

# Máquina de Atwood com massa variável em movimento oscilatório atípico

(*Atwood Machine with variable mass in atypical oscillatory motion*)

B. Lucatto, M.B. Caprecci, J.V.A. Gonçalves, B.N. Sismanoglu<sup>1</sup>

Laboratório de Mecânica, Departamento de Física, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil  
Recebido em 2/10/13; Aceito em 16/1/14; Publicado em 23/5/2014

O problema da máquina de Atwood com massa variável é apresentado neste trabalho através de uma configuração robusta, que permite a aquisição de dados da dinâmica do movimento oscilatório durante um intervalo de tempo relativamente longo. O sistema é facilmente implementado através da utilização de uma polia e um conjunto de três corpos cujas massas obedecem a relação  $M > m_1 > m_2$  e  $M < m_1 + m_2$ . O problema pode ser tratado de maneira lúdica para alunos do ensino médio ou com uma profundidade maior, através da utilização do formalismo Lagrangiano, para estudantes de nível superior. O movimento oscilatório do sistema não se assemelha com nenhum dos casos de amortecimento periódico ou aperiódico observado na literatura, pois a massa do sistema varia em intervalos de tempo não constantes. Através da utilização de fotogates (sensores) acoplados à polia e do software Tracker obteve-se um conjunto de variáveis dinâmicas para comparação com os resultados esperados oriundos da descrição analítica.

**Palavras-chave:** máquina de Atwood, dinâmica, movimento oscilatório, massa variável.

An Atwood machine with variable mass is presented in this work using a robust configuration that enables data acquisition from the dynamic oscillatory motion during a relatively long time interval. The system is easily implemented through the use of a pulley and a set of three bodies whose masses satisfy the relationship  $M > m_1 > m_2$ , and  $M < m_1 + m_2$ . The problem can be treated in a playful way for high school students or with greater depth, using the Lagrangian formalism for undergraduate students. The oscillatory motion of the system is not similar to any of the cases of periodic or aperiodic damping reported in the literature, because the mass of the system changes with decreasing time intervals. Through the use of photogates (sensors) coupled to the pulley and Tracker Software it was obtained a set of dynamic variables to be compared with the expected results derived from the analytical description.

**Keywords:** Atwood machine, dynamics, oscillatory motion, variable mass.

## 1. Introdução

Sistemas de massa variável constituem uma aplicação interessante das leis da dinâmica, e normalmente são introduzidos no curso de Física 1, a fim de exercerem o papel de uma primeira aplicação das ferramentas de cálculo adquiridas no primeiro semestre do ensino superior. Existem diversos problemas clássicos, que geralmente envolvem correntes em queda, foguetes expelindo gases ou esteiras de transporte de minério. O estudo da dinâmica de massa variável possui grande aplicabilidade na engenharia, em particular, na engenharia naval, como pode ser visto na Ref. [1], em que há o estudo de três sistemas que requerem análises mais sofisticadas dos efeitos da variação da massa: o *moonpool*, que serve para estabelecer o equilíbrio de plataformas

petrolíferas em alto mar; o impacto de corpos rígidos contra a superfície da água, que modela o impacto sofrido pela proa de navios que navegam sobre ondas; e a implantação de cabos no fundo do oceano, que é um procedimento usual em engenharia naval e *offshore*.

Um dos desafios de se estudar um sistema de massa variável é interpretar corretamente as equações infinitesimais. Na tese de Casetta [2], há uma discussão muito completa acerca das soluções propostas por alguns autores aos problemas clássicos e que, apesar de sempre bem argumentadas, por vezes levam a diferentes resultados e até a alguns paradoxos.

Neste trabalho, o sistema de massa variável empregado é facilmente implementado e de baixo custo. Ele é constituído por uma máquina de Atwood que inicialmente encontra-se com a massa do lado direito subindo

<sup>1</sup>E-mail: bogos@ita.br.

e, a partir de uma determinada altura, suspende uma massa suficientemente grande para que haja alteração no sentido da aceleração, até que o lado direito passe a descer e a massa que fora suspensa retorne ao solo, causando um movimento oscilatório. A massa do sistema sofre variações “discretas”, contrastando com a variação “contínua” utilizada no modelamento dos problemas clássicos. Entre duas variações consecutivas, há um intervalo de tempo relativamente longo, que permite a análise detalhada dos efeitos intermediários.

Entendemos que o sistema estudado neste artigo contribuirá na compreensão dos sistemas de massa variável, no sentido de que ele possui uma similaridade com o problema da corrente suspensa na máquina de Atwood, como pode ser visto na Ref. [3], e que seus resultados podem levar a uma melhor avaliação das hipóteses estabelecidas na análise da colisão entre os elos da corrente e a superfície plana. Na Ref. [3], a máquina de Atwood foi utilizada para o estudo da dinâmica de um sistema com massa variável, através da utilização de uma corrente cuja extremidade estava presa a um fio que suspendia um corpo de massa fixa do outro lado da polia. Deste modo, a corrente experimentava um movimento amortecido devido à variação contínua de massa. A dinâmica da corrente em seu movimento amortecido foi estudada através da solução numérica de seu modelo analítico, que foi confrontada com os dados experimentais, obtidos de duas maneiras distintas: mediante a utilização de uma solução de aquisição de dados comercial (sensores fotogates – que se mostraram ineficazes nas regiões de movimento com elevada aceleração escalar) e também com a utilização de um software de domínio público, o VirtualDub, no qual se emprega a filmagem do movimento, que é posteriormente convertida em uma sequência de quadros, cujos intervalos entre dois *frames* são conhecidos. Através da análise destes quadros pode-se obter a variação do espaço em função do tempo de um ponto material que se quer estudar.

Ao estudarmos o comportamento do sistema apresentado neste trabalho, adquirimos intuição acerca dos efeitos da variação da massa na máquina de Atwood. A partir de então, é mais fácil entender em detalhes o que ocorre com cada elo no problema da corrente em [3], pensando nele como um sistema de várias massas acopladas. Essa análise é complicada na questão original, pois as massas são adicionadas de forma quase contínua, o que leva muitos autores a considerar uma força média na base da corrente mesmo quando a corrente está descendo. À luz do nosso experimento, tal consideração fica evidentemente infundamentada. As discrepâncias causadas por essas incorreções na análise são discutidas nas Refs. [2-4].

Problemas que envolvem o movimento de sistemas com massas variáveis, ou com grande variação temporal da intensidade da aceleração, ou mesmo aqueles que são muito rápidos e não podem ser observados a olho nu,

geralmente são tratados apenas teoricamente em sala de aula nos cursos da área de exatas. A filmagem do experimento, juntamente com a utilização de softwares dedicados à aquisição de dados a partir de vídeos, permite obter a evolução do movimento de um sistema dinâmico em intervalos de tempo bastante pequenos, o que viabiliza a realização de experimentos que estudam estes problemas em laboratório. Isto é importante para que o aluno possa compreender melhor os conceitos físicos envolvidos nestes experimentos, sendo um facilitador no processo ensino-aprendizagem nas áreas científico-tecnológicas.

Como exemplificação de movimentos muito rápidos e que confundem o observador, podemos citar os estudados na Ref. [3]: a corrente disposta em “U” que tem umas de suas extremidades liberadas do repouso (movimento similar ao “bungue jump”), e o problema aparentemente simples da queda livre de um sistema “massa-mola-massa” abandonado na posição vertical. A análise teórica do primeiro é bastante complicada enquanto que a do segundo é simples, bastando usar o princípio fundamental da dinâmica adequadamente. Porém, remontando aos *experimentos mentais* da época de Galileu (ou mais posteriormente, de Einstein), onde se usava o raciocínio lógico para interpretar o fenômeno físico sem o uso da experimentação, dificilmente algum observador afirmaria que no primeiro caso, do bungue jump, a aceleração inicial da corrente em queda é superior à da aceleração da gravidade e que no segundo caso, da queda livre do sistema com mola, o corpo suspenso na posição inferior só inicia seu movimento após praticamente o corpo superior ter-se deslocado o equivalente à extensão da deformação da mola. Deste modo, ressaltamos que o uso de filmadoras para a realização de experimentos de mecânica em laboratórios nos cursos da área de exatas é extremamente importante para se obter mais um parâmetro muito acurado de comparação (ou talvez o único) entre os resultados da análise teórica do experimento, da análise numérica e da observação em laboratório.

## 2. Abordagem teórica

Para o equacionamento do experimento, optamos por utilizar o formalismo lagrangiano em detrimento ao newtoniano, por sua elegância e simplicidade ao descrever sistemas dinâmicos sujeitos a restrições geométricas ou cinemáticas. Na visão dos autores, essa opção é instrutiva, pois fornece um exemplo de aplicação da mecânica analítica a uma situação simples. Normalmente, essa é reservada a problemas de alta complexidade, o que dificulta a compreensão por aqueles menos familiarizados com a ferramenta.

O sistema estudado consiste de três massas acopladas através de fios finos de massa desprezível, ligados a uma polia, de momento de inércia  $I$  e raio  $R$ , conforme mostra a Fig. 1. As massas obedecem as seguintes

relações:  $M > m_1 > m_2$  e  $M < m_1 + m_2$ . Inicialmente o sistema encontra-se em repouso, a massa  $m_2$  está em contato com o solo e o fio que une  $m_1$  e  $m_2$  está frouxo, isto é,  $x_1 < l_2$ . Por conveniência, chamaremos a altura em que  $m_1$  inicia o movimento (na qual tem velocidade nula) de  $h_0$ .

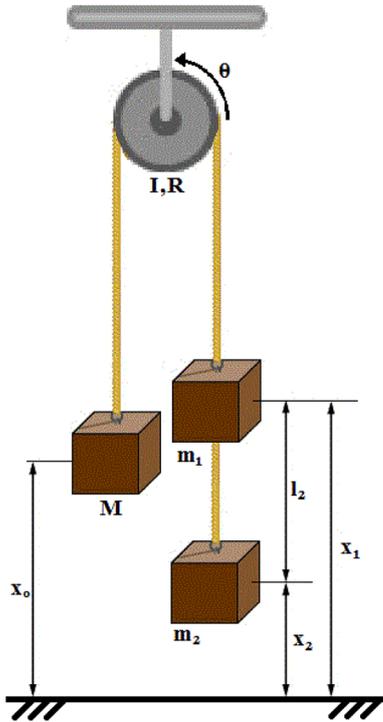


Figura 1 - Diagrama esquemático do experimento com a indicação das variáveis utilizadas na abordagem teórica.

Ao liberarmos o sistema as massas  $m_1$  e  $M$  ganham velocidade, enquanto a massa  $m_2$  permanece no solo. Em determinado instante, o fio, que antes estava frouxo, estica, erguendo  $m_2$ . A partir de então, o lado direito possui massa maior que o esquerdo, causando uma desaceleração do sistema, até que esse inverta seu movimento. Após algum tempo,  $m_2$  atinge o solo novamente e o sistema irá perder velocidade, até que essa se anule e obtenhamos uma situação análoga à inicial.

A diferença entre essa situação e o sistema inicial pode ser analisada pela nova altura de velocidade nula de  $m_1$ , que chamaremos de  $h_1$ . Dessa forma, é possível intuir que o sistema irá repetir o movimento descrito até que sua energia seja completamente dissipada. A cada oscilação, chegaremos a uma nova situação análoga à inicial, e denotaremos essas sucessivas alturas de  $m_1$  por  $h_n$ , onde  $n$  é o número de oscilações completas.

O sistema estudado evolui através de duas configurações, uma com a massa  $m_2$  em repouso no chão e outra com a massa  $m_2$  suspensa.

Quando a massa  $m_2$  encontra-se em repouso no chão podemos escrever a lagrangiana para o sistema

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}_1^2}{2} \left( m_1 + M + \frac{I}{R^2} \right) + (M - m_1)gx_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{(M - m_1)g}{m_1 + M + \frac{I}{R^2}}. \quad (1)$$

Por outro lado, quando a massa  $m_2$  encontra-se suspensa, obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}_1^2}{2} \left( m_1 + m_2 + M + \frac{I}{R^2} \right) - (m_1 + m_2 - M)gx_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{(m_1 + m_2 - M)g}{m_1 + m_2 + M + \frac{I}{R^2}}. \quad (2)$$

Definimos para o sistema o parâmetro

$$\gamma = \frac{m_1 + M + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + M + \frac{I}{R^2}}. \quad (3)$$

Quando o sistema passa da configuração com a massa  $m_2$  no chão para a configuração com ela suspensa, o momento angular do sistema é conservado, contanto que não ocorra deslizamentos na polia. Definindo  $\dot{x}'_1$  como a velocidade da massa  $m_1$  logo após o tracionamento do fio que une  $m_1$  a  $m_2$  podemos afirmar que

$$\dot{x}'_1 = \gamma x'' \quad (4)$$

A partir do que foi obtido acima, foi realizado um estudo da evolução da altura mínima que a massa  $m_1$  alcança com o decorrer do experimento. Para isso, estudou-se a evolução da energia do sistema, as perdas energéticas no tracionamento e na colisão da massa  $m_2$  com o chão. Dessa forma obtém-se

$$h_1 = \gamma^2 h_0 + (1 - \gamma^2) l_2 \Rightarrow h_{n+1} = \gamma^2 h_n + (1 - \gamma^2) l_2 \Rightarrow h_n = l_2 - (l_2 - h_0) \gamma^{2n}. \quad (5)$$

Definindo o parâmetro  $\alpha$  como a quantidade de tracionamentos do fio mais a quantidade de colisões da massa  $m_2$  com o chão obtém-se uma equação para a energia mecânica do sistema

$$E_\alpha = (M - m_1)(l_2 - h_0)g\gamma^\alpha.$$

### 3. Procedimentos experimentais e resultados

Para a aquisição de dados, duas técnicas simples foram utilizadas. Uma delas foi o *Photogate Pulley* da Pasco®[5], que consiste em um tacômetro acoplado à

uma polia, e que nos permite fazer a aquisição de dados através da interface *Science Workshop 750*. A outra técnica consiste numa adaptação do método minuciosamente descrito no artigo [6]: filmou-se a realização do experimento com uma câmera filmadora de alta taxa de captura (Sony HX200V), e posteriormente fez-se a análise do vídeo com a utilização do software Tracker [7], de domínio público, que possui diversas ferramentas dedicadas aos propósitos de aquisição de dados cinemáticos, diferente do software VirtualDub utilizado na Ref. [6], também de domínio público, cujo verdadeiro propósito é a edição de vídeos.

A utilização do software Tracker otimizou a obtenção de dados e gráficos, pois basta calibrá-lo com uma referência de tamanho no plano do experimento e um ponto de referência no corpo (que deve ser contrastante com o fundo), para que ele construa tabelas e gráficos com informações cinemáticas referentes ao objeto de estudo. Foram obtidos muitos pontos experimentais, pois a câmera capturava 60 quadros por segundo, e o experimento durou 17,5 s.

Para a montagem do sistema a ser estudado, utilizou-se como massas “chumbinhos” de pesca-ria, montados com pequenos ganchos que permitiam amarração. Eles estavam envoltos em papel alumínio, que foi utilizado para fixar algumas bolinhas de metal que serviam como ajuste fino das massas, além de aumentar o contraste com o fundo preto.

Os comprimentos e os valores das massas foram ajustados através da execução exaustiva do experimento, até que se obteve uma configuração que atendia os seguintes requisitos: era necessário que  $M$  não colidisse com o solo na primeira oscilação (que possui maior amplitude de movimento) e que fosse grande o número de oscilações perceptíveis; dentre as diferentes montagens que tentamos, a que se mostrou mais adequada foi quando as massas  $M$  e  $m_1$  possuíam valores próximos e o valor de  $m_2$  era pequeno em relação às demais. A Fig. 2(a) mostra a configuração da montagem, enquanto a Fig. 2(b) mostra as condições iniciais do experimento.

No intuito de reduzir os desvios devidos às condições experimentais, tomaram-se algumas medidas que refletiram no aspecto final do experimento. As mais importantes foram a utilização de massas densas e delgadas, de forma a evitar colisões entre elas, e a utilização de uma superfície amortecedora no local em que a massa  $m_2$  atinge o solo, a fim de evitar que ela se distancie muito da direção do movimento, o que provocaria oscilações indesejadas.

Os parâmetros do sistema experimental foram:  $M = 33,95$  g;  $m_1 = 28,95$  g;  $m_2 = 8,70$  g;  $I/R^2 = 3$  g;  $h = 14$  cm;  $l_2 = 54,5$  cm.

Como pode ser observado na Eq. (6), a energia mecânica total segue uma progressão geométrica cuja razão é o fator gama. Para a montagem apresentada na Fig. 2, o valor desse fator era 0,8834. As previsões

teóricas mostravam muito mais oscilações do que se observou na prática, de forma que resolveu-se observar como a energia diminuiu durante a execução do experimento. Notou-se que o caráter exponencial se manteve, porém a razão era menor do que gama, o que gerou o fator efetivo  $q$  corrigindo o valor de gama, onde procurou-se ajustar o valor de  $q$  de forma a aproximar os valores de energia nos primeiros patamares. A escolha de aproximar estes valores apenas nos primeiros patamares se deu por observar-se que os últimos são menos confiáveis, tendo em vista que devido aos tracionamentos, o sistema começa a oscilar na direção horizontal, e que a parcela da energia cinética devida a esse movimento não é levada em consideração.

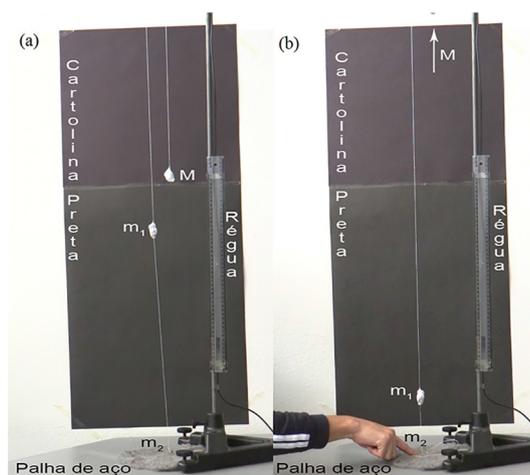


Figura 2 - (a) Montagem experimental: sistema na sua posição de equilíbrio (note as massa maiores aproximadamente a meia altura). (b) Condição inicial do experimento.

Através de uma regressão linear, decidiu-se que o melhor valor para o fator  $q$  era 0,92. Com essa correção, houve uma grande adequação dos dados experimentais com os teóricos nas primeiras iterações do sistema.

A respeito dos dados obtidos através do sistema da Pasco®, estes não puderam ser utilizados diretamente, pois o sensor não era capaz de identificar a direção do movimento, de forma que se obteve apenas o módulo da velocidade escalar e a distância percorrida pela massa, ao invés da posição dela. Para contornar este problema, criou-se um algoritmo simples que atribuía o sinal devido à velocidade, o que permitiu realizar a integração numérica e obtenção da posição em função do tempo.

Com os dados do Tracker, não se observou este problema, pois ele fornece a velocidade escalar e a posição do objeto em função do tempo. Além dessa vantagem, há também a garantia de fidelidade com a realidade, pois a menos da calibração e de variações no intervalo de captura pela câmera (que assumiu-se serem insignificantes), não há outras fontes de erro. Por esses motivos, os dados obtidos com o Tracker foram considerados como corretos.

O gráfico de velocidades escalares instantâneas (Fig. 3) apresenta um formato triangular, que corres-

ponde aos trechos de aceleração positiva e negativa. Como a aceleração é constante nesses intervalos, temos que a velocidade varia linearmente em cada um deles. Nas pontas de cima dos triângulos, nota-se a presença de descontinuidades no gráfico, que ocorrem pelos tracionamentos do fio que liga as massas  $m_1$  e  $m_2$ , causando variações bruscas na velocidade. Nas pontas de baixo essas descontinuidades não estão presentes, pois as colisões da massa  $m_2$  com o solo não influenciam diretamente na velocidade do sistema, somente na aceleração.

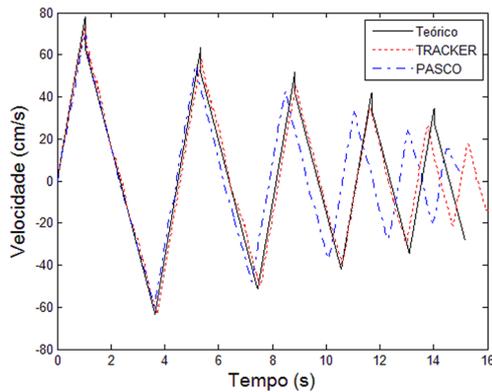


Figura 3 - Gráfico da velocidade em função do tempo.

Comparando as previsões teóricas com os resultados experimentais, nota-se que o modelo prevê muito bem o comportamento inicial, porém a partir da terceira iteração há um distanciamento entre os valores, provavelmente devido a efeitos dissipativos não considerados no modelo, como atrito no eixo da polia, deslizamento do fio sobre a polia, dentre outros.

O gráfico de posição em função do tempo (Fig. 4) apresenta um formato que se assemelha ao modelo de oscilações amortecidas (cuja equação é uma exponencial decrescente multiplicada por uma função senoidal), porém são arcos de parábola encaixantes, cuja amplitude decresce de acordo com o número de oscilações do sistema. Este movimento difere dos movimentos oscilatórios encontrados na literatura porque na máquina de Atwood a massa do sistema varia em intervalos de tempo decrescentes ao longo do tempo.

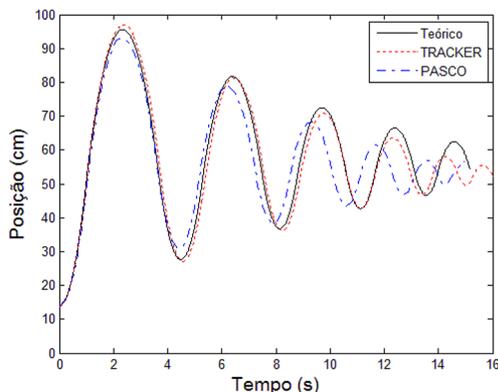


Figura 4 - Gráfico da posição em função do tempo.

Ao compararmos as previsões teóricas com as experimentais notamos que, assim como a velocidade, no começo há um ótimo ajuste entre as curvas, mas os efeitos dissipativos distanciam os resultados a partir da terceira iteração.

Na Fig. 5 é fácil notar os patamares de energia entre as colisões e os tracionamentos. Nas iterações próximas ao fim do movimento, há um aparente paradoxo: há instantes onde a energia mecânica total aumenta. Isso se deve principalmente ao fato de existir energia cinética devido às oscilações indesejadas e que não está sendo computada na energia mecânica total.

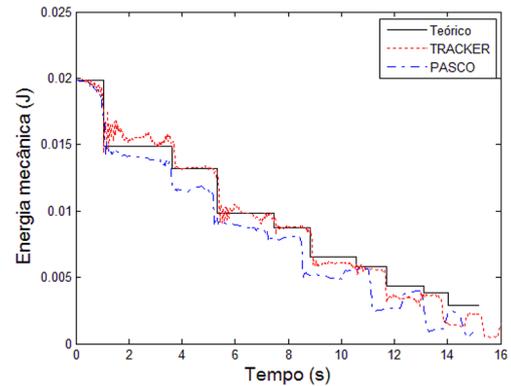


Figura 5 - Gráfico da energia mecânica em função do tempo.

Finalmente, observa-se nas figuras anteriores que as curvas cinemáticas e dinâmicas obtidas através da teoria e do software Tracker foram bastante concordante, a menos da dissipação de energia ao longo do movimento, e que o emprego do fotogate da Pasco, de custo bastante elevado, gerou resultados não tão satisfatórios. Isto se explica pela demora do software para o início da captura de dados, pois o sensor ligado à polia inicia a captura de dados da aceleração angular desta apenas após um giro de  $36^\circ$ , o que em movimento rápidos ocasiona erros nas medições.

#### 4. Conclusão

Os sistemas de massa variável são de importância inquestionável em diversos contextos: na engenharia mecânica, na física e em outras áreas não tão diretamente relacionadas, como o modelamento do crescimento tumoral [8], na biologia. Por conseguinte, é necessário que sejam utilizados bons modelos, que levem em conta as fugas à idealidade, inerentes ao mundo real. Conforme constatado, mesmo nos sistemas mais simples, pequenos efeitos dissipativos provocam, à longo prazo, uma divergência muito grande entre o resultado teórico e o experimental. Através do estudo dos sistemas cujas variações de massa são discretas, podemos avaliar as dissipações em um sistema cujas variações de massa sejam contínuas. Essa abordagem é conveniente, pois ao adicionarmos um intervalo de tempo perceptível

entre duas variações, podemos analisar o efeito de cada uma delas isoladamente.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo amparo à pesquisa no Laboratório de Mecânica e no Laboratório de Óptica e Espectroscopia do Depto de Física do ITA (processo 12/13064-4) e ao CNPq (Processo 406035/2013-0). O autor B. Lucatto agradece ao CNPq pela bolsa PIBIC (processo 129372/2013-7).

## Referências

- [1] C.P. Pesce, L. Casetta and E.A. Tannuri, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **XXVIII**, 496 (2006).
- [2] L. Casetta, *Contribuições à Mecânica dos Sistemas de Massa Variável*. Tese de Doutorado em Engenharia, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo 2008, 204 p.
- [3] B.N. Sismanoglu, J.S.E. Germano, R. Caetano, M.V.O. Rezende e Y.D. Hoyer, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **33**, 2310 (2011).
- [4] C.P. Pesce e L. Casetta, In: *19<sup>o</sup> International Congress of Mechanical Engineering*, Brasília, 2007.
- [5] [www.pasco.com](http://www.pasco.com), acesso em 31/2/2013.
- [6] B.N. Sismanoglu, J.S.E. Germano, J. Amorim e R. Caetano, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **31**, 1501 (2009).
- [7] <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>, acesso em 29/3/2013.
- [8] D. Ambrosi and F. Mollica, *International Journal of Engineering Science* **40**, 1297 (2002).