter are shown. The obtained results are compared with an approximated analytical solution showing good results.

1 Introdução

Nos últimos anos tem-se discutido bastante o problema da distribuição de carga em um fio condutor retilíneo de comprimento finito, mantido a um potencial $\phi_0^{[1,2,3,4]}$, sendo que nenhum aborda o problema fazendo uso de técnicas numéricas. Do ponto de vista histórico este problema é bastante antigo^[5], pois foi resolvido analiticamente, de forma aproximada, em 1878 por J. C. Maxwell, sendo provavelmente um de seus últimos trabalhos de pesquisa em eletricidade e magnetismo^[6].

A maioria dos problemas de cálculo de campos elétricos e magnéticos apresentam soluções analíticas somente quando a geometria é extremamente simples. Nos problemas práticos esta geometria simples não existe e as dificuldades para obter soluções analíticas são insuperáveis. No passado, do ponto de vista técnico, este problema foi contornado em parte com o uso de técnicas experimentais ou gráficas. Atualmente lança-se mão de técnicas numéricas, pois essas são em geral as únicas possíveis^[7]. Observa-se há algum tempo uma tendência em apresentar as técnicas numéricas para o cálculo de campos em livros de texto de eletromagnetismo o que é desejável para que os estudantes se tornem familiarizados com os diversos procedimentos.

Nosso objetivo é mostrar como obter a solução do problema da distribuição de cargas num fio retilíneo, finito e mantido a um potencial fixo utilizando duas técnicas numéricas simples: método de simulação de cargas e método dos momentos, e em seguida os resultados obtidos são comparados com aqueles calculados analiticamente. Estas técnicas podem ser usadas para resolver outros problemas simples, tais como a distribuição de carga em placas com formato retangular ou circular.

2 Método de simulação de carga

O princípio básico do método de simulação de carga (CSM) é muito simples^[8]. Considere um condutor mantido a

um potencial ϕ_0 dentro do vácuo. A região de interesse é externa ao condutor. Sejam n cargas pontuais Q_j , $\{j = 1, 2, 3, \dots, n\}$ localizadas próximas à superfície do condutor, na região interna do mesmo e posicionadas pelo vetor \vec{r}_j . Este processo é em geral chamado de discretização do problema. O potencial elétrico num ponto P externo ao condutor posicionado pelo vetor \vec{r}_i , é dado pela equação

$$\phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j, \quad (1)$$

em que $p_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$. Quando coloca-se o ponto definido pelo vetor \vec{r}_i sobre m pontos no contorno do condutor, a equação (1) pode ser escrita como

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (2)$$

A equação (2) forma um sistema de m equações lineares com n incógnitas. Para nosso problema basta fazer $m = n$ e o método é então chamado de método de simulação de carga convencional. A equação (2), quando escrita sob forma matricial, toma a forma

$$[\phi_i] = [p_{ij}] [Q_j]. \quad (3)$$

Em geral, com este método pode-se chegar a erros da ordem de 0,001% para valores grandes de n . Contudo, em pontas, cantos e eletrodos muito finos esta precisão dificilmente é alcançada.

Considere um condutor retilíneo de comprimento $2c$ e raio a , sendo $a \ll c$, mantido a um potencial constante ϕ_0 , conforme mostra a figura 1. Dividamos o comprimento $2c$ sobre o eixo oz em $n - 1$ partes iguais e coloquemos cargas pontuais Q_j em cada um dos n pontos. Analogamente dividamos a superfície do fio em $n - 1$ partes iguais cujos pontos batiza-se pela letra i . O elemento de matriz p_{ij} pode ser escrito como

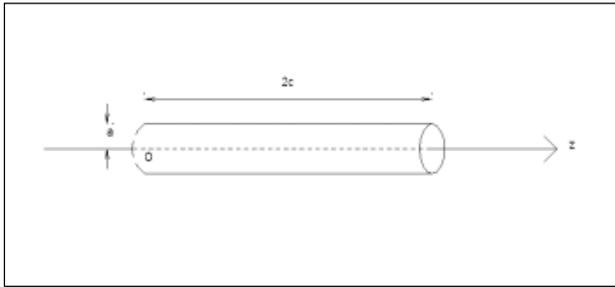


Figura 1. Cilindro condutor de raio a e comprimento $2c$ cujo eixo coincide com o eixo cartesiano Oz .

$$p_{ij} = \frac{1}{\sqrt{(i-j)^2 \Delta^2 + a^2}} \quad (4)$$

em que $\Delta = \frac{2c}{n-1}$ é a distância entre duas cargas consecutivas.

Como exemplo numérico façamos: $c = 0,5\text{m}$, $a = 0,001\text{m}$, $\phi_0 = 1\text{V}$, $4\pi\epsilon_0 = 111,2626\text{pF/m}$ e $n = 1000$. Utilizando o software Mathematica®, o cálculo numérico das cargas Q_j fica simples e rápido. A figura 2 mostra o resultado obtido, em que a densidade linear de carga vale $\lambda_j = \frac{Q_j}{\Delta}$.

3 Método dos momentos

O método dos momentos (MM) é conceitualmente simples e muito usado em engenharia^[9]. Para a finalidade deste trabalho vamos usar um caminho mais simples e adequado ao nível de graduação^[10]. O potencial elétrico gerado por uma distribuição de cargas linear num ponto \vec{r} é dado pela equação:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{wire}} \frac{\lambda(z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz', \quad (5)$$

em que $\delta = \frac{2a}{\Delta}$.

Fazendo como antes, $c = 0,5\text{m}$, $a = 0,001\text{m}$, $\phi_0 = 1\text{V}$, $\Delta \cong 0,001\text{m}$, $4\pi\epsilon_0 = 111,2626\text{pF/m}$, $n = 1000$ e usando o Mathematica® para o cálculo da equação (7), isto é, do sistema de n equações lineares com n incógnitas obtém-se o resultado espelhado na figura 3.

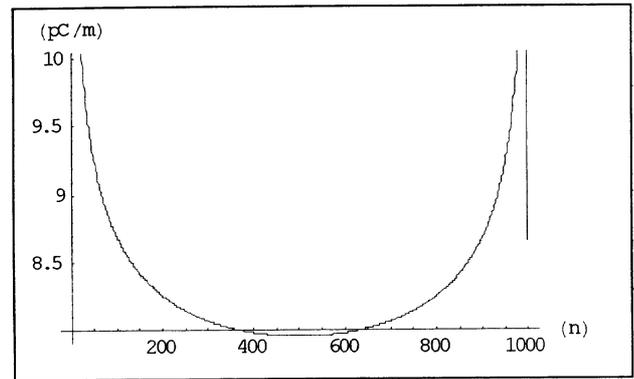


Figura 2. Distribuição linear de cargas no fio da figura 1 usando o método de simulação de cargas (CSM). Os parâmetros de cálculo usados foram: $c = 0,5\text{m}$, $a = 0,001\text{m}$, $\phi_0 = 1\text{V}$, $n = 1000$. As linhas verticais que aparecem em torno de $n = 0$ e $n = 1000$ são aqui mostradas com o intuito de chamar atenção do leitor para a não confiabilidade dos resultados nestes pontos.

em que $\lambda(z')$ é a densidade de carga linear sobre o fio da figura 1, localizada pelo vetor \vec{r}' . Quando conhecemos o potencial $\phi(\vec{r})$ e desconhecemos $\lambda(z')$ a equação (5) constitui uma equação integral de Fredholm de 1ª espécie. Para resolver numericamente esta equação integral, dividamos o fio em $n - 1$ partes de comprimento $\Delta = \frac{2c}{n-1}$ e chamemos de λ_j a densidade linear de carga de cada parte. A equação (5) pode ser escrita para pontos sobre a superfície do fio como:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \lambda_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{dz'}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}}. \quad (6)$$

Dividindo a superfície do fio em n partes tal que $z = \frac{\Delta}{2} + (i - 1)\Delta$ $i = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ a equação (6) pode ser escrita como:

$$4\pi\epsilon_0\phi_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \log \left| \frac{2(i-j) + 1 + \sqrt{\delta^2 + (2(i-j) + 1)^2}}{2(i-j) - 1 + \sqrt{\delta^2 + (2(i-j) - 1)^2}} \right|, \quad (7)$$

4 Comparação entre os resultados numéricos e analítico

Em artigo recente, J.D. Jackson^[4,5] deduziu uma equação aproximada que permite calcular a densidade de carga em um fio retilíneo de comprimento $2c$ e seção transversal circular de raio a . Esta equação até a ordem de $O(\frac{1}{\Lambda^3})$ é dada por

$$\lambda(z) = \lambda_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\Lambda} \ln(1 - \xi^2) + \frac{1}{\Lambda^2} \left[(\ln(1 - \xi^2))^2 + \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right) \right)^2 - \frac{\pi^2}{6} \right] \right\}, \quad (8)$$

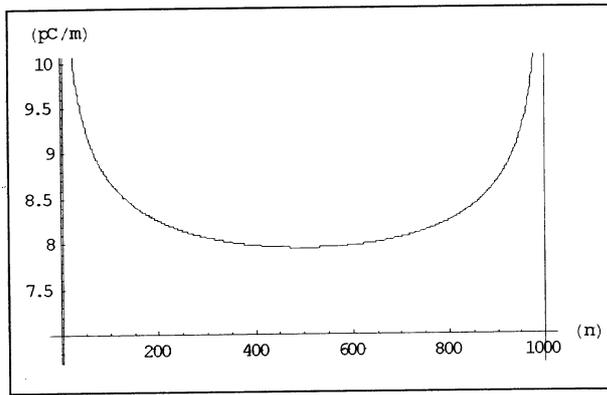


Figura 3. Distribuição linear de cargas no fio da figura 1 usando o método dos momentos (MM). Os parâmetros de cálculo usados foram: $c = 0,5\text{m}$, $a = 0,001\text{m}$, $\phi_0 = 1\text{V}$, $n = 1000$. As linhas verticais que aparecem em torno de $n = 0$ e $n = 1000$ são aqui mostradas com o intuito de chamar atenção do leitor para a não confiabilidade dos resultados nestes pontos.

em que $\Lambda = 2 \ln\left(\frac{2c}{a}\right)$, $\xi = \frac{z}{c}$ e $\lambda_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\phi_0}{\Lambda}$. Quando o fio for mantido a um potencial $\phi_0 = 1\text{V}$, $\lambda_0 = 8,0533\text{pC/m}$ para o fio acima especificado.

Na figura 4 mostram-se os resultados obtidos com os métodos CSM, MM e a expressão analítica fornecido pela equação (8). Os cálculos são executados no intervalo do comprimento do condutor $[-0,45\text{m}, 0,45\text{m}]$. A maior diferença entre os resultados numéricos é de 0,2% e entre os resultados analítico e numéricos é de 0,4%. A figura 5 mostra que a diminuição do raio a do fio diminui o valor da densidade de carga e esta torna-se mais uniforme^[1,4], sendo os resultados numéricos e analíticos compatíveis entre si. É importante frisar que os cálculos numéricos não fornecem bons resultados nos extremos do fio.

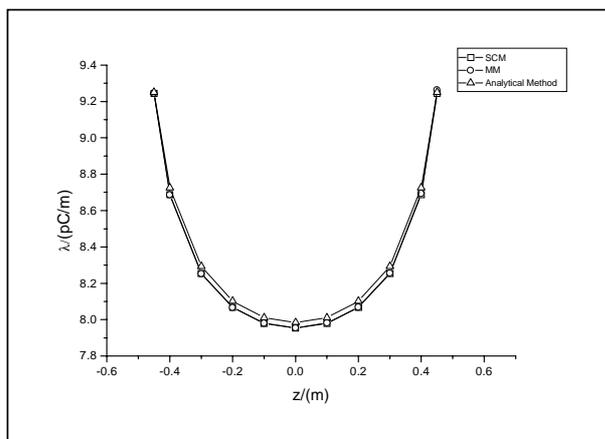


Figura 4. Comparação entre os métodos numéricos CSM, MM e analítico, usando como parâmetros $c = 0,5\text{m}$, $a = 0,001\text{m}$, $\phi_0 = 1\text{V}$ e $n = 1000$ $z \in [-0,45 - 0,45]\text{m}$.

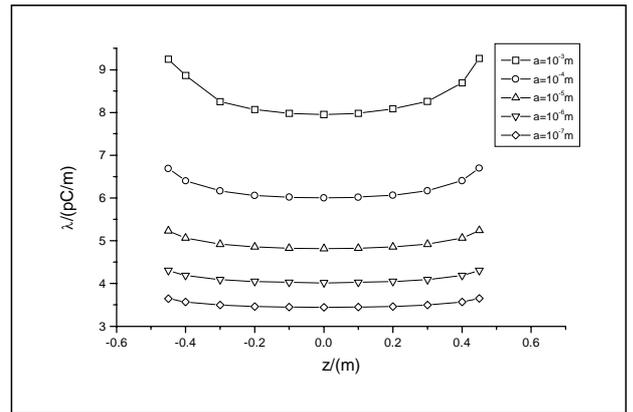


Figura 5. Comportamento da densidade linear de cargas quando a relação $a/c \rightarrow 0$, resultado este compatível com o de outros autores^[1,4]. Os cálculos foram efetuados para $z \in [-0,495 - 0,495]\text{m}$ usando-se o método MM.

Uma informação adicional a se obter do cálculo numérico é a capacitância do fio. Usando o método SCM obtém-se para a capacitância do fio acima especificado o valor. $C = 8,499\text{pF}$, quando $n = 1000$. A fórmula do artigo de J.D. Jackson^[4] fornece o valor, $C = 8,457\text{pF}$ correspondendo portanto a uma diferença de 0,5%. O leitor interessado pode consultar outras referências^[11-14] para o cálculo da distribuição de cargas em um fio mantido a potencial constante.

5 Conclusão

Uma grande quantidade de problemas práticos em eletrostática e na aproximação quase-estática, não envolvem a determinação de potenciais de uma dada distribuição de cargas, mas requerem que seja encontrado a distribuição de cargas que corresponde a alguns conjuntos de potenciais dados. O primeiro problema não é de todo fácil, pois, mesmo nos casos em que a distribuição das cargas pode ser descrita com simplicidade razoável, a avaliação da integral para o cálculo do campo pode ser difícil. Por outro lado, o problema inverso é de solução muito mais difícil, e soluções analíticas de fato somente existem para um número limitado de casos. Muitos problemas reais só podem ser tratados com sucesso por técnicas numéricas.

Referências

- [1] D. J. GRIFFITHS and Y. LI, Charge Density on a Conducting Needle, Am. J. Phys. 64(6), June 1996. p. 706-714.
- [2] R. H. GOOD, Comment on "Charge Density on a Conducting Needle", Am. J. Phys. 65(2), February 1997, p.155-156.
- [3] M. ANDREWS, Equilibrium Charge Density on Conducting Needle, Am. J. Phys. 65(9), September 1997, p.846-850.
- [4] J. D. JACKSON, Charge Density on Thin Straight Wire, Revisited, Am. J. Phys. 68(9), September 2000, p. 789-799.
- [5] J. D. JACKSON, Charge Density on a Thin Straight wire: The First Visit, Am. J. Phys. 70(4), April 2002, p.409-410.

- [6] J. C. MAXWELL, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Edited by W. D. Nivens, 2 vols. Bound as one, Dover Pub. Inc., N.Y. p.672-680.
- [7] K. J. BINNS, P. J. LAWRENSON and C. W. TROBRIDGE, *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Field*, John Willey & Sons, Baffins Lane, 1992.
- [8] N. H. MALIK, A Review of the Charge Simulation Method and its Application, IEEE Transactions on Electric Insulation, vol.24 n.1 February 1989, p.3-20.
- [9] R. HARRINGTON, Matrix Methods for Field Problems, Proceedings of the IEEE, vol.55, n.2, February 1967, p.136-149.
- [10] L. L. TSAI and C.E SMITH, Moment Methods in Electromagnetics for Undergraduates, IEEE Transactions on Education, vol.21, n.1, February 1978, p.14-22.
- [11] P. SILVESTER, *Modern Electromagnetic Field*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968, p.90-93.
- [12] J. R REITZ, F. J. MILFORD and R.W. CHRISTY, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison Wesley Publishing Co., Reading Massachusetts, 1993, p.84-89.
- [13] N. N. O. SADIKU, *Electromagnetics*, Oxford University Press, N.Y., 1995, p.721-733.
- [14] S. RATNAJEEVAN, H. HOOLE, P. RATNAMAHILAN and P. HOOLE, *Engineering Electromagnetics*, Oxford University Press, N.Y., 1996, p.176-179.