

Desenvolvimento de um aparato experimental de baixo custo para o estudo de objetos em queda: análise do movimento de magnetos em tubos verticalmente orientados

Development of a low cost experimental apparatus for the falling objects study: analysis of the magnets movement in vertically oriented pipes

Romeu M. Szmoski*¹, Adriano Doff¹, Vinícius M. Lenart², Samuel K. Schwiderke³, Luis V. G. Fachini⁴

¹Departamento Acadêmico de Física. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, PR, Brasil

²Departamento de Física. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, Brasil

³Departamento Acadêmico de Eletrônica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, PR, Brasil

⁴Departamento Acadêmico de Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, PR, Brasil

Recebido em 17 de Fevereiro de 2017. Revisado em 17 de Julho de 2017. Aceito em 20 de Julho de 2017

O movimento descrito por magnetos em queda dentro de tubos é um fenômeno com grande potencial didático para explorar leis físicas importantes como a da queda dos corpos exposta por Galileu e a da indução atribuída à Faraday e Lenz. Enquanto o magneto descreve um movimento acelerado em tubos não-metálicos, se os tubos são paramagnéticos ou diamagnéticos o movimento é apenas inicialmente acelerado, porém rapidamente torna-se uniforme devido à ação de uma força resistiva. Neste trabalho propomos um aparato experimental de baixo custo para estudar estes comportamentos de modo quantitativo e, não apenas qualitativamente, como é feito em muitos laboratórios didáticos de física. O aparato dispõe de um sensor ultrassônico, acoplado ao microcontrolador Arduino, que possibilita acompanhar o deslocamento do magneto em intervalos curtos de tempo e, com estes valores, obter sua velocidade e/ou aceleração. Para testar a eficácia do aparato analisamos a queda de um ímã dentro de tubos metálicos e não-metálicos e os resultados obtidos mostraram boa concordância com os previstos teoricamente. Além disso, ao compararmos duas abordagens teóricas distintas para a determinação da velocidade terminal do ímã em tubos metálicos, verificamos que uma delas resulta em um valor duas vezes maior e, portanto, um fator multiplicativo deve ser inserido para que os resultados tornem-se coerentes.

Palavras-chave: Instrumentação, ímã de neodímio, velocidade terminal, sensor ultrassônico, Arduino.

The movement exhibited by falling magnets inside pipes is a phenomenon of great potential to explore important physical laws such as the falling bodies of Galileo and Faraday-Lenz ones. While the magnet describes an accelerate movement in non-metallic pipes, in non-ferromagnetic metallic pipes it quickly becomes uniform due to a resistive force acting. In this work we propose a low cost experimental apparatus to thoroughly study both behaviors. An ultrasonic sensor is coupled to the Arduino microcontroller to monitor the magnet displacement in short time intervals and, thereafter, the speed and acceleration are determined. To verify the proposed apparatus, we investigate the magnet motion in metal and non-metallic pipes and we obtained consistent results with the underlying theory, which suggests an efficacy of the apparatus. In addition, when we compare two different theoretical approaches, we verify it is necessary to introduce a multiplicative factor in one of them so that the results become coherent.

Keywords: Instrumentation, neodymium's magnet, terminal velocity, ultrasonic sensor, Arduino.

1. Introdução

O movimento descrito por objetos abandonados e/ou arremessados próximos à superfície da Terra é um fenômeno que, desde a antiguidade, têm despertado interesse de investigação. Baseado na teoria dos quatro elementos, Aristóteles acreditava que quanto mais pesado fosse um corpo, mais rápido ele atingiria o chão. Apenas séculos mais tarde Galileu Galilei [1] demonstrou que todos os cor-

pos deveriam cair ao mesmo tempo, independentemente de sua massa, na ausência de forças resistivas (resistência do ar). A lei de queda dos corpos galileiana estabelece ainda que a velocidade dos corpos cresce linearmente com o tempo de queda enquanto que o deslocamento aumenta com o quadrado do tempo. A queda de corpos desconsiderando forças resistivas é denominada queda-livre enquanto que a consideração destas forças constitui a queda-real.

*Endereço de correspondência: rmszmoski@utfpr.edu.br.

A demonstração experimental da lei de queda dos corpos geralmente é realizada, nos laboratórios didáticos de física, abandonando uma esfera de metal de uma determinada altura em uma região com sensores em posições previamente definidas e conectados a um cronômetro que registra o intervalo de tempo que o objeto passa por cada sensor. De posse destas medidas de tempo e sabendo as distâncias entre os sensores, grandezas de interesse, tal como a velocidade média do objeto em cada intervalo, podem ser determinadas. Trata-se, portanto, de um experimento bastante simples, mas que algumas vezes não é realizado devido à inexistência do equipamento adequado para este fim. Uma segunda alternativa que tem sido bastante explorada atualmente é o registro do movimento do objeto durante a queda com uma câmera fotográfica e o tratamento do vídeo através de algum software específico, como por exemplo, o Tracker [2]. Este procedimento, como o aqui proposto, permite analisar o movimento durante toda a queda e não apenas nos intervalos entre uns poucos sensores.

No tocante à queda-real ou resistiva, o tema geralmente é estudado abandonando uma esfera em um tubo transparente contendo um fluido viscoso, como a glicerina. Neste caso, a esfera em queda fica sujeita a ação da força viscosa descrita pela lei de Stokes, $F_s = -6\pi r\eta\vec{v} = -k\vec{v}$, sendo r o raio da esfera, o qual é muito menor do que o raio do tubo, e η a viscosidade do meio, a qual é influenciada fortemente pela temperatura do ambiente onde o experimento é realizado. Como na descrição anterior, intervalo de tempo e deslocamento são determinados e, como consequência, a velocidade terminal da esfera na glicerina é mensurada. Novamente, o tratamento de vídeo tem sido explorado como uma segunda opção.

Neste trabalho propomos um aparato experimental de baixo custo que permite explorar tanto as situações mencionadas bem como uma situação mais complexa que é a queda freada de magnetos em tubos metálicos não ferromagnéticos [3]. Ocorre que um ímã caindo por um tubo condutor não-ferromagnético experimenta uma força magnética resistiva para cima proporcional à sua velocidade tal como uma esfera caindo em um fluido viscoso. Consequentemente, se a distância que o objeto percorre for maior do que um determinado valor crítico, este atinge uma velocidade constante chamada velocidade terminal.

A queda de magnetos em tubos condutores tem sido objeto de estudo de vários trabalhos teóricos e experimentais [3–11]. Tal fenômeno tem sido explorado tanto para ilustrar as leis de Faraday e Lenz [4], como para propor e comparar diferentes abordagens teóricas [3, 7, 9] ou aparatos de medição [6, 8]. Portanto, embora o assunto não seja novo, ele continua despertando interesse e suscitando diferentes abordagens e técnicas experimentais para se determinar a velocidade terminal de um ou mais magnetos em que queda sob diversas circunstâncias.

Neste ponto salientamos que o aparato proposto pode ser considerado uma junção e adaptação daqueles apre-

sentados em [6] e [9]. No entanto, ele diferencia-se destes sobretudo por ser uma alternativa de baixo custo apoiada no microcontrolador Arduino [12]. Esta placa de prototipagem eletrônica foi desenvolvida originalmente na Itália, em 2005, como uma ferramenta de baixo custo para o ensino de eletrônica e programação, no entanto, por ser *open-source* e possibilitar o desenvolvimento de projetos com aquisição automática de dados, tal plataforma passou a ser utilizada nos mais variados ramos da ciência [13, 14]. Em nosso aparato, em particular, o Arduino é responsável por alimentar e controlar um sensor ultrassônico, coletar os dados deste e enviá-los ao computador através de uma conexão USB.

Para testar o aparato proposto consideramos inicialmente a queda do ímã através de um tubo não-metálico. Então, desprezando a resistência do ar, o ímã descreverá o movimento de “queda-livre”, sendo o movimento de queda-livre, na circunstância do experimento realizado, caracterizado pela aceleração constante que o ímã é submetido. Em seguida, colocamos o aparato à prova analisando o movimento do ímã em tubos condutores de alumínio e cobre. Então, variamos a massa do contrapeso fazendo com que o ímã fosse submetido à diferentes acelerações iniciais e determinamos experimentalmente a velocidade terminal do ímã em cada caso. Os valores encontrados para as velocidades terminais mostraram-se consistentes com aqueles obtidos por meio de duas abordagens teóricas distintas bem como indicaram a necessidade de inserir um fator multiplicativo em uma delas. Estas abordagens estão descritas na seção 4 e o aparato experimental e a análise newtoniana da queda nas seções 2 e 3. Já, nas seções 5 e 6, apresentamos e discutimos os resultados para as situações de queda-livre e resistiva, respectivamente. Por fim, na seção 7 apresentamos nossas conclusões.

2. O aparato experimental

O aparato proposto é composto de uma parte mecânica e outra eletrônica. A primeira delas está representada pictoricamente na Fig. 1. Como podemos ver trata-se de uma máquina de Atwood, com duas roldanas cujo atrito e momento de inércia são desprezíveis, e dois tubos por onde as massas descrevem o movimento. Optamos por utilizar duas roldanas para obter um maior espaçamento entre o ímã e os corpos usados como contrapeso uma vez que estes possuíam partes metálicas que poderiam interferir no movimento livre do ímã. Em nossos testes utilizamos como contrapeso um suporte de alumínio e arruelas facilmente encontradas em lojas de materiais de construção.

Outro cuidado tomado para minimizar as influências sobre o movimento livre do ímã foi utilizar garras não metálicas para prender os tubos na haste central bem como fixar o sensor ultrassônico na extremidade inferior do tubo por onde o contrapeso sobe (tubo da esquerda

na Fig. 1). Este tubo otimiza o funcionamento do sensor uma vez que direciona as ondas ultrassônicas emitidas (e refletidas) apenas para o objeto em estudo.

A parte eletrônica do aparato é representada na Fig. 2. O sensor ultrassônico utilizado, modelo HC-SR04, possui baixo custo e pode ser facilmente encontrado em lojas de eletrônica. Ele é composto de um emissor, que emite ondas ultrassônicas de aproximadamente 40 kHz, e um receptor, que coleta a onda refletida pelo objeto. Como a velocidade do som no ar é constante à temperatura constante, então, sabendo o intervalo de tempo entre a emissão e recepção do sinal, pode-se determinar a distância em que o objeto se encontra do sensor. Para alimentar e controlar o sensor utilizamos um Arduino modelo UNO, o qual também é responsável por registrar os dados no computador e realizar os cálculos. Conforme exibido na figura, o sensor possui quatro pinos, dois de alimentação denominados VCC e GND os quais são conectados, respectivamente, às portas ou terminais 5V e GND do Arduino, um pino TRIG e um pino Echo que conectamos nas portas digitais 5 e 4, respectivamente, porém, quaisquer outras portas digitais poderiam ser utilizadas.

Uma vez realizada as conexões conforme a Fig. 2 toda vez que um nível lógico alto (*HIGH*) é atribuído à porta digital 5 do Arduino, o *trigger* do sensor é ativado e um pulso de onda ultrassônica é emitido. Quando a onda refletida retorna ao sensor, um sinal é enviado para a porta digital 4 do Arduino que também fica em nível alto (*HIGH*). A distância entre o sensor e o objeto é obtida a

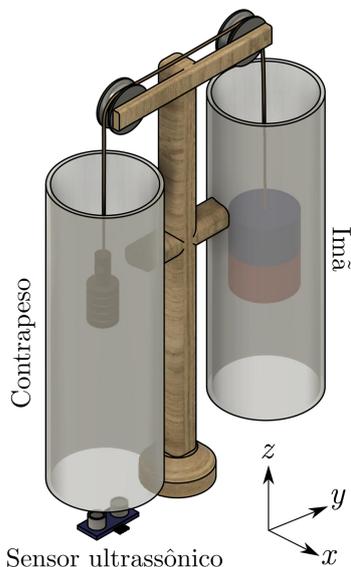


Figura 1: Representação mecânica do aparato. Um ímã de massa m_i é preso na extremidade do fio e um contrapeso de massa $m_c < m_i$ na outra extremidade. O fio passa por duas roldanas de massa e atrito desprezíveis e dois tubos são fixados na região em que as massas descrevem o movimento. Um sensor ultrassônico é colocado na extremidade inferior do tubo com o contrapeso.

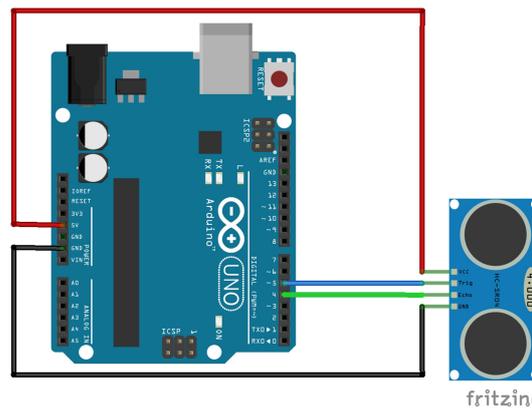


Figura 2: Ilustração da parte eletrônica do aparato. Sensor ultrassônico HC-SR04 acoplado ao Arduino Uno.

partir da seguinte equação

$$d = v\Delta t/2, \tag{1}$$

em que $v = 340 \text{ m/s}$ é a velocidade do som no ar usada como padrão pela plataforma e Δt é o intervalo de tempo entre a emissão (ativação da porta 5) e recepção (ativação da porta 4) do pulso. Repetimos o processo a cada 50 ms e salvamos os valores coletados em um documento no computador conectado ao Arduino via porta USB. Vale ressaltar aqui que o tempo mínimo entre pulso é 29 ms e o código e as bibliotecas necessárias para utilização do sensor ultrassônico com o Arduino é disponibilizado pela própria plataforma, o que permite que qualquer usuário possa utilizá-lo sem dificuldades.

3. Metodologia

O aparato proposto permite estudar o movimento de queda do ímã tanto sob ação de forças resistivas como aquele de aceleração constante simplesmente substituindo o tubo no qual o ímã se desloca (tubo da direita da Fig. 1) por tubos condutores ou isolantes, respectivamente. Mais especificamente, se o tubo for de material não metálico como o PVC, então o ímã realizará um movimento uniformemente acelerado cuja aceleração será dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_i - m_c}{m_i + m_c}g, \tag{2}$$

em que m_i é a massa do ímã, m_c a massa do contrapeso e g é o módulo da aceleração gravitacional. Integrando esta equação em relação ao tempo obtemos

$$v(t) = v_0 + \frac{m_i - m_c}{m_i + m_c}gt. \tag{3}$$

Portanto, a velocidade o ímã cresce linearmente com o tempo à medida que ele cai. No entanto, se o tubo da direita for condutor não ferromagnético, como o cobre ou o alumínio, então, o ímã experimentará uma força

para cima proporcional à sua velocidade, $F_z = kv_z$, e a aceleração tornar-se-á

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{m_i - m_c}{m_i + m_c} \right) g - \left(\frac{k}{m_i + m_c} \right) v. \quad (4)$$

Como na breve descrição apresentada na seção introdutória a respeito do movimento resistivo experimentado por uma esfera em queda em um meio viscoso, a constante k introduzida na Eq. (4), irá depender da geometria e características do meio (neste caso diâmetro do tubo, e resistividade do material). Note que, diferentemente do caso anterior, a aceleração depende da velocidade instantânea do objeto em queda. Considerando que o imã foi abandonado do repouso, $v(0) = 0$, definindo $\Delta m \equiv (m_i - m_c)$ e $M \equiv m_i + m_c$, a integral da Eq. (4) resulta em

$$v(t) = \frac{\Delta mg}{k} (1 - e^{-kt/M}). \quad (5)$$

Portanto, à medida que o imã cai o termo exponencial torna-se cada vez menor e, quando $t \gg M/k$, a velocidade adquire um valor constante denominado velocidade terminal v_T dado por

$$v_T = \frac{\Delta mg}{k} = \frac{(m_i - m_c)g}{k}. \quad (6)$$

Note que, neste caso, é a velocidade terminal e não a aceleração que varia linearmente com a diferença entre as massas, ela é menor quanto maior a massa do contrapeso e seu valor máximo é obtido quando $m_c = 0$. Definindo $\tau \equiv M/k$ e substituindo a equação (6) em (5) ficamos com

$$v(t) = \frac{dz}{dt} = v_T (1 - e^{-t/\tau}), \quad (7)$$

cujas a integração nos leva à

$$z(t) - z_0 = v_T \left(t + \tau e^{-t/\tau} - \tau \right). \quad (8)$$

Novamente, se $t \gg \tau$ então

$$z(t) - z_0 = v_T (t - \tau). \quad (9)$$

Portanto, diferentemente do que ocorre com um tubo não metálico, isto é, velocidade crescendo linearmente com o tempo, aqui, a velocidade assume rapidamente um valor constante e, conseqüentemente, o imã levará mais tempo para percorrer o tubo. Este efeito, por si só desperta a atenção dos alunos e sua explicação nos remete à duas importantes leis do eletromagnetismo, a lei de indução de Faraday e a lei de Lenz que discutiremos na seção seguinte.

4. A Lei de Faraday-Lenz e o cálculo da velocidade terminal

De acordo com a Eq. (6) a velocidade terminal do imã depende da constante k , a qual, como mencionado na

seção anterior, depende das propriedades geométricas do tubo e do imã bem como da massa e do campo magnético deste último. No entanto, para evidenciar tal dependência precisamos recorrer à lei de Faraday e de Lenz. Enquanto a primeira estabelece que a variação do fluxo magnético através de uma espira induz uma corrente sobre ela, a segunda assegura que o sentido desta corrente é tal que ela gera um campo contrário aquele que a produziu. Então, considerando o tubo como uma justaposição de espiras condutoras de raio interno a , à medida que o imã cai, surge uma corrente sobre estas espiras de tal modo que elas tendem a se comportar como imãs com pólos orientados inversamente ao imã que cai. A Fig. 3 ilustra o imã caindo pelo tubo e o sentido da corrente induzida em duas espiras igualmente espaçadas do imã. Esta corrente induzida é também chamada de corrente de Foucault em homenagem ao físico e astrônomo francês Jean Bernard Léon Foucault, que estudou esse efeito.

A magnitude da corrente induzida na espira é proporcional à força eletromotriz induzida (ε), isto é, $i = \varepsilon/R$, em que R é a resistência elétrica da espira. Mas, de acordo com a lei de Faraday-Lenz, $\varepsilon = -d\Phi_B/dt$, então podemos escrever

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (10)$$

em que $\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot \vec{s}$ é o fluxo de linhas de campo do imã sobre a área de seção transversal das espiras. Além disso, como a resistência R depende apenas de fatores geométricos (vide Fig. 3b) e da resistividade elétrica ρ intrínseca do material podemos escrever

$$i = -\frac{hw}{2\pi a \rho} \frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (11)$$

Conforme evidenciado nas equações (10) e (11) a corrente induzida depende do fluxo ou quantidade de linhas que

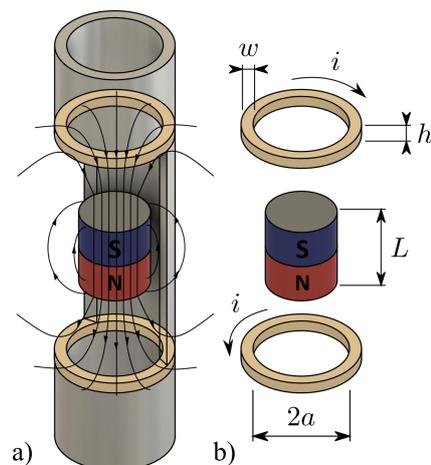


Figura 3: (a) Ilustração do imã em queda e do fluxo de linhas de campo sobre espiras a frente e atrás do imã. (b) Representação das correntes induzidas nas espiras equidistantes do imã à medida que ele cai.

atravessam cada espira que compõe o tubo por unidade de tempo. Lembrando, porém, que a densidade de linhas de campo que emanam do imã é constante, então a variação destas linhas sobre a espira dependerá sobretudo da velocidade deste em relação ao tubo. Em outras palavras, quanto maior a velocidade do imã maior será o fluxo de linhas e, conseqüentemente, maior serão a corrente induzida e a força resistiva sobre o imã. No entanto, existe um limite para esta força, sua intensidade é sempre menor ou igual à intensidade da força gravitacional. No caso limite, em que ambas as forças se igualam, o imã passa a cair com velocidade constante ($v(t) = v_T$) e, portanto, a potência produzida pela força gravitacional ($P_g = mgv_T$) torna-se equivalente à potência elétrica ($P_e = i^2R$) dissipada nas espiras do tubo, ou seja,

$$mgv_T = \frac{hw}{2\pi a\rho} \left[\frac{d\Phi_B}{dt} \right]^2, \tag{12}$$

onde utilizamos a corrente dada pela equação (11).

Para determinar o valor de v_T a partir da equação (12) assumiremos duas abordagens teóricas distintas para explicitar o fluxo de indução magnética. Na primeira delas [3] consideramos que o campo do imã equivale ao produzido por um solenóide de mesma dimensão. Logo, a intensidade do campo em um ponto z sobre o eixo axial do imã é dado por

$$B(z) = \frac{B_r}{2} \left[\frac{L-z}{\sqrt{(L-z)^2 + r^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right], \tag{13}$$

sendo L é a altura do imã, r o seu raio e B_r é a indução magnética (remanescente) de um solenóide ideal, cujo o valor pode ser determinado utilizando a própria expressão (13) para um dado z com $B(z)$ conhecido. Uma boa maneira de fazer isso é medir o campo nas extremidades do imã ($z = 0$), pois, neste caso,

$$B_r = 2B_{ext}\sqrt{1 + (r/L)^2}. \tag{14}$$

Seguindo ainda a referência [3] vamos considerar que o fluxo varia de 0 até seu valor máximo $\Phi_{max} = B_{max}\pi r^2$ em um intervalo de tempo $\Delta t = \Delta z/v_T$, o que nos permite reescrever a equação (12) como

$$mgv_T = 2 \frac{hw}{2\pi a\rho} \left[\frac{B_{max}\pi r^2 v_T}{\Delta z} \right]^2. \tag{15}$$

Observe que um fator 2 foi inserido nesta equação. Tal inserção, baseada na referência mencionada e ilustrada na Fig. 3, justifica-se pelo fato de que o imã, ao se aproximar de uma espira, se afasta de outra equidistante e dissipa nesta uma potência equivalente àquela dissipada na primeira. Enfim, considerando $h = \Delta z \approx (5 - 2e^{-L/5r})r$ (veja referência [3] para maiores detalhes) e manipulando os termos, a equação (15) torna-se

$$v_T = \frac{mg\rho a}{\pi r^4 w B_{max}^2} \left[5 - 2e^{-L/5r} \right]. \tag{16}$$

Como já esperado a velocidade terminal depende das propriedades do tubo, como o raio a , a espessura w e a resistividade elétrica ρ , e do imã, como o raio r , a altura L e o valor máximo do campo magnético B_{max} . Lembrando, porém, do pressuposto de equivalência entre os campos do imã e de um solenóide de mesma dimensão, para obter B_{max} basta considerar $z = 0, 5L$ na equação (13). Fazendo isso obtemos

$$B_{max} = \frac{B_r}{2} \sqrt{\frac{1}{(1/2)^2 + (r/L)^2}}. \tag{17}$$

Substituindo esta expressão na equação (16) obtemos finalmente

$$v_T = \frac{4mg\rho a}{B_r^2 \pi r^3 w} \left[5 - 2e^{-L/5r} \right] \left[0, 25 + \frac{r^2}{L^2} \right]. \tag{18}$$

Uma segunda maneira de explicitar o fluxo magnético e resolver a equação (12), proposta por Levin e colaboradores [7], considera que o fluxo produzido pelo imã é equivalente ao de dois discos carregados de raios r separados por um distância L . Nesta abordagem os autores conjecturam ainda que os discos podem ser tratados como monopolos de carga líquida

$$q_m = \pi r^2 B_r / \mu_0. \tag{19}$$

Sendo assim, o fluxo de linhas de campo sobre uma espira do tubo segue a equação

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 q_m}{2} \left[\frac{L+z}{\sqrt{(L+z)^2 + \bar{a}^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + \bar{a}^2}} \right]. \tag{20}$$

Note que aqui é utilizado o raio médio $\bar{a} = a + w/2$ e não apenas a como na abordagem anterior. Além disso, como estamos interessados na taxa de variação do fluxo derivamos (20) em relação ao tempo e, com isso, obtemos

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 q_m v}{2} \left[\frac{\bar{a}^2}{[(L+z)^2 + \bar{a}^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\bar{a}^2}{[z^2 + \bar{a}^2]^{\frac{3}{2}}} \right]. \tag{21}$$

Para obter a variação do fluxo sobre todo o tubo devemos integrar este resultado em relação a z . Fazendo isso e substituindo o resultado em (12) ficamos com

$$v_T = \frac{8\pi mg\rho \bar{a}^2}{\mu_0^2 q_m^2 w f(L/\bar{a})}, \tag{22}$$

em que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(y+x)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}} \right]^2 dy. \tag{23}$$

Mais detalhes a respeito da obtenção da equação (22) pode ser encontrado na Ref. [7]. Embora a integral (23) não possua solução analítica, dada a altura (L) do imã e o raio médio (\bar{a}) do tubo, seu valor pode ser facilmente obtido numericamente. No entanto ao utilizarmos esta

equação para determinar a velocidade terminal do imã obtivemos um valor para a velocidade terminal aproximadamente duas vezes maior do que o observado experimentalmente ou usando a equação (18). Lembramos, então, que para deduzir a equação (18) assumimos, como em [3], uma dissipação elétrica dobrada baseada na indução por aproximação e afastamento do imã. Levando em conta este fato corrigimos a expressão Eq. (22) para

$$v_T = \frac{4\pi mg\rho\bar{a}^2}{\mu_0^2 q_m^2 w f(L/\bar{a})}. \quad (24)$$

Na seção 6 utilizaremos as equações (18) e (24) para determinar a velocidade terminal de um imã de neodímio em queda dentro de dois tubos metálicos distintos. Estes valores são comparados com aqueles obtidos experimentalmente com o aparato descrito na seção 2.

5. O movimento de queda em um tubo não-metálico

A fim de testar nosso aparato analisamos inicialmente a queda do imã através de um tubo não-metálico de PVC. A Fig. 4 descreve o deslocamento e a velocidade (janela representada no canto superior esquerdo) do imã em função do tempo. Enquanto os melhores ajustes dos pontos indicam uma velocidade crescendo linearmente com o tempo o deslocamento cresce com o quadrado do tempo. Vale ressaltar que a média foi realizada a partir de 10 medidas, no entanto, como mostra as barras de erro na figura, a dispersão em relação à média é muito pequena para todas as demais medidas.

Explorando mais detalhadamente este resultado, a equação de ajuste para o deslocamento sugere uma ace-

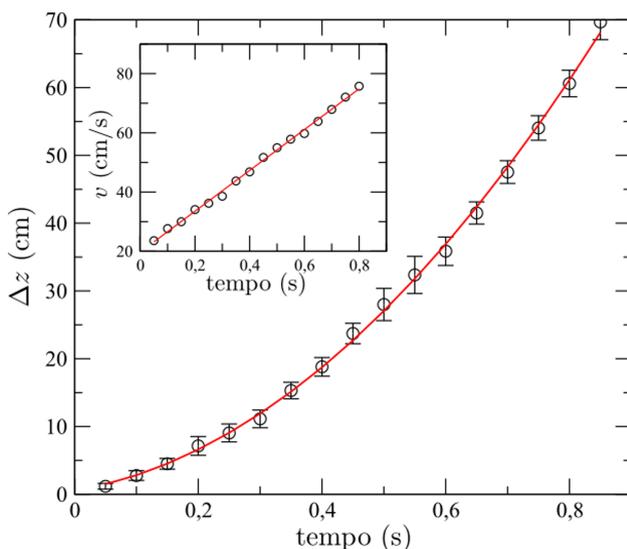


Figura 4: Deslocamento e velocidade (quadro apresentado no canto superior esquerdo) em função do tempo para o imã em queda em um tubo de PVC.

leração igual $a_e = 1,55 \text{ m/s}^2$ enquanto que o valor obtido usando a equação (2), com $m_i = 16,0 \text{ g}$, $m_c = 11,6 \text{ g}$ e $g = 9,79 \text{ m/s}^2$ (aceleração gravitacional local), é $a_t = 1,56 \text{ m/s}^2$. Portanto, o aparato mostrou-se eficiente para o estudo da “queda-livre” e, conseqüentemente, para explorar a lei de queda dos corpos.

Uma variação interessante que poderia ser implementada nesse âmbito seria modificar a massa do contrapeso de modo que o corpo (imã) experimente diferentes acelerações. Nesse caso, se diferença entre as massas m_i e m_c for mantida constante, é possível mostrar como Galileu que o dois corpos de massas m_i diferentes caem ao mesmo tempo. Há ainda a possibilidade de se analisar o movimento submetendo um dos tubos à diferentes inclinações. Neste caso, pode-se investigar a decomposição de forças bem como avaliar a influência do atrito para o movimento. Outra possibilidade seria preencher um dos tubos com algum fluido e investigar a ação de forças viscosas sobre o movimento. Mas, independentemente destas possíveis aplicações, um diferencial do aparato é a possibilidade de visualizar o comportamento temporal do deslocamento em tempo real usando a opção *Serial Plotter* da própria IDE do Arduino ou por meio de outros softwares gratuitos que permitem a comunicação entre o Arduino e programas gráficos que podem ser explorados durante o experimento. Dentre estes softwares, o PLX-DAQ [15], possibilita gravar os dados lidos do Arduino em uma planilha e, ao mesmo, fornece o gráfico em tempo real tornando o experimento ainda mais atrativo.

6. A queda freada do imã em tubos condutores

Para ilustrar o caso de queda resistiva utilizamos dois tubos metálicos, um de alumínio com $\rho_{Al} = 2,85 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ [16], raio interno $a = 1,10 \text{ cm}$ e espessura $w = 0,17 \text{ cm}$, e outro de cobre com $\rho_{Cu} = 1,78 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ [17], $a = 1,19 \text{ cm}$, $w = 0,08 \text{ cm}$, ambos com $80,0 \text{ cm}$ de comprimento. Utilizamos o mesmo imã do caso anterior, $m_i = 16,0 \text{ g}$, $r = 0,70 \text{ cm}$ e $L = 1,40 \text{ cm}$ e como contrapeso, uma haste de alumínio $m_h = 1,92 \text{ g}$ na qual acoplamos arruelas de massas $m_a = 1,19 \text{ g}$. A Fig. 5 exibe a posição do imã em função do tempo à medida que ele cai dentro do tubo de alumínio usando duas massas de contrapeso distintas m_2 e m_4 , em que os sub-índices equivalem ao quantidade de arruelas acopladas na haste de contrapeso. Ela também mostra, no canto inferior direito, a velocidade terminal do imã em função da diferença de massa do imã e do contrapeso. Como é possível observar, o imã se desloca com velocidade constante durante praticamente toda a queda e a velocidade terminal depende linearmente da massa efetiva do sistema, o que está de acordo com a equação (6).

Embora a Fig. 5 sugira um comportamento linear da posição em relação ao tempo durante toda a queda, para fazer o ajuste e determinar a velocidade terminal consi-

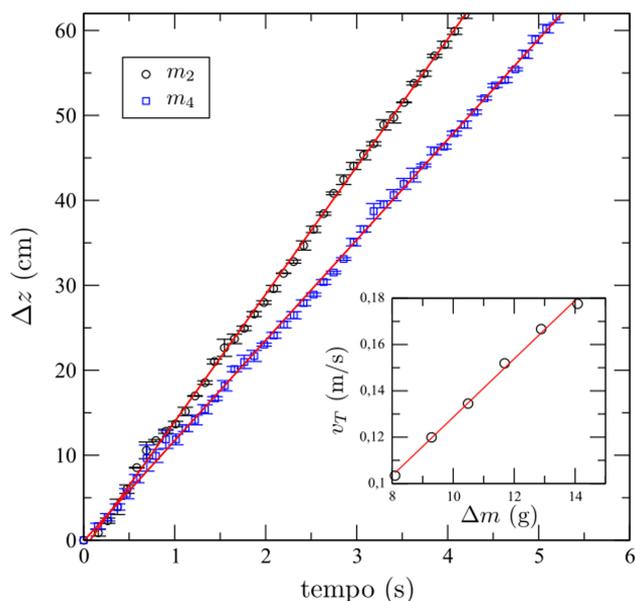


Figura 5: Deslocamento (Δz) do imã em função do tempo e velocidade terminal (v_T), canto inferior direito, em função da diferença de massa do imã-contrapeso (Δm). O sub-índice das massas na legenda refere-se ao número de arruelas utilizadas.

deramos apenas os dados após um tempo $t \geq 1$ s, que equivale à aproximadamente $10^2 \tau_{max}$, sendo τ_{max} determinado a partir do conjunto de massas utilizadas. Então, para verificar se os valores encontrados experimentalmente são coerentes com a teoria calculamos a velocidade terminal usando as equações (18)(1) e (24)(2). A intensidade do campo sobre a superfície do imã $B_{ext} = 440$ mT foi determinada empregando um medidor de intensidade de campo magnético, modelo Waite-WT10A da Waite Magnetic Technology Co. Ltd., com escala de operação de (0-200-2000) mT e a integral (23) foi calculada numericamente usando o pacote *integrate* da linguagem R [18]. Os valores obtidos estão organizados na Tabela 1 e indicam uma boa concordância do resultado experimental com a previsão teórica dos modelos discutidos na seção 4.

Por fim, substituímos o tubo de alumínio pelo de cobre e repetimos o experimento. Neste ponto devemos notar que tal substituição têm a finalidade da determinação indireta da resistividade do tubo de cobre a partir do resultado experimental obtido para a velocidade terminal, neste caso $v_T = 0,259$ m/s. Após substituir esse resultado

Tabela 1: Velocidade terminal teórica (1,2) e experimental usando diferentes massas como contrapeso.

	$v_{exp}(m/s)$	$v_1(m/s)$	$v_2(m/s)$
m_0	0,178	0,178	0,177
m_1	0,167	0,163	0,162
m_2	0,152	0,148	0,147
m_3	0,134	0,133	0,132
m_4	0,120	0,118	0,117
m_5	0,103	0,103	0,102

nas equações (18) e (24), obtivemos, respectivamente, $\rho_1 = 1,80 \times 10^{-8} \Omega.m$ e $\rho_2 = 1,74 \times 10^{-8} \Omega.m$. Estes valores, comparados ao valor tabelado [17], resultam, nesta ordem, em 2% e 3% de erro percentual. Portanto, também para esta finalidade o aparato mostrou-se bastante eficiente.

7. Conclusões

Neste trabalho apresentamos um aparato de baixo custo para o estudo de queda de corpos empregando um sensor ultrassônico e o microcontrolador Arduino acoplado a um computador. O sistema proposto permite acompanhar e registrar o deslocamento do objeto em intervalos de tempo de aproximadamente 50 ms e, portanto, pequenas alterações da velocidade podem ser investigadas. Outro diferencial do dispositivo proposto em relação aos sistemas convencionais é a possibilidade de visualização gráfica em tempo real e a variação entre movimento acelerado e/ou uniforme simplesmente trocando o tubo por onde o imã cai.

Para verificar o funcionamento do aparato foram analisadas duas situações de queda, a “livre” e a resistiva, e obteve-se resultados consonantes à teoria para ambas. Especificamente na situação de queda-resistiva, conforme a discussão apresentada na seção 4, os resultados experimentais foram comparados com a previsão teórica para a velocidade média de dois modelos teóricos distintos. Tanto a consideração do campo do imã como equivalente ao de um solenóide de mesmas dimensões, como a aproximação por dois discos ou monopólos de cargas superficiais mostraram-se igualmente satisfatórias para determinar a velocidade terminal do imã. Todavia, conforme a discussão apresentada ao fim da seção, nesta segunda abordagem se faz necessário introduzir um fator de correção para que os resultados tornem-se coerentes.

A variação da massa do contrapeso também permitiu investigar a queda do imã submetido à diferentes acelerações e, ainda, comprovar a relação linear entre a velocidade terminal e a massa efetiva do sistema para o caso de queda-resistiva. Além disso, conforme demonstramos no final da seção 6, uma vez determinada a velocidade terminal a partir destes modelos, podemos explorar o experimento para determinar as propriedades elétricas do tubo como sua resistividade. Uma sugestão complementar, como variar a inclinação de um dos tubos por onde as massas realizam movimento, também foi apresentada. Esta possibilidade, bem como preencher o tubo por onde o imã desce com algum fluido, permitiria discutir outras situações interessantes como a decomposição das forças envolvidas, a ação de forças viscosas e a influência ou não do atrito, uma vez que em tubos paramagnéticos o imã cai sem tocar nas paredes do tubo.

Além das propostas aqui apresentadas há outras aplicações para o aparato ou para seus elementos constituintes que podem ser discutidas e exploradas em aula. Entre

estas possibilidades, podemos destacar a utilização do sensor ultrassônico para identificar trincas ou falhas em tubos e dutos bem como para medir o nível de fluido ou grãos dentro dele. Contudo, independentemente da investigação, é aconselhável e, ao mesmo tempo, um diferencial do aparato aqui proposto, a participação do aluno na montagem do experimento a fim de que ele adquira experiência com o processo de aquisição, monitoramento e tratamento de dados.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores da Revista Brasileira de Ensino de Física (RBEF) pelas valiosas observações/sugestões que melhoraram significativamente o texto inicial. A. Doff e V. M. Lenart agradecem, respectivamente, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] Galilei, Galileu, *Dois Novas Ciências* (Editora Nova Stella, São Paulo, 1988), 2ª ed.
- [2] Douglas Brown, *Tracker: Free Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education*, <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker>.
- [3] Fernando L. da Silveira, Yan Levin e Felipe B. Rizzato, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **24**, 295 (2007).
- [4] Roberto Hessel, Agnaldo A. Freschi e Francisco J. dos Santos, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **37**, 1506 (2015).
- [5] Jae-Sung Bae, Jai-Hyuk Hwang, Jung-Sam Park and Dong-Gi Kwag, *Journal of Mechanical Science and Technology* **23**, 3024 (2009).
- [6] Petru S. Fodor and Tara Peppard, *The Physics Teacher* **50**, 344 (2012).
- [7] Yan Levin, Fernando L. da Silveira and Felipe B. Rizzato, *American Journal of Physics* **74**, 815 (2006).
- [8] Shirish R. Pathare, Saurabhee Huli, Rohan Lahane and Sumedh Sawant, *The Physics Teacher* **52**, 160 (2014).
- [9] Benjamin Irvine, Matthew Kemnetz, Asim Gangopadhyaya and Thomas Ruubel, *American Journal of Physics* **82**, 273 (2014).
- [10] G. Donoso, C.L. Ladera and P. Martín, *European Journal of Physics* **30** 855 (2009).
- [11] Sylvio R. Bistafa, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **34** 2101 (2012).
- [12] Arduino Playground HomePage, <http://www.arduino.cc>.
- [13] Anderson R. de Souza, Alexsander C. Paixão, Diego D. Uzêda, Maco A. Dias, Sergio Duarte e Helio S. de Amorim, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **33**, 1702 (2011).
- [14] Alessandro D'Ausilio, *Behavior Research Methods* **44**, 305 (2012).
- [15] Fábio S. da Rocha, Guilherme F. Marranghello e Márcia M. Locchese, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* **31**, 98 (2014).
- [16] Lúcio F. Mondolfo, *Aluminum Alloys: Structure and Properties* (Butterworths, London, 1976).
- [17] R.A. Matula, *Journal of Physical and Chemical Reference Data* **8**, 1147 (1979).
- [18] R Development Core Team, *R: A Language and Environment for Statistical Computing* (R Foundation for Statistical Computing, Vienna, 2011), available at <http://www.R-project.org/>.