

# Software MUFCosm como ferramenta de estudo dos modelos da cosmologia padrão

(Software MUFCosm as a tool for studying the standard cosmological models)

R.R. Cuzinato<sup>1</sup>, E.M. de Moraes

Instituto de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, MG, Brasil

Recebido em 12/6/2013; Aceito em 1/7/2013; Publicado em 6/2/2014

Apresentamos o software MUFCosm, construído em Python, destinado ao estudo das diferentes etapas de evolução do universo através do modelo unificado para o fluido cosmológico. Este modelo simplifica a descrição das grandes eras evolutivas do cosmos, mas demanda a utilização de métodos numéricos de grande precisão. O software é uma ferramenta para efetuar interativamente os processamentos numéricos e avaliar as propriedades cosmológicas do modelo unificado para o fluido cosmológico. O mesmo software pode ser usado para estudar o comportamento do fator de escala do universo para cada um dos modelos clássicos de Friedmann, em que temos apenas uma componente de fluido dominante (matéria, radiação, inflaton ou constante cosmológica), o que dá um caráter pedagógico para esse trabalho.

**Palavras-chave:** software, cosmologia, fluido cosmológico.

This work presents the software MUFCosm that is built in Python for the study of the different evolution eras of the Cosmos through the unified model for the cosmic fluid. This model simplifies the description of the main phases of the universe, but at the same time introduces the need of numerical integration of the dynamical equations. The software is a useful tool for carrying out the numerical processing and assess the physical properties of the unified model for the cosmic fluid. Software MUFCosm can also be used for studying the behavior of the scale factor related to each one of the classic Friedmann models, which deal with a single-component fluid at a particular era – matter, radiation, inflation or dark energy (cosmological constant). This latter feature of the software makes this paper a pedagogical piece of work.

**Keywords:** software, cosmology, cosmic fluid.

## 1. Introdução

A cosmologia é a ciência que o estuda do universo como um todo. Ela tem como um de seus objetivos mais básicos a determinação do comportamento e as dimensões deste ao longo do tempo [1].

Com a descoberta das leis da física, surgiram as primeiras tentativas de aplicação destas ao universo. Porém, a ausência de dados experimentais era um problema, pois não se podia comprovar por observações o que as equações propunham.

A descrição mais completa do universo veio com a teoria da relatividade geral, formulada por Albert Einstein [2, 3]. Com ela, era possível determinar o universo como tendo um comportamento dinâmico. Na visão de Einstein, o universo era eterno e estático, fato este que fez com que ele alterasse suas equações com a adição de uma chamada constante cosmológica que estabilizaria o universo [4].

O principal colaborador com a cosmologia dessa época foi o cientista russo Alexander Friedmann [5]. Ele abandonou a premissa de um universo monótono e estudou a sua dinâmica pela aplicação das equações de Einstein. Com elas, ele formulou em 1922 a relação

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - \frac{kc^2}{R^2a^2}, \quad (1)$$

que é uma equação diferencial que relaciona a escala do universo ( $a$ ), densidade de energia ( $\varepsilon$ ), curvatura ( $k$ ), as constantes fundamentais velocidade da luz ( $c$ ) e constante gravitacional ( $G$ ) além de ( $R$ ) que é uma grandeza com dimensões de comprimento e representa o raio atual do universo.

A equação de Friedmann propunha apenas mais um modelo de universo, até que em 1929 o astrônomo norte americano Edwin Hubble observou o afastamento das galáxias, provando a dinâmica do universo [6]. Com isso, a equação de Friedmann se tornou a principal fer-

<sup>1</sup>E-mail: cuzinato@gmail.com.

ramenta de estudo dos cosmólogos. Mais recentemente, a medição da radiação cósmica de fundo comprovou a teoria do *big bang* para origem do universo e sua evolução dinâmica.

Quando se aponta o telescópio ao céu, podemos ver nitidamente duas importantes componentes do universo: a radiação e a matéria bariônica (formada por átomos). Ao estudar a dinâmica de galáxias, os físicos encontraram evidências de uma outra componente: a matéria escura [7–9], que tem propriedades semelhantes a matéria bariônica, porém, é muito mais densa. Devido à semelhança, matéria escura e matéria bariônica são consideradas a mesma componente do universo: matéria.

Com aplicação das propriedades termodinâmicas de cada uma dessas componentes na equação de Friedmann, foi possível prever que quando o universo era muito jovem, sua densidade de energia era composta basicamente por radiação, ou seja, a radiação era dominante. Ao passar do tempo, a densidade de energia da matéria superou a da radiação deixando a densidade de energia do universo dominada pela matéria. Ambos os comportamentos previam um crescimento desacelerado do raio do universo [1].

Recentemente, foi comprovado que o universo atualmente está crescendo aceleradamente [10–12]. Como nenhuma das componentes descritas acima pode culminar em um comportamento desse tipo, os cosmólogos consideraram a possibilidade de uma terceira componente atuante. Nenhuma experiência ou observação foi capaz de determinar qual seria esta componente, que ficou conhecida apenas como energia escura.

O modelo mais difundido para energia escura é o da constante cosmológica de Einstein. Essa constante tem a propriedade de se antepor a gravidade, gerando uma repulsão. É descrita por um campo escalar de densidade de energia constante, diferentemente da densidade de energia da radiação e da matéria, que diminuem hipercubicamente com o tempo [13]. Desse modo, em algum tempo recente (relativamente), a densidade de energia da matéria e radiação se tornaram menor que a densidade de energia da constante cosmológica, que fez com que o universo se expandisse aceleradamente devido a repulsão por ela gerada.

Além da equação de Friedmann, duas outras equações descrevem o comportamento do universo. A equação do fluido (derivada da primeira lei da Termodinâmica)

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(P + \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

e a equação de estado

$$P = \omega\varepsilon, \quad (3)$$

onde  $\varepsilon$  é a densidade de energia,  $P$  é a pressão e  $\omega$  é conhecido como parâmetro da equação de estado. Cada

uma das componentes são associadas a um valor diferente deste parâmetro. Para a radiação, este parâmetro vale  $1/3$ , para matéria vale  $0$  e  $-1$  para constante cosmológica.

Para solucionar problemas de conexão causal entre diferentes regiões afastadas no céu, e eliminar dificuldades em se justificar a geometria plana do espaço, os cientistas teóricos propuseram um crescimento exponencial vertiginoso logo no início do universo. Essa dinâmica acelerada primordial foi denominada inflação [16, 17]. A descrição completa desse período é extremamente custosa em termos matemáticos e físicos, porém, pode-se aproximar um comportamento semelhante definindo que o crescimento exponencial foi resultado do domínio de uma componente com parâmetro da equação de estado igual a  $-1$  (tal como a constante cosmológica).

## 2. Modelo unificado

Baseados nos dados observacionais, os cosmólogos elaboraram um modelo de universo, chamado modelo de mercado ou modelo padrão. Nele, foi considerado que no período em que determinada componente era dominante, apenas o parâmetro da equação de estado referente àquela componente era relevante (no modelo de mercado não é considerado o período inflacionário). Desse modo, o parâmetro da equação de estado permanece valendo  $1/3$  durante o período em que a radiação domina, passando para  $0$  no período de domínio da matéria chegando ao valor de  $-1$  juntamente com período de domínio da constante cosmológica [1]. O problema do modelo de mercado é que as transições entre os períodos de domínio ocorrem de forma descontínua, impossibilitando assim resoluções de equações diferenciais nos intervalos de transição.

O modelo unificado para o fluido cosmológico [18] tem como objetivo contornar essa dificuldade propondo uma única equação de estado que seja uma função contínua do tempo referente a toda a história do universo. Este modelo toma o universo como dotado de geometria plana ( $k = 0$ ) e composto apenas por uma componente que tem o parâmetro da equação de estado variável com o tempo ( $\omega(t)$ ). O período inflacionário, que ocorre no período de dominação da radiação, também é considerado. Essa equação de estado tem a forma

$$P(t) = \omega(t)\varepsilon(t), \quad (4)$$

em que a função  $\omega(t)$  deve ter o comportamento tal como o ilustrado na Fig. 1. O problema apresentado pelo modelo de mercado é que esse comportamento é descontínuo e a função  $\omega(t)$  não pode ser utilizada nas Eqs. (2) e (3) se o que se deseja é integrar a Eq. (2) para todos os períodos de evolução do universo continuamente.

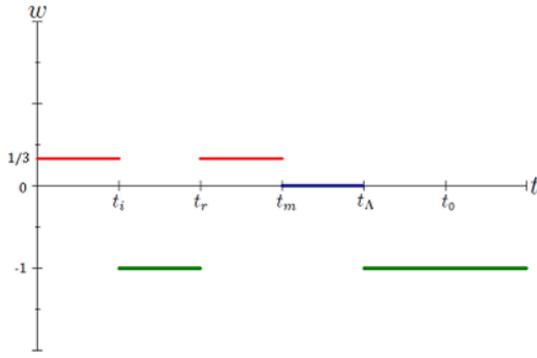


Figura 1 - Comportamento de  $\omega(t)$  para as diversas fases sequenciais de domínio das componentes do fluido cosmológico.

Utilizando as propriedades da função *Theta de Heaviside* [19, 20] em sua parametrização em termos da função arctan, encontramos a seguinte função com o comportamento semelhante ao da requerida (ver Fig. 1)

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^5 \frac{\omega_i}{\pi} \{ \arctan [10^\alpha (t - t_{i-1})] - \arctan [10^\alpha (t - t_i)] \}, \quad (5)$$

onde  $\omega_1 = 1/3$ ,  $\omega_2 = -1$ ,  $\omega_3 = 1/3$ ,  $\omega_4 = 0$  e  $\omega_5 = -1$ . Os tempo  $t_i$  são os valores absolutos de tempo em que as mudanças de comportamento de  $\omega(t)$  ocorrem. A constante  $\alpha$  é um parâmetro livre denominado constante de suavização, que faz com que a função dada na Eq. (5) se aproxime da função contínua por pedaços (ver Fig. 1) a medida que  $\alpha$  cresça. A Fig. 2 ilustra uma comparação entre esses dois comportamentos.

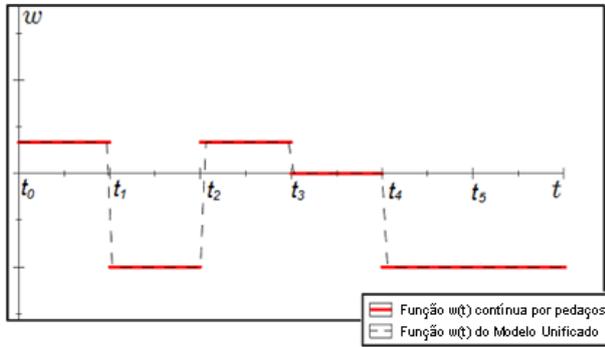


Figura 2 - Comportamento da função exibida na Eq. (5) sobreposto ao gráfico da Fig.1.

Com as Eqs. (1), (2) e (4), foi possível encontrar uma equação diferencial que rege o comportamento do fator de escala do universo em relação ao tempo [18,21].

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{3} \frac{a(t)}{(t + \int \omega(t) dt)}, \quad (6)$$

em que  $\omega(t)$  é dado pela Eq. (5). Essa equação diferencial não tem solução analítica e depende de métodos numéricos para ser integrada. Para essa integração foi escolhido o método de Runge-Kutta de quarta ordem [22].

Usualmente, o período inflacionário é descrito como sendo uma consequência da transição de fase de um campo escalar  $\phi$ , em que o potencial  $V$  associado à esse campo passa de um estado de maior energia para outro de menor energia [5, 23]. Com o modelo unificado para o fluido cosmológico, torna-se possível a obtenção de um campo escalar  $\phi$  unificado que satisfaz as condições

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \\ P = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \end{cases} \quad (7)$$

em que  $\varepsilon$  é a densidade de energia e  $P$  é a pressão. Este campo  $\phi$  está associado ao potencial  $V(\phi)$  válido por toda a história do universo.

### 3. Software MUFCosm [24]

O software MUFCosm<sup>2</sup> foi desenvolvido com o intuito de facilitar o árduo trabalho algébrico e ter um maior controle da qualidade dos métodos de integração numérica. Sua tela inicial é basicamente dividida em três partes, conforme Fig. 3.

Na parte superior esquerda, logo abaixo do título, estão as caixas de entrada dos dados das propriedades de cada período de domínio das várias componentes cósmicas (*inflaton*, radiação, matéria e energia escura) mimetizadas pelo fluido unificado. Essas propriedades são os tempos iniciais e finais do período e o valor que o parâmetro da equação de estado deve assumir. A aba R1 diz respeito ao período de domínio da radiação logo após o *big bang* (explosão que deu origem ao espaço-tempo) e antes do início de Inflação. Nessa aba devemos fixar  $\omega = 1/3$ ; os tempos inicial e final são fixados em valores arbitrários.<sup>3</sup> A aba I é o espaço onde se deve entrar os dados do período inflacionário, onde, por exemplo,  $\omega = -1$ . A aba R2 é aquela do segundo domínio da radiação, correspondente ao período pós-inflação e pré-matéria. A aba M refere-se ao período de domínio da matéria, e, finalmente, a aba  $\Lambda$  da conta do período em que o fluido unificado comporta-se como a constante cosmológica ( $\omega = -1$ ).

Ao lado da caixa de entrada dos parâmetros, está a caixa de entrada dos dados referentes ao processo de integração numérica. Abaixo dela, uma caixa de mensagens, onde o software mostra ao usuário a sequência de ações executadas. À direita da tela do programa, uma grande caixa onde os gráficos podem ser visualizados.

<sup>2</sup>O software MUFCosm está disponível no sítio <http://mufcosm.webnode.com/downloads/>. No mesmo sítio encontram-se os links onde se pode obter o interpretador Python, bem como os módulos necessários para rodar o arquivo executável do programa MUFCosm.

<sup>3</sup>Os tempos inicial  $t_i$  e final  $t_f$  (com  $t_f > t_i$ ) são escolhidos arbitrariamente porque estamos interessados mais no comportamento funcional do modelo – que deve ser nitidamente observado nas curvas  $a(t)$ ,  $\omega(t)$  e  $V(\phi)$  – e menos interessados na descrição realística da evolução cósmica – a qual, embora possível, torna as curvas  $a(t)$ ,  $\omega(t)$  e  $V(\phi)$  difíceis de serem visualizadas.

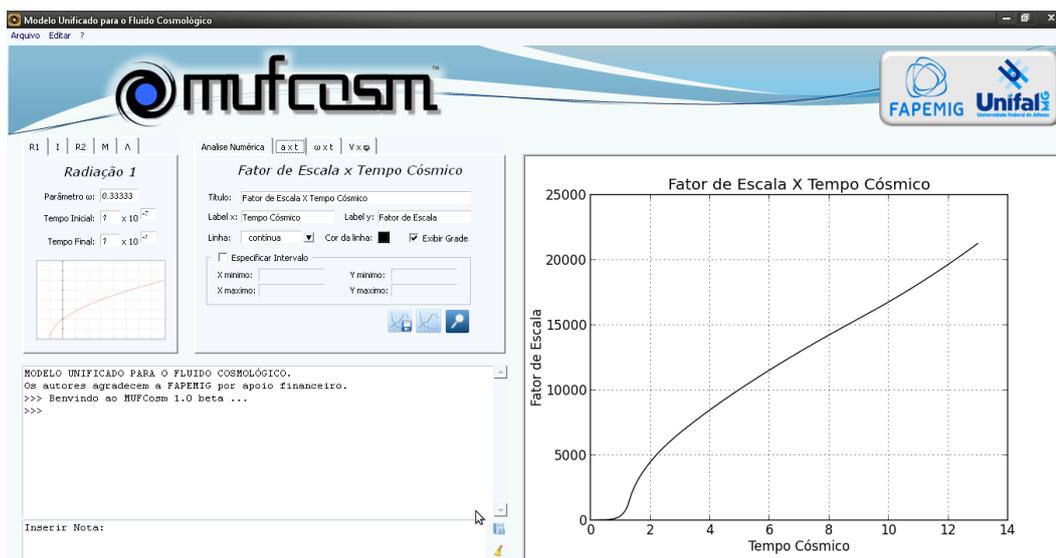


Figura 3 - Tela de trabalho o MUFCosm.

O MUFCosm foi implementado em linguagem de programação *Python*, devido à maior legibilidade do código fonte em comparação às linguagens tradicionais [25]. Além disso, a linguagem *Python* é ótima para implementação de *GUI* (interface gráfica com o usuário, ou seja, são os recursos que permitem a interação entre o usuário e o computador através do mouse e teclado) pois vem com uma interface orientada a objetos padrão para a *API* (Interface de Programação de Aplicativos) de *GUI*, chamada *Tkinter*. Juntamente com um pacote gratuito de extensões conhecido como *PMW* (Python Megawidgets), essa linguagem de programação é uma poderosa ferramenta de interação entre máquina e usuário [26].

A maior vantagem quanto ao uso de *Python* se dá pela facilidade de trabalhar com recursos de computação científica, tais como gerar os gráficos e processamentos numéricos [27]. Com a utilização do módulo *matplotlib*, é possível obter gráficos de alta qualidade e ainda salvá-los em uma ampla gama de formatos, tudo de maneira interativa [28, 29].

### 3.1. Entrada de dados

Nessa área (ver Fig. 4), o usuário informa as características de cada período. Os valores mostrados na figura foram escolhidos de forma a gerar gráficos com mudança de comportamento visível.<sup>4</sup> Nessa área, o usuário poderá entrar com um valor de  $\omega$  e os tempos absolutos em que este é vigente. A imagem na Fig. 4 mostra o gráfico do comportamento do fator de escala do universo para aquele valor de  $\omega$  fornecido.

<sup>4</sup>Enfatizamos que esses valores escolhidos não priorizam a correspondência com as previsões; os valores de tempo cosmológico realísticos geram gráficos com escala que dificulta a identificação dos pontos de inflexão, inviabilizando a identificação dos diferentes regimes evolutivos (que é justamente o que queremos estudar com o nosso *toy-model*).

<sup>5</sup>O parâmetro de Hubble é definido em termos do fator de escala  $a(t)$  e de sua derivada temporal ( $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ ) como  $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ .



Figura 4 - Entrada de dados referentes a caracterização dos períodos de universo.

### 3.2. Análise de dados e construção dos gráficos

Na aba *Análise Numérica*, ilustrada na Fig. 5, o usuário fornece os dados necessários para integrar numericamente a Eq. (6) para a derivada temporal do fator de escala ( $da/dt$ ). O método de Runge-Kutta necessita de um ponto inicial conhecido, que chamamos de  $(t_{vi}, a_{vi})$ . O usuário fornece os valores de  $t_{vi}$  e  $a_{vi}$  nos dois primeiros campos da aba *Análise Numérica*. O campo  $H_0$ , referente a constante de Hubble, é o valor que o *parâmetro de Hubble*<sup>5</sup> assume no tempo atual. Os campos  $\alpha$  e *Grau* referem-se respectivamente à *constante de suavização* e o grau de precisão do método numérico.

Com os campos *QTDE. de Pontos* é possível ter um controle independente do passo de análise numérica em

cada período. Dessa forma, os períodos mais críticos (tal como o início da expansão à partir do *big bang*) podem ser integrados com um precisão bastante grande e ao mesmo tempo, os períodos de comportamento mais estabilizados (como o domínio da matéria) podem ser integrados com um passo de análise maior, ganhando em tempo de processamento de dados.

Os três botões na parte inferior dessa *widget* são respectivamente para *Ajuda* (símbolo com o sinal de interrogação), *Plotagem de Relatórios* (feita após a análise concluída; representado pelo conjunto de três folhas) e, por último, a execução da *Análise Numérica* (cujo ícone é uma calculadora).



Figura 5 - Aba *Análise Numérica*, onde o usuário entra com os dados necessários para integração numérica.

Na aba “ $a \times t$ ” (vide Fig. 6), são encontrados os dados referentes a construção do gráfico de  $a(t)$ . Nessa aba, o usuário pode escolher o título do gráfico assim como os títulos dos eixos coordenados. É possível também selecionar estilo e cor da linha. Se for de interesse, o usuário pode determinar, no campo *Especificar Intervalo*, regiões específicas para serem visualizadas ajustando adequadamente os valores mínimo e máximo da abscissa e da ordenada. Os ícones no canto inferior direito dão as opções de salvar a figura (símbolo com o disquete), abri-la com o visualizador do módulo *matplotlib* (ícone com as curvas de um gráfico) ou pré-visualizá-la na própria tela de trabalho do MUFCosm (botão com a lupa). As abas “ $\omega \times t$ ” e “ $V \times \phi$ ” são compostas pelos mesmos elementos, porém, os gráficos exibidos são outros: o do parâmetro da equação de estado  $\omega$  que caracteriza o período cosmológico em função do tempo universal  $t$  e o do potencial  $V$  em função do campo escalar unificado  $\phi$ .

### 3.3. Gráficos gerados

**Parâmetro  $\omega$  em função do tempo** A função para  $\omega(t)$  dada na Eq. (5) é contínua e descreve o comportamento do parâmetro da equação de estado no tempo. Através da aba “ $\omega \times t$ ”, o MUFCosm gera o gráfico desse comportamento que pode ser observado na Fig. 7.



Figura 6 - Nessa aba, os dados necessários para a geração dos gráficos são fornecidos.

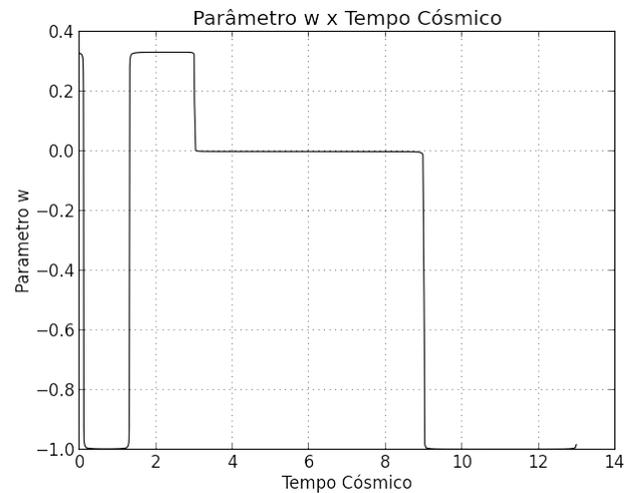


Figura 7 - Gráfico do comportamento do parâmetro da equação de estado no tempo.

**Fator de escala em função de tempo** Como  $\omega$  é uma função contínua do tempo, a Eq. (6) para o fator de escala  $a(t)$  pode ser integrada numericamente. O MUFCosm faz essa integração de forma rápida e interativa, sendo que o usuário não necessita ter nenhum conhecimento em linguagens de programação e nenhuma habilidade com softwares matemáticos. Um exemplo de gráfico do fator de escala gerado pode ser visualizado na Fig. 8.

**Potencial em função do campo escalar  $\phi$**  O MUFCosm gera também o gráfico do potencial em função de um campo escalar unificado referente a história do universo (ver Fig. 9), satisfazendo as condições previstas na Eq. (7).

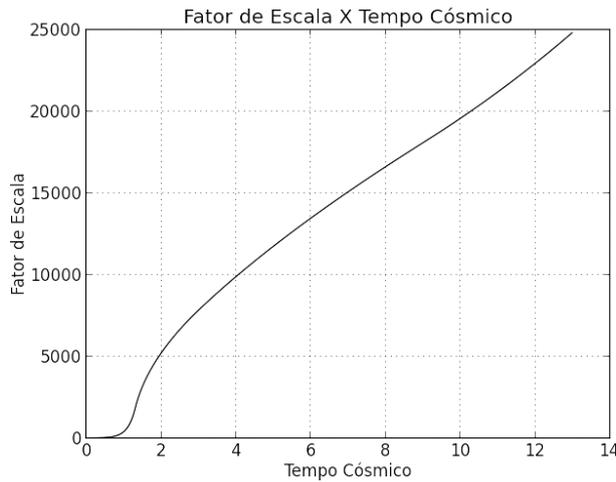


Figura 8 - Gráfico do fator de escala do universo em função do tempo, obtido numericamente.

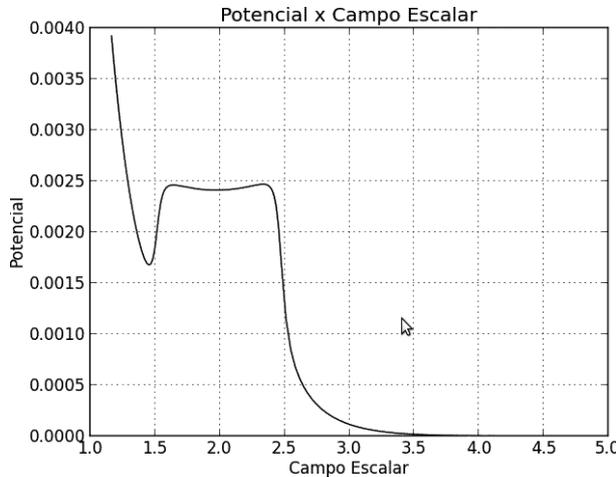


Figura 9 - Gráfico do potencial em função do campo escalar.

#### 4. Comentários finais

Na introdução desse artigo apresentamos as equações fundamentais da cosmologia, as quais, quando resolvidas, dão a forma da função  $a(t)$  para o parâmetro de distâncias do universo. Essa função terá formas diferentes para cada componente que se supõe dominante em um dado momento da evolução cósmica. Por exemplo, para uma era dominada pela radiação, tem-se  $a \propto \sqrt{t}$ , cf. se lê nas Refs. [1, 13] Os outros componentes possíveis considerados aqui são a matéria sem pressão (ordinária e escura), o campo de inflação e a constante cosmológica. O modelo cosmológico para o fluido unificado pretende considerar todas essas componentes de forma sequencial e com uma equação de estado  $P = \omega\rho$  contínua. Essa equação de estado é um tanto complicada, dada em termos de uma somatória com funções arctan. Isso torna as equações diferenciais

para  $a(t)$  difíceis de resolver. Escrevemos o software MUFCosm para resolver essa conta numericamente.

O software MUFCosm apresenta uma interface gráfica do tipo janelas, que o torna de fácil utilização pelo usuário não familiarizado com programação. Conforme descrito detalhadamente ao longo do texto desse artigo, é possível digitar os parâmetros do modelo cosmológico que se quer estudar, quer seja a solução  $a(t)$  para o universo dominado pela radiação, quer seja para o modelo completo com quatro componentes.

Os resultados numéricos conseguidos à partir do MUFCosm são consistentes com os resultados numéricos que se obtém de um software de cálculo analítico e numérico muito conhecido e confiável, o Mathematica®. De fato, escrevemos um código de comandos no Mathematica [24] incluindo as equações do modelo unificado, em particular as Eqs. (5) e (6). Esse código integra numericamente a equação para o fator de escala fornecendo o gráfico de  $a(t)$ . Antes disso, escreve-se a função  $\omega(t)$  usando o Mathematica para calcular explicitamente a combinação de termos da Eq. (5). Com  $a(t)$  e  $\omega(t)$  obtemos  $\varepsilon(t)$  usando as Eqs. (2) e (3). Munidos com as formas funcionais de  $\varepsilon(t)$  e  $P(t)$  – Eq. (3) – é possível resolver o sistema (7) para obter o campo escalar  $\phi$  associado ao fluido unificado e o potencial  $V(\phi)$ . As funções  $\omega(t)$  e  $a(t)$  obtidas com este processo, realizado com o software Mathematica, aparecem na Fig. 10.

As curvas da Fig. 10 apresentam o mesmo comportamento funcional das curvas correspondentes  $\omega(t)$ ,  $a(t)$  e  $V(\phi)$  obtidas a partir do nosso software MUFCosm, cf. as Figs. (7), (8) e (9). Isso é um teste de consistência importante para o nosso código computacional e confere confiabilidade ao software MUFCosm que produzimos.

O fato de podermos controlar os parâmetros do modelo dá ao software um caráter educacional importante. Em verdade, o estudante que começa a aprender cosmologia pode usar o software para aprender as características dinâmicas dos períodos distintos da evolução cósmica. Esse estudante pode focar sua atenção nas eras de inflação, de domínio da radiação, de predominância da matéria ou de prevaência da Constante Cosmológica, de maneira isolada ou combinando duas ou mais componentes. A resposta é imediata após a entrada dos dados e o comportamento funcional do fator de escala é exibido na forma de um gráfico no próprio corpo do programa. Além disso, o modelo unificado apresenta uma solução para  $a(t)$  que inclui sequencialmente e continuamente as quatro componentes principais do universo e isso não é assunto coberto por livros introdutórios de cosmologia, o que só enfatiza a característica pedagógica desse trabalho.

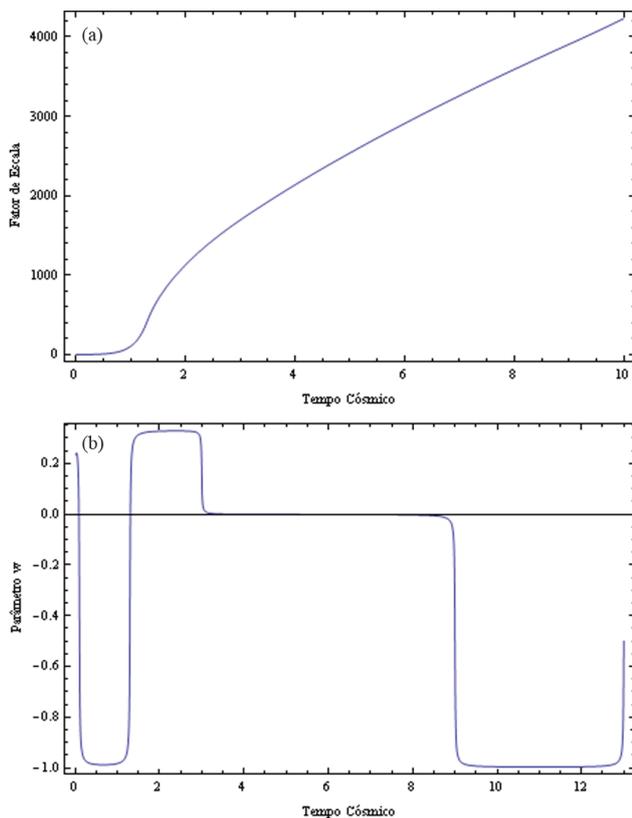


Figura 10 - Curvas de  $\omega(t)$  e  $a(t)$  para o modelo unificado a partir do código em Mathematica

## Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPEMIG (processo CEX APQ 04440-10) pelo apoio financeiro.

## Referências

- [1] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Addison Wesley, San Francisco, 2003).
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, New York, 1972).
- [3] T. P. Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction* (Oxford University Press, New York, 2005).
- [4] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* (Oxford University Press, Oxford, 1934).
- [5] J.A. Peacock, *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [6] E. Hubble, *Proceedings of the National Academy of Science* **15**, (1929).
- [7] R.E. Souza, *Introdução à Cosmologia* (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004).
- [8] D.W. Sciama, *Modern Cosmology and the Dark Matter Problem* (Cambridge University Press, New York, 2003).
- [9] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology* (Wiley, San Francisco, 2003), 2<sup>a</sup> ed.
- [10] S. Perlmutter *et al.*, *Nature* **392**, 51 (1998).
- [11] A.G. Riess, A.V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P.M. Garnavich, R.L. Gilliland, C.J. Hogan, S. Jha, R.P. Kirshner, B. Leibundgut, M.M. Phillips, D. Reiss, B.P. Schmidt, R.A. Schommer, R.C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N.B. Suntzeff, J. Tonry, *The Astronomical Journal* **116**, 1009 (1998).
- [12] D.N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M. R.olta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, E. L. Wright, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [13] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, New York, 2005).
- [14] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1996), 2<sup>a</sup> ed.
- [15] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, New York, 2008).
- [16] A.H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 357 (1981).
- [17] A.H. Guth, *O Universo Inflacionário* (Campus, Rio de Janeiro, 1997).
- [18] R.R. Cuzinatto and E.M. Morais, *Unified Equation of State for the Cosmological Fluid*, to be published (in preparation).
- [19] S. Nair, *Advanced Topics in Applied Mathematics: For Engineering and Physical Sciences* (Cambridge University Press, New York, 2011).
- [20] K.B. Oldhan, J. Myland, J. Spanier, *An Atlas of Functions: with Equator, the atlas functions calculator* (Springer, New York, 2008), 2<sup>a</sup> ed.
- [21] E.M. Morais, *Modelo Unificado para o Fluido Cosmológico*. Monografia de iniciação científica. Publicação interna do ICT/UNIFAL-MG. Disponível em <http://mufcosm.webnode.com/downloads/>.
- [22] J.D. Santos e C.S. Zanoni, *Métodos Numéricos* (Ed. Universitária da UFPE, Recife, 2006).
- [23] S. Bonometto, V. Gorini, U. Moschella, *Modern Cosmology* (IOP Publishing, Bristol, 2002).
- [24] <http://mufcosm.webnode.com/downloads/>.
- [25] L.E. Borges, *Python para Desenvolvedores*. 2ed. Disponível em <http://ark4n.wordpress.com/python/>.
- [26] M. Lutz, *Programming Python* (O'Reilly Media, Sebastopol, 2011), 4<sup>a</sup>ed.
- [27] H.P. Langtangen, *A Primer on Scientific Programming with Python* (Springer, Heidelberg, 2012), 3<sup>a</sup> ed.
- [28] S. Tosi, *Matplotlib for Python Developers* (Packt Publishing, Birmingham, 2009).
- [29] J. Hunter, D. Dale, E. Firing, M. Droettboom, *Matplotlib User's Guide, 2013*. Disponível em <http://matplotlib.org/Matplotlib.pdf>.