

Método dos limites e a capacitância exata de um condensador com placas não paralelas

(Limit method and the exact capacitance of the capacitor with not parallel plates)

A.C. Bertuola¹

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil

Recebido em 27/7/2011; Aceito em 26/4/2012; Publicado em 22/20/2012

Neste trabalho usou-se o método dos limites para obter uma expressão analítica exata da capacitância de um condensador de placas planas não paralelas. Em seguida, o resultado obtido foi comparado com outros resultados conseguidos por meio de dois diferentes métodos publicados.

Palavras-chave: capacitância, capacitor e método dos limites.

In this work the limit method was used to obtain an exact analytical expression of the capacitance for not parallel plane plate capacitor. Following, the result was compared with others results from other two different methods published previously.

Keywords: capacitance, capacitor and limit method.

1. Introdução

Há algum tempo atrás, dois artigos foram publicados nessa conceituada revista [1, 2] e lá discutiram técnicas para obter uma expressão analítica para a capacitância de um condensador com placas não paralelas. A figura a seguir esboça a forma do capacitor com suas características geométricas.

A Fig. 1a é o esboço do capacitor assimétrico de placas planas não paralelas, que é o sistema original de estudo. A Fig. 1b é uma primeira aproximação do sistema original, representado esquematicamente por uma associação em paralelo de dois capacitores de placas paralelas. A Fig. 1c mostra outro capacitor de placas não paralelas, porém com uma configuração simétrica angular.² Ambos os artigos recordaram em detalhes uma solução obtida por meio de integrações (método da integral - MI), conhecida desde a década de sessenta do século passado, publicada em um manual de exercícios resolvidos [3]. O primeiro artigo mencionou utilizou o método dos limites (ML) para chegar a uma expressão analítica aproximada, enquanto no outro artigo publicado em seguida, utilizando-se de outro método (chamaremos de método simétrico circular - MSC), os seus autores chegaram a uma solução exata diferente daquela do manual. O quadro a seguir contém os resulta-

dos principais dos artigos declarados acima, classificados pelos métodos usados.

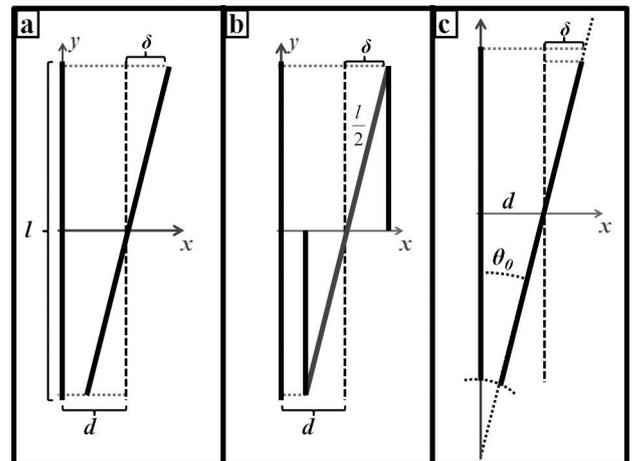


Figura 1 - Capacitor de placas planas não paralelas.

Nota-se da Tabela 1 que as soluções exatas³ obtidas pelo método da integral e pelo método simétrico circular, a primeira vista aparentam ser diferentes. Essa diferença pode ser conferida comparando as suas capacitâncias: $C_{MSC} = \frac{\tan \theta_0}{\theta_0} C_{MI}$. Lembrando que o valor da tangente de um ângulo é maior que o comprimento do arco subtendido pelo mesmo ângulo, o valor da

¹E-mail: acbertuola@gmail.com.

Copyright by the Sociedade Brasileira de Física. Printed in Brazil.

²A partir dessa figura o leitor pode provar a igualdade $\tan \theta_0 = \frac{2\delta}{l}$.

³A capacitância de um usual capacitor de placas planas paralelas separadas por uma distância d é calculada por meio da igualdade $C_0 = \frac{S}{4\pi d}$, em que S é a área das placas do capacitor.

capacitância obtida no MSC será maior que o valor da capacitância obtido pelo método MI. As soluções aproximadas (em $\frac{\delta}{d}$) se equivalem nas perspectivas dos três métodos. O método dos limites não apresentou uma solução exata para o problema e, este é um dos objetivos deste trabalho para que a tabela fique completa. O segundo objetivo é comparar as expressões analíticas exatas e investigar as condições em que elas se caracterizem semelhantes.

Tabela 1 - Principais resultados obtidos pelos métodos utilizados.

| Método | Solução exata | Solução aproximada |
|--------|--|--|
| MI | $C_0 \frac{d}{2\delta} \ln \left(\frac{d+\delta}{d-\delta} \right)$ | $C_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{3d^2} \right)$ |
| ML | - | $C_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{3d^2} \right)$ |
| MSC | $C_0 \frac{d}{l\theta_0} \ln \left(\frac{d+\delta}{d-\delta} \right)$ | $C_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{3d^2} \right)$ |

2. O método dos limites

O método dos limites é aquele em que o condensador de placas não paralelas é substituído por uma associação de capacitores de placas paralelas. Algumas aproximações são adotadas⁴ na esperança que, no limite em que a associação se estenda para um número infinito de capacitores, todos os erros desapareçam naturalmente e a capacitância da associação seja, então, equivalente a capacitância do condensador de placas não paralelas. A Fig. 1(b) mostra a associação com apenas dois capacitores de placas paralelas, mas a associação poderia ter quatro capacitores, oito capacitores e assim por diante. A respectiva capacitância para cada associação permite induzir a expressão analítica da capacitância para uma associação com 2^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) capacitores associados em paralelo como mostra as igualdades a seguir.

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = \frac{\bar{S}}{4\pi d} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{d}} + \frac{1}{1 - \frac{\delta}{d}} \right), \\ C_4 = \frac{\bar{S}}{4\pi d} \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{d}} + \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2d}} + \frac{1}{1 - \frac{\delta}{2d}} + \frac{1}{1 - \frac{\delta}{d}} \right), \\ \dots \\ C_{2^n} = \frac{\bar{S}}{4\pi d} \frac{1}{2^n} \left[\sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{1 - \left(\frac{i}{2^{n-1}} \right) \frac{\delta}{d}} + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{2^{n-1}} \right) \frac{\delta}{d}} \right]. \end{array} \right. \quad (1)$$

Pelo método dos limites a capacitância⁵ de um capacitor com placas não paralelas é obtida por meio da igualdade

$$C = \frac{1}{4\pi d} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{S}}{2^n} \left[\sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{1 - \left(\frac{i}{2^{n-1}} \right) \frac{\delta}{d}} + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{2^{n-1}} \right) \frac{\delta}{d}} \right]. \quad (2)$$

Utilizando o critério da integral para avaliar a convergência das séries na Eq. (2), a capacitância pode ser obtida, alternativamente, por meio da nova igualdade

$$C = \frac{1}{4\pi d} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{S}}{2^n} \left[\int_1^{2^{n-1}} \frac{dx}{1 - x \left(\frac{\delta}{2^{n-1}d} \right)} + \int_1^{2^{n-1}} \frac{dx}{1 + x \left(\frac{\delta}{2^{n-1}d} \right)} \right]. \quad (3)$$

Efetuando as integrais e tomando o limite indicado considerando a convergência $\bar{S} \rightarrow S$, a capacitância é dada explicitamente pela igualdade

$$C = C_0 \frac{d}{2\delta} \ln \left(\frac{d+\delta}{d-\delta} \right). \quad (4)$$

O valor da capacitância obtido com o método dos limites (4) coincide com a expressão analítica obtida pelo

⁴Efeitos de bordas são desprezados a priori.

⁵ \bar{S} é o valor da área total das placas paralelas dos capacitores da associação em paralelo.

método integral (tabela) e diferente daquele utilizando o método simétrico circular (tabela).

3. Discussão complementar

O leitor pode olhar para Fig. 1c e enxergar no triângulo desenhado a relação trigonométrica $\tan \theta_0 = \frac{2\delta}{l}$. Na aproximação em que $\tan \theta_0 \simeq \theta_0$ ($\theta_0 \simeq \frac{2\delta}{l}$), a capacitância obtida com o método simétrico circular se torna exatamente igual à expressão analítica exata (4), apresentada pelo método dos limites (e pelo método da integral). No entanto é pertinente perguntar se os sistemas estudados são realmente equivalentes entre si sob todos os pontos de vistas. Por exemplo, a respeito das formas das linhas de campo entre as placas, o método simétrico circular trabalha com arcos de circunferências concêntricas (centro O), por conta da simetria apresentada pelo sistema após o deslocamento relativo das placas. Nesse caso, convém lembrar que, quando as placas são movidas para a configuração mostrada na Fig. 1c, as linhas de campos do sistema assimétrico inicial (Fig. 1a) são deformadas para acompanhar as cargas elétricas contidas nas placas. Por isto, neste trabalho, não se conjectura a priori que os sistemas esboçados nas Figs. 1b e 1c se comportam inteiramente como sistemas análogos àquele original da Fig. 1a, pois as formas das linhas de campo elétrico podem ser completamente diferentes nos sistemas, ou seja, nem paralelas como foi adotado pelo método dos limites e, nem arcos de circunferências concêntricas assumidas no método simétrico circular. As diferenças entre as capacitâncias C_{MSC} e C_{MI} são atribuídas as deformações

nas linhas de campo, por exemplo, mantendo os capacitores sob um potencial constante V por meio de um gerador e, usando $C_i = \frac{2W_i}{V^2}$, nota-se que a capacitância é sensível a uma estimativa da energia do campo W_i . Dessa forma, a energia do campo na configuração assumida pelo método MSC é maior quando comparado com o valor de outro método (MI ou ML). Para saber realmente quais as formas das linhas de campo elétrico entre as placas do capacitor original, sugere-se uma simulação numérica [4], ou então, que seja realizado um elaborado experimento para coletar os dados experimentais.

4. Agradecimentos

Destaca-se um agradecimento para C. Frajuca pela leitura e outro para a CME do campus São Paulo pelo incentivo. Agradecimento especial ao árbitro que, atenciosamente, orientou as necessárias modificações para se chegar a forma final deste trabalho.

Referências

- [1] A.C. Bertuola e M.V. Figueredo, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **26**, 161 (2004).
- [2] J.W. Precker e W.P. da Silva, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **28**, 85 (2006).
- [3] J.B. Marion e M.A. Heald, *Solution Manual for Classical Electromagnetic Radiation* (Academic Press, New York, 1966).
- [4] A.F.L. Nogueira, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **28**, 445 (2006).