

## Skew decks in reinforced concrete bridges

### *Lajes esconsas em pontes de concreto armado*



**B. F. ROCHA**<sup>a</sup>  
bernardorochoa@id.uff.br

**M. SCHULZ**<sup>a</sup>  
mschulz@id.uff.br

#### Abstract

This research investigates reinforced concrete plates and shells with skew reinforcement whose directions are not aligned with the principal internal forces. Two normal forces, one tangential force, two bending moments, and one twisting moment are defined in the plane of the element. The analysis includes two shear forces in the transverse direction. The membrane and flexural forces are distributed between two panels at the upper and lower faces of the element. The smeared cracking model, equilibrium considerations, and plasticity approach yield the design equations of the skew reinforcement. The slab reinforcement of flat bridges, with and without lateral beams and girder bridges are compared considering different skew angles. The minimum reinforcement criteria of skew meshes are discussed. The results show that skew reinforcement yields higher steel and concrete stresses.

**Keywords:** shell structures, shell design, skew reinforcement, slabs, skew bridges.

#### Resumo

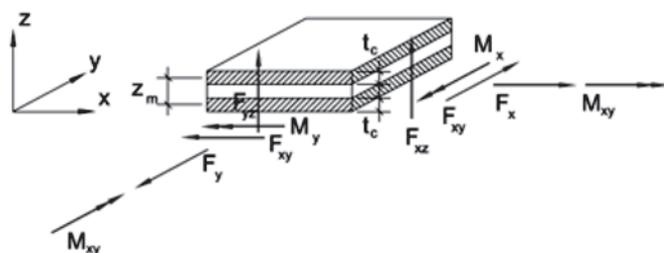
Essa pesquisa investiga estruturas laminares de concreto armado com armaduras esconsas e oblíquas em relação às solicitações. Duas forças normais, uma força tangencial, dois momentos fletores e um momento volvente são definidos no plano do elemento. A análise inclui duas forças cortantes na direção transversal. As solicitações de membrana e flexão são distribuídas entre duas chapas nas faces superior e inferior do elemento. As armaduras esconsas são calculadas através das condições de equilíbrio e de uma abordagem plástica pelo modelo da chapa fissurada. O trabalho compara as armaduras das lajes de pontes em laje, pontes em laje com vigas laterais e pontes em vigas múltiplas segundo diversos ângulos de esconsidade. Os resultados mostram que a utilização de malhas esconsas aumenta as tensões no aço e no concreto. Critérios para armaduras mínimas em malhas esconsas são discutidos.

**Palavras-chave:** estruturas laminares, dimensionamento de cascas, armadura esconsa, armadura oblíqua, pontes esconsas.

<sup>a</sup> Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil.

## 1. Introdução

Os elementos de cascas de concreto armado estão sujeitos ao estado duplo de tensões, no caso das solicitações no próprio plano, ou ao estado triplo de tensões, quando também ocorrem solicitações na direção transversal. Os esforços  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_{xy}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$ , no próprio plano, e os esforços  $F_{xz}$  e  $F_{yz}$ , na direção transversal, são definidos na Figura 1. O conjunto completo de solicitações deve ser considerado na determinação das armaduras, cujas direções não necessariamente concordam com a direção das solicitações. O modelo mecânico da chapa fissurada de concreto armado é adotado em diversas referências. Falconer [1] utiliza esse modelo no dimensionamento da armadura transversal de vigas e paredes de concreto armado. Nielsen [2] determina as equações de dimensionamento de placas ortogonais de concreto armado sujeitas a solicitações de membrana, utilizando uma abordagem plástica. Wood, Mills e Armer [3] [4] discutem o dimensionamento de lajes sujeitas a um conjunto de momentos cujas direções principais não coincidem com as direções das armaduras. Baumann [5] estabelece o equilíbrio do elemento de casca sujeito simultaneamente a solicitações de membrana, flexão e torção, dividindo as solicitações entre duas chapas localizadas nas faces superior e inferior. Essas chapas estão solicitadas apenas aos esforços de membrana, e são dimensionadas como tal, admitindo o comportamento linear e minimizando a energia de deformação. O apêndice 2 do boletim 141 do CEB-FIP [6] utiliza a mesma partição, mas as chapas são dimensionadas através do método plástico de Nielsen [2]. Mitchel e Collins [7] determinam a equação do ângulo de inclinação das bielas, estabelecendo um modelo teórico mais geral, que denominam de teoria do campo de compressão diagonal. Schulz [8] apresenta uma teoria racional para o dimensionamento de cascas de concreto armado sujeitas a flexão, torção e solicitações no plano do elemento. Vecchio e Collins [9] desenvolvem o modelo do campo de compressão modificado para as placas de concreto armado, considerando as tensões de tração entre as fissuras, o enrijecimento na tração e o amolecimento da compressão. Estas relações são usadas por Polak e Vecchio [10] na análise teórica e experimental de cascas de concreto armado. Schulz [11] aplica a teoria da chapa fissurada em peças de paredes esbeltas em concreto armado. Os elementos estão submetidos a força normal, esforços cortantes, momentos fletores, torção de Saint-Venant, torção de empenamento e bimomento. Schulz e Santisi D'Avila [12] investigam cascas de concreto armado sob efeito simultâneo de solicitações no plano e transversais ao plano médio, onde o elemento é dividido em camadas com compor-



**Figura 1**  
Solicitações atuantes em um elemento de casca

tamento triaxial. Schulz e Oliveira [13] apresentam um método de dimensionamento de elementos laminares de concreto armado com armaduras esconsas, que é uma extensão do método recomendado no boletim número 141 do CEB-FIP [6].

No presente trabalho, os procedimentos de dimensionamento de cascas são discutidos e aplicados a pontes esconsas de concreto armado. Os esforços no plano e transversais ao plano médio são considerados. Pontes em lajes, com e sem vigas laterais, e lajes de pontes em vigas múltiplas são analisadas variando os ângulos de esconsidade entre  $0^\circ$  e  $45^\circ$ . O problema é tratado no sistema local, simplificando o cálculo manual e a implementação computacional. Recomendações para o dimensionamento e critérios para armaduras mínimas são apresentados e discutidos. A análise comparativa dos resultados mostra que a esconsidade aumenta a armadura necessária e as tensões no concreto, comprovando a relevância da formulação.

## 2. Modelo de dimensionamento

### 2.1 Hipóteses básicas

As hipóteses básicas do modelo mecânico são: o concreto não resiste à tração; as fissuras são infinitesimais e uniformemente distribuídas; e as tensões de compressão no concreto são orientadas conforme a direção das bielas, que pode variar ao longo do comprimento da peça.

São consideradas as seguintes simplificações: as direções das fissuras são independentes da história do carregamento; o engrenamento entre as fissuras e o encavilhamento das armaduras é desprezado; não são descontadas as áreas de concreto ocupadas pelas armaduras; e as armaduras comprimidas não contribuem para a capacidade resistente das chapas.

Conforme recomendado no Eurocode 2 [14], aplica-se o fator de redução da resistência do concreto  $k=0,60$ . Este fator representa a superposição dos coeficientes 0,85 e 0,70, que estão respectivamente associados ao efeito Rüsche e à redução da resistência induzida pelas armaduras transversais tracionadas, conforme discutido por Robinson e Demorieux [15].

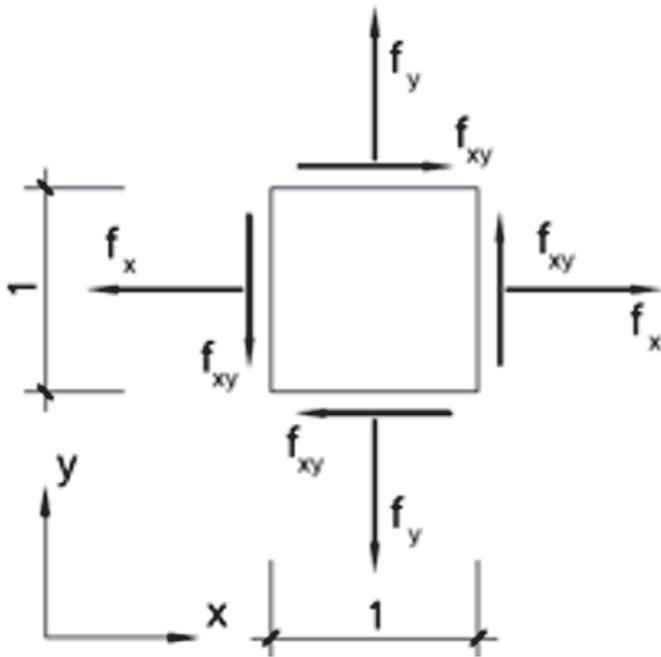
### 2.2 Redução do problema geral ao dimensionamento de chapas

O elemento laminar apresenta dimensões unitárias em planta (Figura 1). As seis solicitações em seu próprio plano  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_{xy}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  e a duas solicitações transversais  $F_{xz}$  e  $F_{yz}$  são definidas através de seus valores de cálculo e, portanto, incluem os coeficientes de majoração das cargas.

Supõem-se duas regiões bem definidas nas faces inferior e superior, com a mesma espessura  $t_c$  (Figura 1). A flexão é extraída do problema repartindo as solicitações entre essas duas regiões, que são dimensionadas como chapas. As solicitações nas chapas por unidade de comprimento, definidas na Figura 2, são dadas por:

$$f_x = \frac{F_x}{2} \pm \frac{M_x}{z_m} \quad (1)$$

$$f_y = \frac{F_y}{2} \pm \frac{M_y}{z_m} \quad (2)$$



**Figura 2**  
Ações por unidade de comprimento na chapa

$$f_{xy} = \frac{F_{xy}}{2} \pm \frac{M_{xy}}{z_m} \quad (3)$$

onde  $z_m$  é o braço de alavanca. As forças de tração são consideradas positivas.

A espessura das chapas  $t_c$  e o braço de alavanca  $z_m$  são definidos, de forma aproximada, através das expressões:

$$t_c = k_c \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) \quad (4)$$

$$z_m = k_z \left( \frac{d_x + d_y}{2} \right) \quad (5)$$

onde  $d_x$  e  $d_y$  são as alturas úteis nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Leonhardt [16] recomenda  $k_c=0,3$  e  $k_z=0,9$ . A espessura das chapas  $t_c$  de elementos predominantemente comprimidos pode ser aumentada desde que o braço de alavanca  $z_m$  seja reduzido de forma correspondente. Bertagnoli, Giordano e Mancini [17] propõem um algoritmo genético, variando a espessura das chapas extremas e dos braços de alavanca. Schulz [11] divide o elemento de casca em lamelas e determina as tensões utilizando equações de equilíbrio e de compatibilidade.

As forças nas direções principais são determinadas por:

$$f_I = \frac{f_x + f_y}{2} + \sqrt{\left( \frac{f_x - f_y}{2} \right)^2 + f_{xy}^2} \quad (6)$$

$$f_{II} = \frac{f_x + f_y}{2} - \sqrt{\left( \frac{f_x - f_y}{2} \right)^2 + f_{xy}^2} \quad (7)$$

Quando as forças principais são negativas, a chapa não necessita de armaduras de tração. Neste caso, a tensão de compressão  $f_{II}/t_c$  deve ser, em módulo, inferior a  $0,85f_c$ . A armadura de tração é necessária quando  $f_I > 0$ .

### 2.3 Dimensionamento da chapa com armaduras esconças

A Figura 3 mostra as forças resistentes de uma chapa com armaduras esconças. As armaduras são orientadas nas direções dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , definidos a partir do eixo  $x$ . As forças por unidade de comprimento nas armaduras resistentes são denominadas  $f_{sa}$  e  $f_{s\beta}$ . A força de compressão nas bielas de concreto, entre fissuras, é denominada  $f_{c\varphi}$ . O ângulo de orientação das microfissuras  $\varphi$  também é definido a partir do eixo  $x$ .

A decomposição da força  $f_{sa}$  é apresentada na Figura 4. A decomposição das forças  $f_{s\beta}$  e  $f_{c\varphi}$  são análogas. As condições de equilíbrio são expressas por:

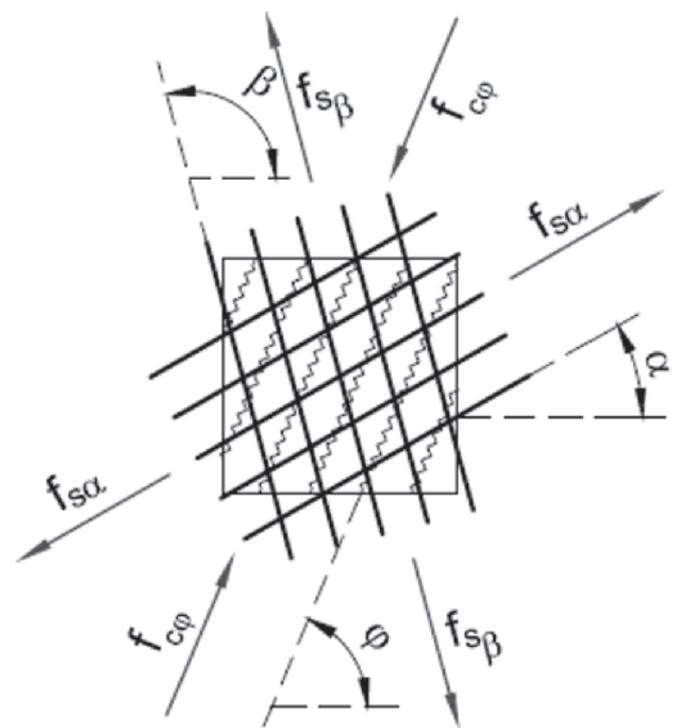
$$f_{c\varphi} \cos^2 \varphi + f_{sa} \cos^2 \alpha + f_{s\beta} \cos^2 \beta = f_x \quad (8)$$

$$f_{c\varphi} \sin^2 \varphi + f_{sa} \sin^2 \alpha + f_{s\beta} \sin^2 \beta = f_y \quad (9)$$

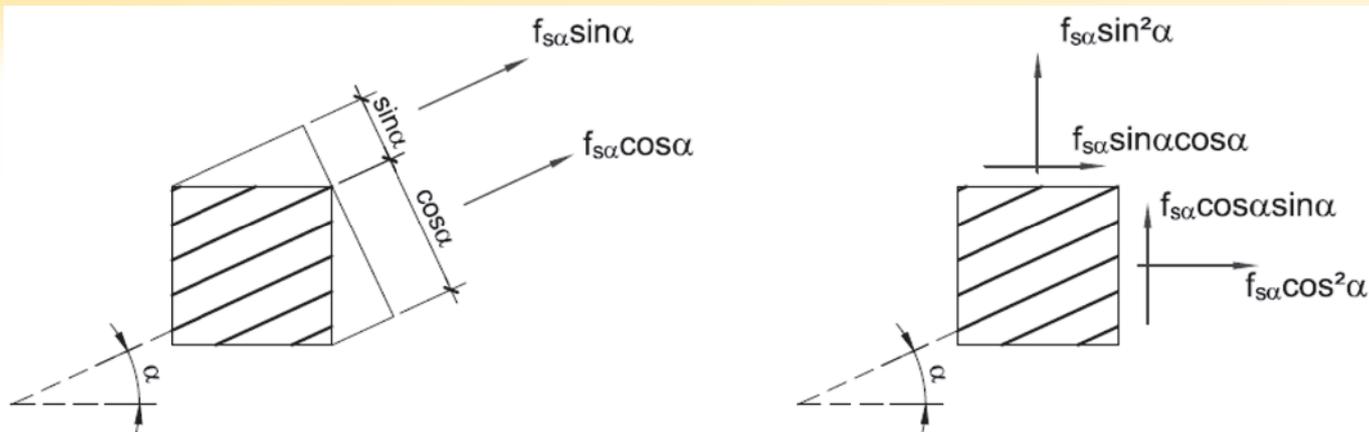
$$f_{c\varphi} \cos \varphi \sin \varphi + f_{sa} \cos \alpha \sin \alpha + f_{s\beta} \cos \beta \sin \beta = f_{xy} \quad (10)$$

Através da inversão do sistema definido de (11) a (13), tem-se

$$f_{c\varphi} = \frac{[-f_x \sin \beta \sin \alpha - f_y \cos \beta \cos \alpha + f_{xy} \sin(\beta + \alpha)]}{\sin(\beta - \varphi) \sin(\varphi - \alpha)} \quad (11)$$



**Figura 3**  
Forças resistentes na chapa com armadura esconça



**Figura 4**  
Forças nas armaduras na direção  $\alpha$  e decomposição em  $x$  e  $y$

$$f_{s\alpha} = \frac{[f_x \sin \beta \sin \varphi + f_y \cos \beta \cos \varphi - f_{xy} \sin(\beta + \varphi)]}{\sin(\beta - \alpha) \sin(\varphi - \alpha)} \quad (12)$$

$$f_{s\beta} = \frac{[f_x \sin \varphi \sin \alpha + f_y \cos \varphi \cos \alpha - f_{xy} \sin(\varphi + \alpha)]}{\sin(\beta - \alpha) \sin(\beta - \varphi)} \quad (13)$$

A soma das expressões (11), (12) e (13) fornece:

$$f_{c\varphi} + f_{s\alpha} + f_{s\beta} = f_x + f_y \quad (14)$$

De acordo com (14), a maximização da parcela  $f_{c\varphi}$  promove a minimização da soma das forças nas armaduras  $f_{s\alpha}$  e  $f_{s\beta}$ . Considerando que  $f_{c\varphi} < 0$ , a minimização das forças nas armaduras está associada à minimização do valor absoluto da tensão no concreto  $|f_{c\varphi}|$ . Assim, através de (11), tem-se:

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{if } -f_x \sin \beta \sin \alpha - f_y \cos \beta \cos \alpha + f_{xy} \sin(\beta + \alpha) \leq 0$$

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta + \pi}{2}$$

$$\text{if } -f_x \sin \beta \sin \alpha - f_y \cos \beta \cos \alpha + f_{xy} \sin(\beta + \alpha) > 0$$

(15)

As equações (11), (12), (13) e (15) definem o caso A de dimensionamento, quando são necessárias armaduras nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ . O caso B de dimensionamento é estabelecido quando a equação (12) fornece valores negativos para a armadura na direção  $\alpha$ . Substituindo  $f_{s\alpha} = 0$  em (12), tem-se:

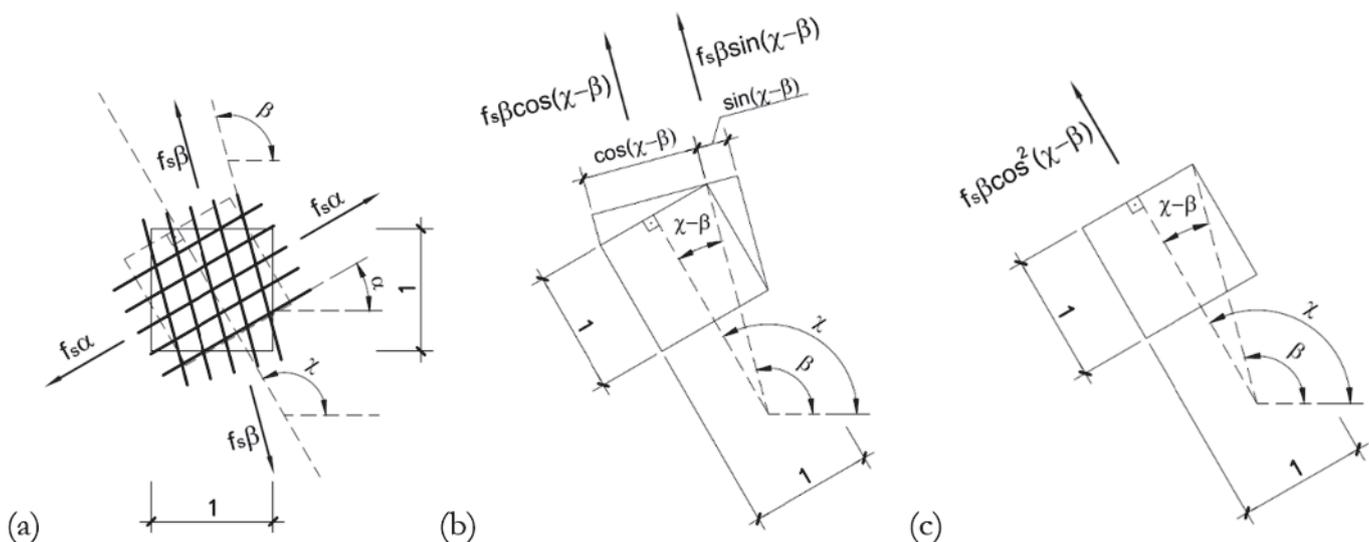
$$\tan \varphi = \frac{f_{xy} \sin \beta - f_y \cos \beta}{f_x \sin \beta - f_{xy} \cos \beta} \quad (16)$$

O caso C de dimensionamento é estabelecido quando a equação (13) fornece valores negativos para a armadura na direção  $\beta$ . De forma análoga, substituindo  $f_{s\beta} = 0$  em (13), tem-se

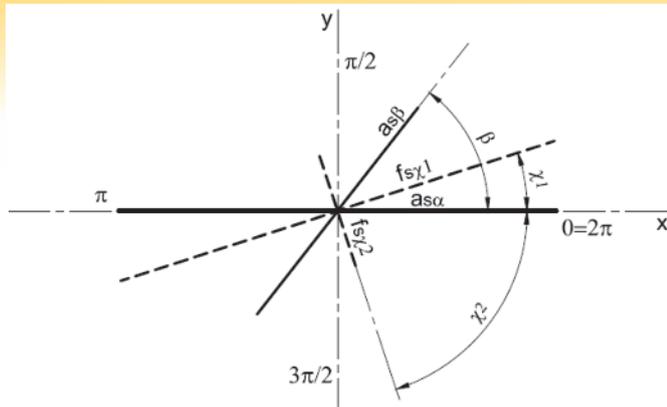
$$\tan \varphi = \frac{f_{xy} \sin \alpha - f_y \cos \alpha}{f_x \sin \alpha - f_{xy} \cos \alpha} \quad (17)$$

A tensão no concreto  $\sigma_c = f_{c\varphi} / t_c$  deve satisfazer a tensão admissível  $0,6f_{cd}$ . As áreas de aço  $a_{s\alpha}$  e  $a_{s\beta}$  nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, são calculadas considerando a resistência de cálculo do aço  $f_{yd}$ . Assim, tem-se:

$$\sigma_{c\varphi} = \frac{f_{c\varphi}}{t_c} \quad (18)$$



**Figura 5**  
(a) Forças nas armaduras na direção  $\alpha$  e  $\beta$ , e direção  $\chi$  qualquer, (b) e (c) decomposição de  $f_{s\beta}$  segundo a direção  $\chi$



**Figura 6**  
Representação gráfica de  $a_{s\alpha}$ ,  $a_{s\beta}$ ,  $f_{sx1}$  e  $f_{sx2}$

$$a_{s\alpha} = \frac{f_{sa}}{f_{yd}} \tag{19}$$

$$a_{s\beta} = \frac{f_{s\beta}}{f_{yd}} \tag{20}$$

**2.4 Relações mínimas entre armaduras e armaduras mínimas**

As direções das resultantes máxima e mínima das forças nas armaduras são perpendiculares entre si. A relação mínima entre as armaduras oblíquas é definida de forma a garantir que a resultante mínima seja maior ou igual a 20% da resultante máxima. Essa proposta procura satisfazer e generalizar o critério de armadura mínima de malhas ortogonais, indicado pela NBR 6118:2014 [18] e outras normas.

A Figura 5 mostra as forças nas armaduras  $f_{sa}$  e  $f_{s\beta}$ , por unidade de comprimento, nas direções  $\alpha$  e  $\beta$ , e a decomposição de  $f_{s\beta}$  em

uma direção  $\chi$  qualquer, definida a partir do eixo x. A resultante das forças nas armaduras  $f_{sx}$ , por unidade de comprimento e segundo a direção  $\chi$ , é dada por:

$$f_{sx} = f_{sa} \cos^2(\chi - \alpha) + f_{s\beta} \cos^2(\chi - \beta) \tag{21}$$

Os ângulos  $\chi_1$  e  $\chi_2$ , respectivamente associados às resultantes máxima e mínima  $f_{sx1}$  e  $f_{sx2}$  são definidos na Figura 6. Derivando (21) e igualando a zero, tem-se:

$$\tan(2\chi_1) = \tan(2\chi_2) = \frac{\sin(2\alpha) + r_{\beta\alpha} \sin(2\beta)}{\cos(2\alpha) + r_{\beta\alpha} \cos(2\beta)} \tag{22}$$

onde  $r_{\beta\alpha} = f_{s\beta}/f_{sa}$  e  $f_{sa}$  é a força na armadura principal. A expressão (26) permite concluir que  $\chi_1$  e  $\chi_2$  são ortogonais. As resultantes  $f_{sx1}$  e  $f_{sx2}$  devem atender:

$$\frac{f_{sx2}}{f_{sx1}} \geq 0.20 \tag{23}$$

A solução de (21) a (23), através de um processo iterativo detalhado em Rocha [19], fornece as relações mínimas  $r_{\beta\alpha, \min}$  apresentadas na Tabela 1, para diversos ângulos entre armaduras  $\beta - \alpha$ .

O processo iterativo não apresenta convergência para  $\beta - \alpha < 48,2^\circ$ . O estudo teórico a seguir investiga esses casos limites adotando  $f_{s\beta} = f_{sa}$  a favor da segurança, mas deixa claro que a utilização de malhas oblíquas muito inclinadas não é recomendada. Tem-se, através de (21),

$$f'_{sx1} = 2f_{sa} \cos^2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \tag{24}$$

A condição  $f_{sx2, \text{necessário}} \geq 0,2f_{sx1, \text{necessário}}$  e (21) fornece:

$$f'_{sx2} = 2k f_{sa} \sin^2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \tag{25}$$

**Tabela 1**

Armadura secundária mínima para diferentes ângulos entre armaduras

$\beta - \alpha$ (°)	90,0	85,0	80,0	75,0	70,0	65,0	60,0	55,0	50,0	48,2	45,0
$r_{\beta\alpha, \min}$	0,200	0,202	0,210	0,222	0,243	0,275	0,325	0,414	0,625	1,000	1,000*

**Tabela 2**

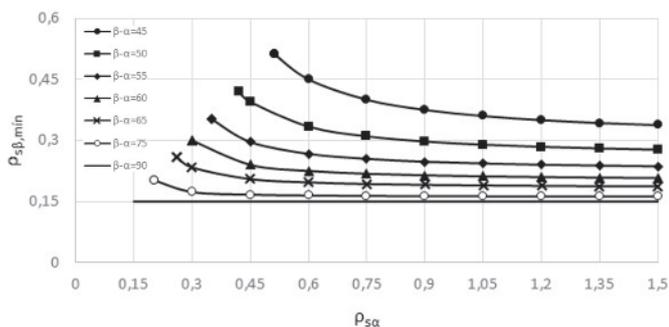
Fatores de majoração da armadura calculada para diversos ângulos entre armaduras

$\beta - \alpha$ (°)	$\leq 48,2$	45,0	40,0	35,0	30,0	25,0	20,0	15,0	10,0	5,0	0,0
k	1,000	1,166	1,510	2,012	2,786	4,069	6,433	11,539	26,129	104,92	$\infty$

**Tabela 3**

Taxa geométrica mínima de armadura para diversos ângulos de esconidade

	$\beta - \alpha$ (°)	90,0	85,0	80,0	75,0	70,0	65,0	60,0	55,0	50,0	48,2	45,0
$\rho_{s, \min}$	$\leq C30$	0,150%	0,164%	0,182%	0,202%	0,228%	0,260%	0,300%	0,352%	0,420%	0,450%	0,512%
	C35	0,164%	0,180%	0,198%	0,221%	0,249%	0,284%	0,328%	0,385%	0,459%	0,492%	0,560%
	C40	0,179%	0,196%	0,217%	0,241%	0,272%	0,310%	0,358%	0,420%	0,501%	0,537%	0,611%
	C45	0,194%	0,212%	0,235%	0,262%	0,295%	0,336%	0,388%	0,455%	0,543%	0,582%	0,662%



**Figura 7**  
Taxas de armaduras mínimas para  $f_{ck} \leq 30\text{MPa}$

Substituindo (24) em (25), encontra-se:

$$k = 0.20 \cot^2 \frac{\beta - \alpha}{2} \tag{26}$$

onde  $k=0,2\cot^2[(\beta-\alpha)/2]$ . Os valores de  $k$  apresentados na Tabela 2 também indicam que o detalhamento de malhas oblíquas muito inclinadas deve ser evitado.

As forças nas armaduras devem atender a  $f_{s\alpha, \min} \geq f_{s, \min}$  e  $f_{s\beta, \min} \geq f_{s, \min}$  onde a força mínima  $f_{s, \min}$  é determinada através da armadura

mínima de norma. A condição  $f_{s\alpha, \min} \geq f_{s, \min}$ , na direção  $x_2$ , é garantida através de um algoritmo de otimização de planilha eletrônica. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 7. As taxas mínimas de armadura secundária  $\rho_{s\beta, \min}$ , na direção  $\beta$ , dependem da esconsidade e da taxa de armadura  $\rho_{s\alpha}$ , na direção  $\alpha$ . Os valores mínimos da taxa de armadura principal  $\rho_{s\alpha}$  são apresentados na Tabela 3.

### 2.5 Dimensionamento a esforço cortante

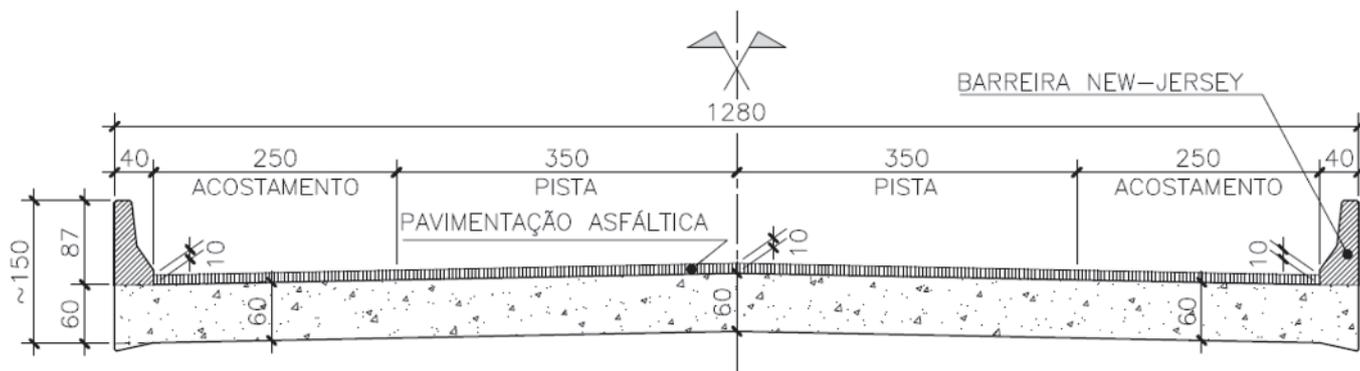
Schulz [11] e Marti[20] definem o seguinte esforço cortante  $F_{\theta z}$  na direção principal  $\theta$ :

$$F_{\theta z} = \sqrt{F_{xz}^2 + F_{yz}^2} \tag{27}$$

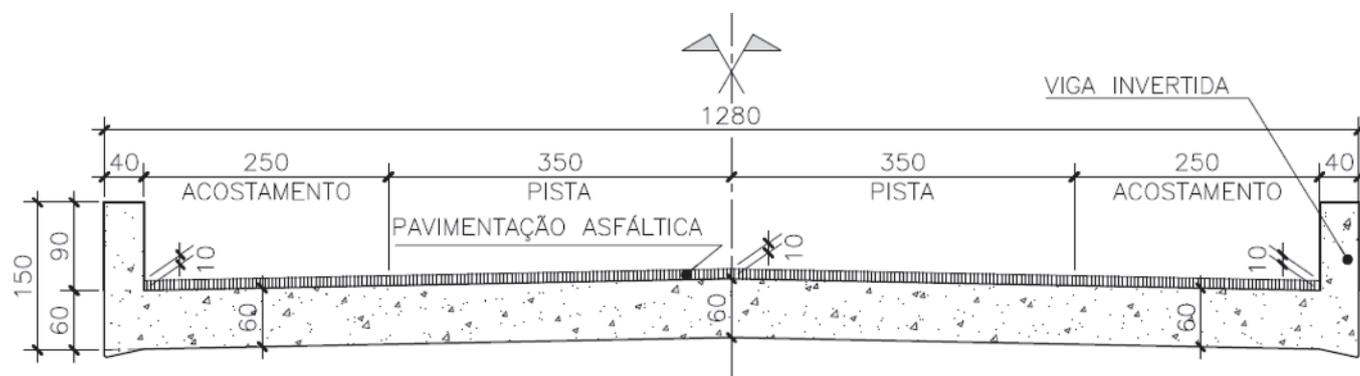
As seguintes forças de tração complementares devem ser consideradas, em cada uma das chapas inferior e superior, nas cascas armadas a esforço cortante:

$$nf_x = \frac{F_{xz}^2 \cot \theta}{F_{\theta z} \cdot 2} \tag{28}$$

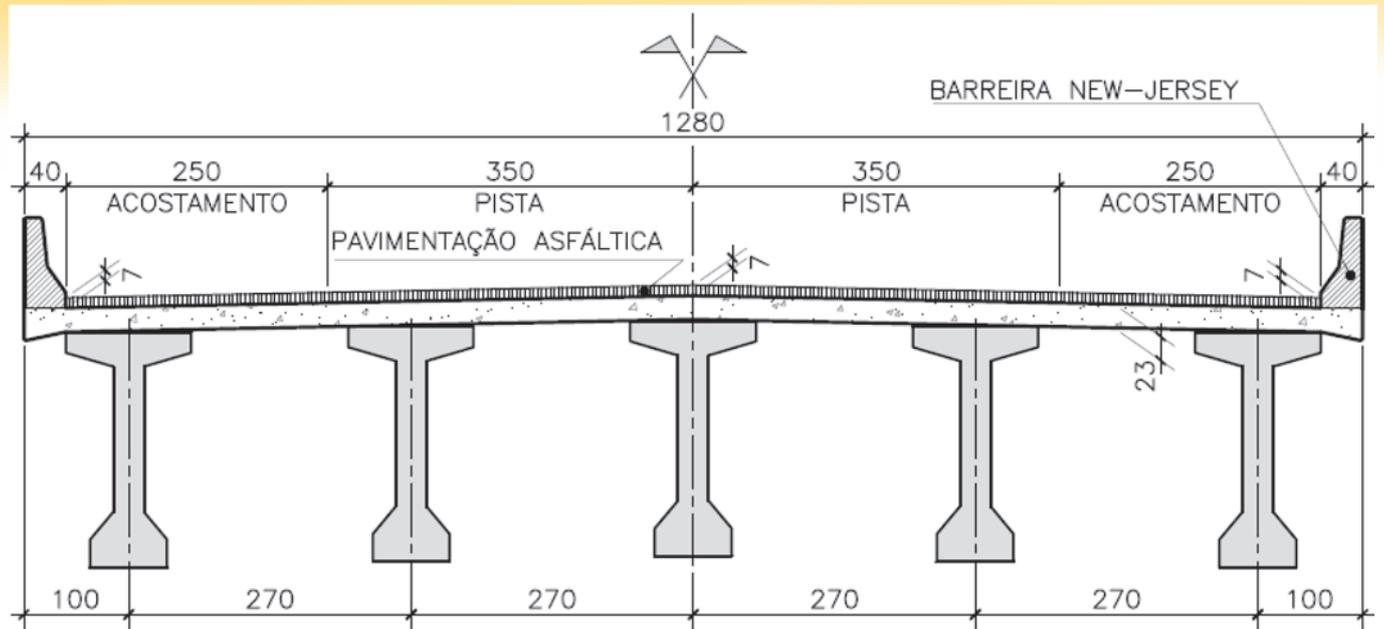
$$nf_y = \frac{F_{yz}^2 \cot \theta}{F_{\theta z} \cdot 2} \tag{29}$$



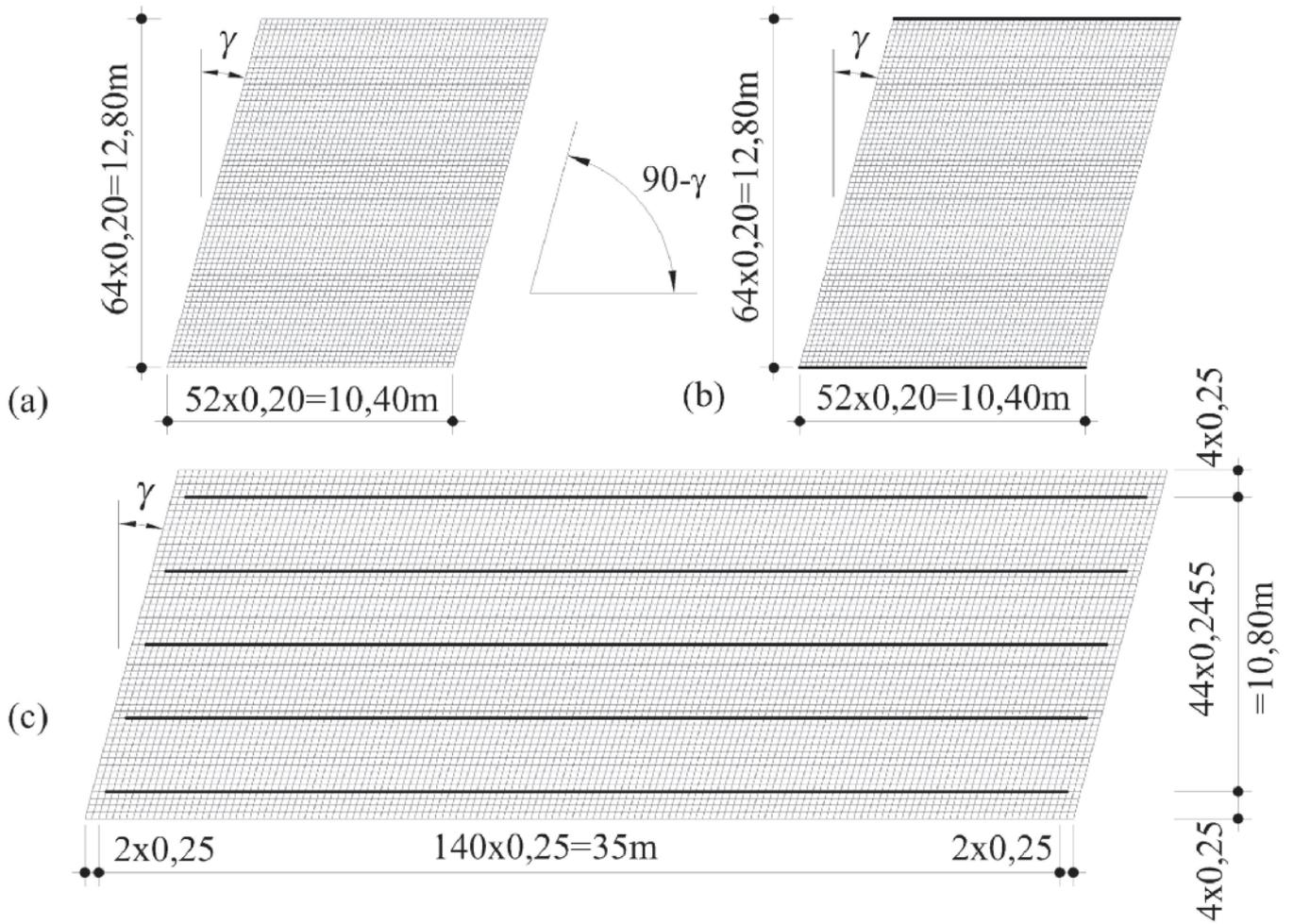
**Figura 8**  
Seção transversal típica das pontes em laje sem vigas laterais



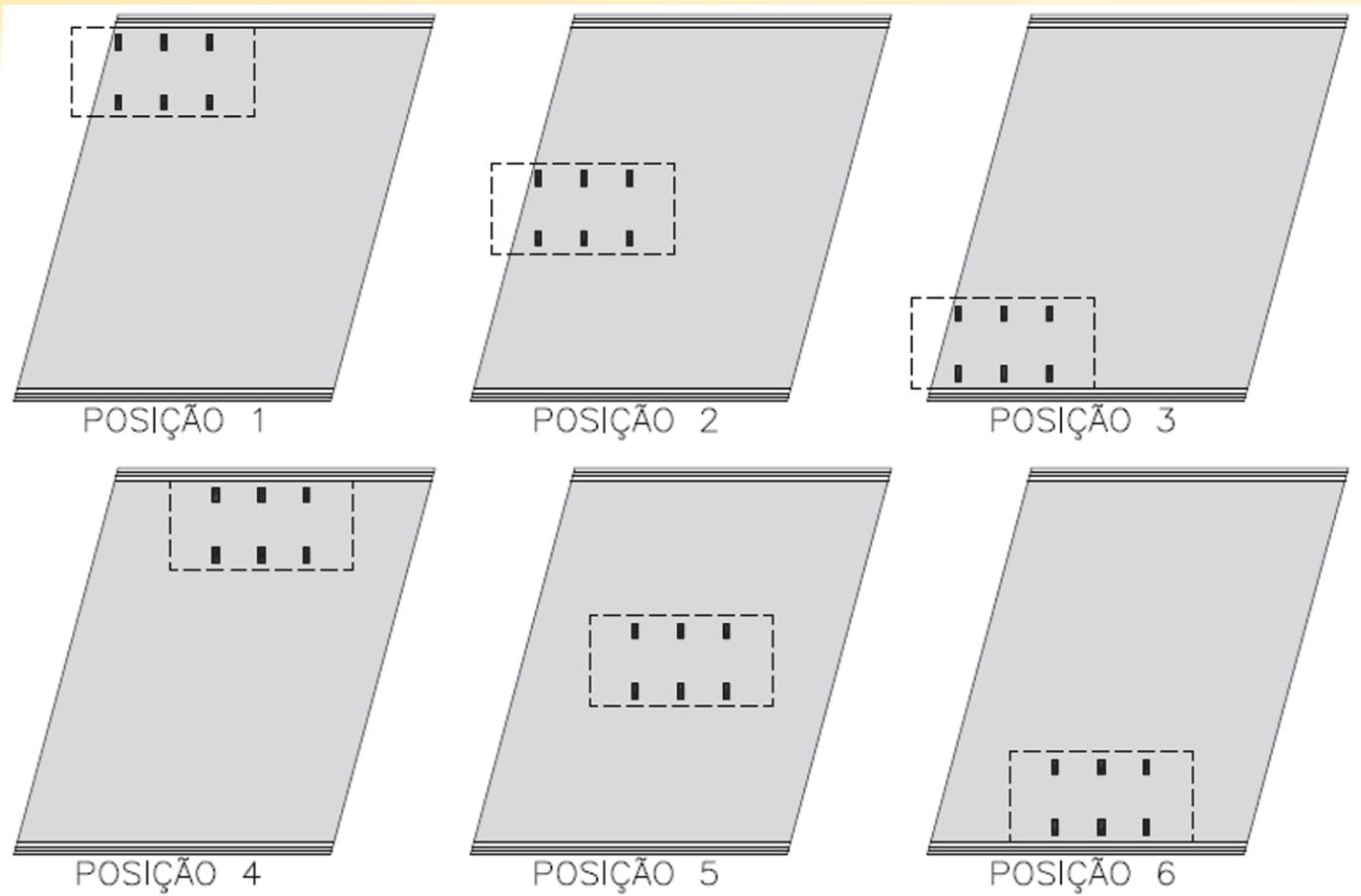
**Figura 9**  
Seção transversal típica das pontes em laje com vigas laterais



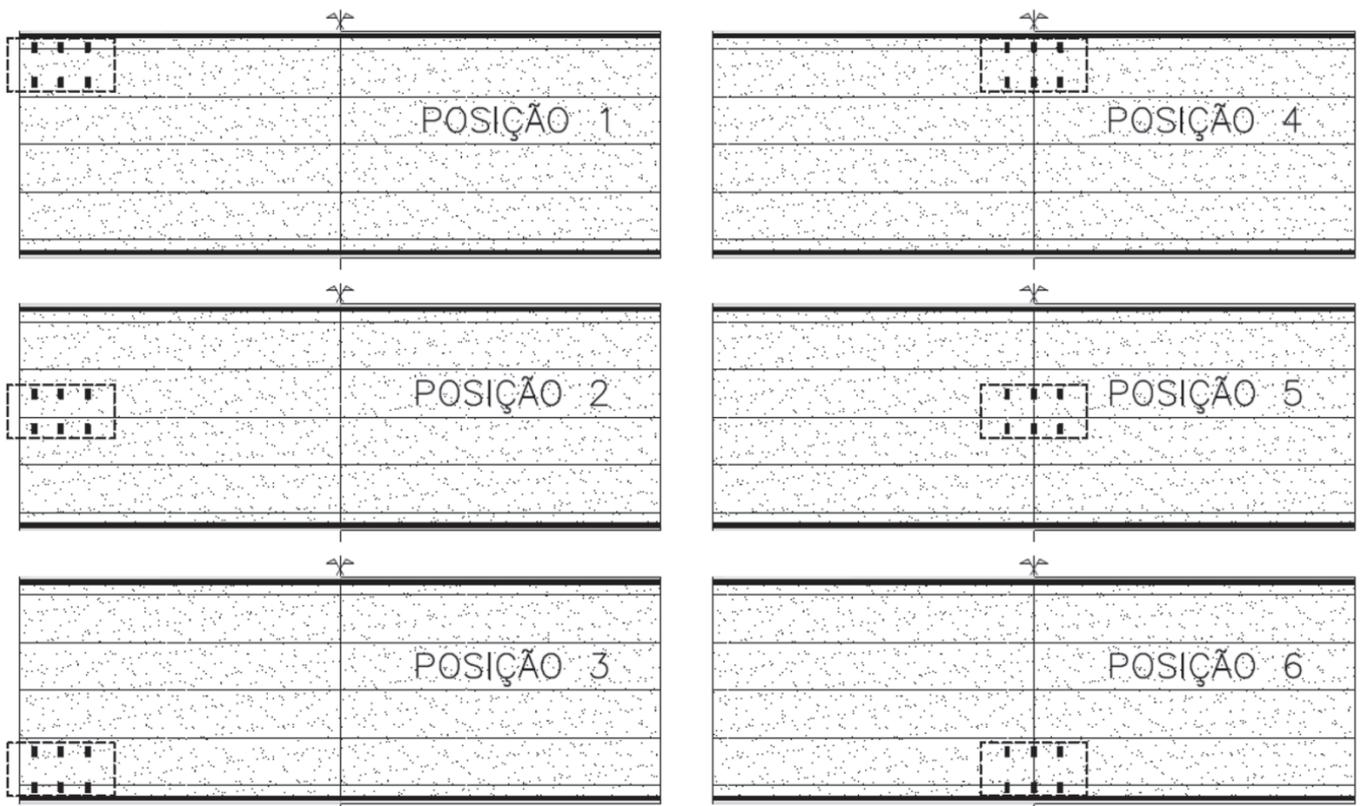
**Figura 10**  
Seção transversal típica das pontes em vigas múltiplas



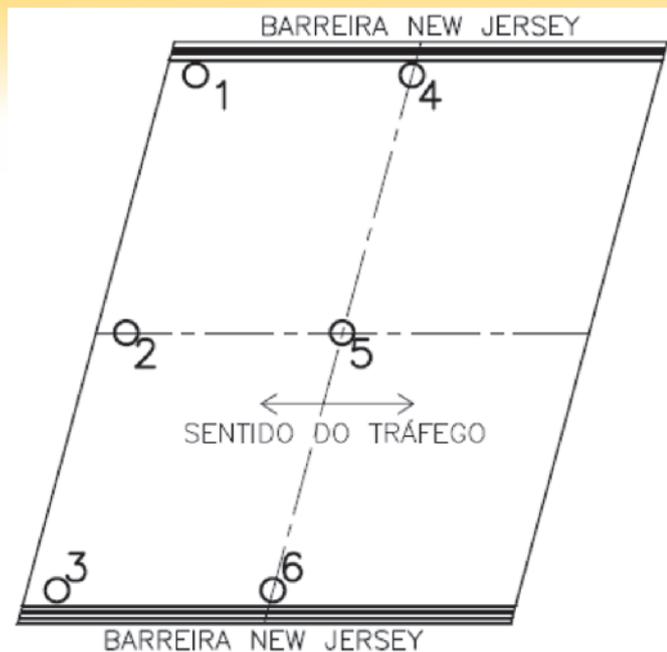
**Figure 11**  
Finite element models for (a) flat bridges without lateral beams, (b) flat bridges with lateral beams, and (c) multi-girder bridges



**Figura 12**  
 osicionamentos pré-definidos do veículo tipo para pontes em laje



**Figura 13**  
 Posicionamentos pré-definidos do veículo tipo para pontes em vigas múltiplas



**Figura 14**  
Pontos escolhidos para o dimensionamento das pontes em laje

$$nf_{xy} = \frac{F_{xz} F_{yz} \cot \varnothing}{F_{\theta z} 2} \quad (30)$$

onde  $\varnothing$  é o ângulo de inclinação das bielas. As forças complementares expressam o deslocamento do diagrama de forças nas armaduras tracionadas.

### 3. Casos estudados

A formulação apresentada é aplicada em exemplos de pontes em laje sem vigas, pontes em laje com vigas laterais invertidas e pontes em vigas múltiplas. Os sistemas estruturais, cujas seções transversais são apresentadas nas Figuras 8, 9 e 10, são analisados com os ângulos de 0°, 15°, 30° e 45° de esconsidade, através de modelos em elementos finitos.

As pontes em laje, com e sem vigas laterais, têm 60 cm de espessura e vão livre entre apoios, segundo a direção do tráfego, de 10,40m. As pontes em vigas múltiplas são estruturas monolíticas constituídas por 5 longarinas, com vão livre de 35m, duas transversinas de apoio e laje com 23cm de espessura. Todas as pontes têm 12,8m de largura, duas faixas de 3,5m e acostamentos de 2,5m. Nas pontes em laje com vigas laterais, as barreiras são substituídas por vigas invertidas com 1,5m de altura total.

As armaduras de flexão são dimensionadas através do modelo da chapa fissurada e do método proposto para malhas esconsas. O dimensionamento ao cisalhamento considera o esforço cortante equivalente, definido pela raiz quadrada da soma dos quadrados das componentes. A análise comparativa discute o dimensionamento das armaduras sem considerar outras verificações, tais como os estados limites de utilização, perdas diferidas e fadiga.

As lajes das pontes são modeladas no programa SAP 2000 [21] através de elementos finitos de casca fina. Os elementos de barra têm seus eixos deslocados para o centro de gravidade das vigas. O eixo local x dos elementos de casca é definido na direção da armadura longitudinal e do tráfego. Dessa forma, o ângulo  $\alpha$  é sempre zero e o ângulo  $\beta$  é definido por  $\beta=90^\circ-\gamma$ , onde  $\gamma$  é o ângulo de esconsidade da laje.

O concreto e o aço são, respectivamente, C35 e CA-50. O coeficiente de Poisson é considerado igual a 0,20 e adota-se o módulo de elasticidade do concreto da NBR 6118:2014 [18], considerando o uso de granito como agregado graúdo.

As cargas permanentes são o peso próprio estrutural, a pavimentação asfáltica, a carga de recapeamento e o peso das barreiras. O peso das vigas não foi considerado nas pontes em vigas múltiplas pois estas, sendo pré-moldadas, não geram solicitações nas lajes. A carga móvel é definida pela Classe 45 da NBR 7188:2013 [22], considerando o número de faixas e os coeficientes de impacto vertical e adicional. As posições do veículo tipo são mostradas nas Figuras 11 e 12. As dimensões dos elementos finitos são definidas de forma a facilitar a aplicação das cargas das rodas, conforme projetadas na superfície média das lajes.

As ações são combinadas conforme a NBR 8681:2003 [23]. As Figuras 13 e 14 apresentam os pontos de dimensionamento das armaduras.

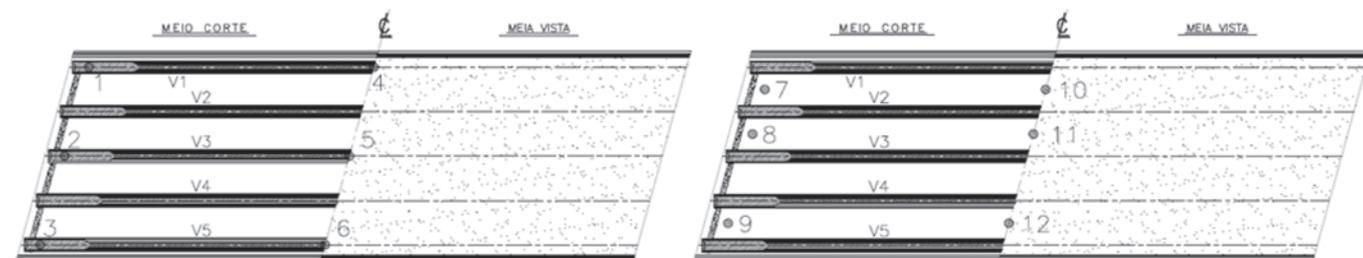
As armaduras transversais das pontes em laje são dimensionadas de acordo com a NBR 6118:2014 [18]. A verificação da necessidade de armadura transversal não leva em consideração a contribuição da armadura no plano da laje, uma vez que a direção da força cortante principal raramente coincide com a direção das armaduras. As pontes em laje são armadas a esforço cortante transversal. Os esforços cortantes das lajes das pontes em vigas múltiplas, obtidos através dos modelos e de verificações manuais complementares, dispensam armadura de cisalhamento.

A massa total de aço é determinada considerando detalhamentos esquemáticos. As faixas de distribuição das armaduras e outros aspectos de detalhamento são apresentados em Rocha [19].

### 4. Resultados e discussões

#### 4.1 Pontes em laje sem vigas laterais

A Tabela 4 apresenta as armaduras e as tensões no concreto nos pontos de dimensionamento das pontes em laje sem vigas laterais.



**Figura 15**  
Pontos escolhidos para o dimensionamento das pontes em vigas múltiplas

**Tabela 4**

Áreas de aço e tensões no concreto, nas pontes em laje sem vigas laterais

Ponto	$a_{\alpha, \text{sup}, \text{máx}}$ (cm <sup>2</sup> /m) / $a_{\alpha, \text{inf}, \text{máx}}$ (cm <sup>2</sup> /m)				$a_{\beta, \text{sup}, \text{máx}}$ (cm <sup>2</sup> /m) / $a_{\beta, \text{inf}, \text{máx}}$ (cm <sup>2</sup> /m)			
	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$
1	0/12,57	4,1/27,27	8,29/40,78	13,5/48,96	3,69/5,62	8,28/17,18	8,44/35,56	2,8/52,98
2	0/8,17	0/9,15	0,67/18,68	4,92/25,88	0,62/3,27	0,94/5,59	5,72/12,97	11,62/23
3	0/12,57	0/7,89	0/4,03	0/2,54	3,69/5,62	0,87/1,85	0,13/1,42	0,12/0,76
4	0/35,86	0/41,56	0/44,77	0/46,8	0/2,29	0/8,05	0,61/13,34	0,98/18,43
5	0/30,24	0/38,33	0/47,41	0/58,47	0/7,89	0/17,05	0/29,63	0/46,2
6	0/35,86	0/41,56	0/44,77	0/46,8	0/2,29	0/8,05	0,61/13,34	0,98/18,43

Ponto	$ \sigma_{c\phi, \text{sup}} _{\text{máx}}$ (MPa)				$ \sigma_{c\phi, \text{inf}} _{\text{máx}}$ (MPa)			
	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$
1	-2,76	-4,39	-4,79	-3,64	-2,68	-8,5	-17,33	-24,69
2	-1,8	-1,75	-2,11	-4,3	-1,27	-2,26	-5,51	-10,54
3	-2,76	-1,94	-1,04	-0,46	-2,68	-0,67	-0,65	-0,45
4	-9,2	-8,77	-7,17	-5,18	-0,19	-3,5	-7,54	-11,53
5	-7,76	-7,34	-6,12	-4,41	-0,21	-4,94	-12	-21,11
6	-9,2	-8,77	-7,17	-5,18	-0,19	-3,5	-7,54	-11,53

De maneira geral, a esconsidade aumenta as armaduras e as tensões de compressão no concreto. A malha inferior é mais densa e apresenta um aumento expressivo das armaduras. As armaduras dos cantos agudos apresentam redução.

Os parâmetros  $k_c=0,3$  e  $k_z=0,9$ , recomendados por Leonhardt [16], não atendem a tensão admissível do concreto nas pontes com ângulo de esconsidade de  $30^\circ$  e  $45^\circ$ . O CEB-FIP Model Code 1990 [24] propõe a alternativa de aumentar as espessuras das chapas extremas, reduzindo os braços de alavanca correspondentes. Este procedimento aumenta as armaduras necessárias e reduz as tensões no concreto. No entanto, a verificação das tensões no concreto não é satisfeita mesmo utilizando essa alternativa, e as pontes de  $30^\circ$  e  $45^\circ$  exigem concretos mais resistentes.

Os cantos obtusos apresentam momentos volventes e esforços cortantes concentrados. No restante da laje, os momentos transversais e volventes são majorados, mas a influência da esconsidade no esforço cortante não é crítica.

A Tabela 5 apresenta a massa total e as taxas de armadura das pontes em laje sem vigas. O aumento das armaduras está associado aos momentos transversais e volventes. As relações míni-

**Tabela 5**

Peso total e taxas de aço para as pontes em laje sem vigas laterais

$\gamma$	Peso total de aço (kg)	Taxas		P/P <sub>0</sub>
		kg/m <sup>2</sup>	kg/m <sup>3</sup>	
0°	7800	59	98	1,00
15°	10077	76	126	1,29
30°	15153	114	190	1,94
45°	23437	176	293	3,00

mas e as armaduras mínimas têm pequena influência na massa total de aço.

#### 4.2 Pontes em laje com vigas laterais

A Tabela 6 apresenta as armaduras e as tensões no concreto nos pontos de dimensionamento das pontes em laje com vigas laterais. As vigas laterais reduzem as armaduras necessárias e a influência da esconsidade nas armaduras superiores. A esconsidade aumenta as armaduras inferiores da mesma forma que nas pontes sem vigas.

A ponte com  $45^\circ$  não atende a verificação de tensões no concreto com os parâmetros  $k_c=0,3$  e  $k_z=0,9$ , recomendados por Leonhardt [16]. Tal como nas pontes sem vigas, a verificação das tensões no concreto não é satisfeita mesmo utilizando a alternativa do CEB-FIP Model Code 1990 [24], e a ponte de  $45^\circ$  exige o uso de concretos mais resistentes.

O deslocamento do eixo das vigas, em relação à laje, introduz forças longitudinais e de cisalhamento associadas ao comportamento como viga T. O modelo determina automaticamente a largura colaborante e a armadura de costura.

A Tabela 7 apresenta a massa total e as taxas de armadura das pontes em laje com vigas. As vigas laterais substituem as barreiras e promovem uma economia de 15%, 20%, 20% e 10% na armadura da laje, respectivamente para as esconsidades de  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $45^\circ$ .

#### 4.3 Pontes em vigas múltiplas

A Tabela 8 apresenta as armaduras e as tensões no concreto nas pontes em vigas múltiplas, considerando parâmetros  $k_c=0,3$  e  $k_z=0,9$ , recomendados por Leonhardt [16]. As tensões no concreto superam os valores admissíveis, pois a laje é a mesa de compressão das longarinas. A Tabela 9 apresenta os resultados utilizando a

**Tabela 6**

Áreas de aço e tensões no concreto, nas pontes em laje com vigas laterais

Ponto	$a_{\alpha, \text{sup}, \text{máx}} \text{ (cm}^2\text{/m)} / a_{\alpha, \text{inf}, \text{máx}} \text{ (cm}^2\text{/m)}$				$a_{\beta, \text{sup}, \text{máx}} \text{ (cm}^2\text{/m)} / a_{\beta, \text{inf}, \text{máx}} \text{ (cm}^2\text{/m)}$			
	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$
1	9,26/9,34	11,79/9,2	9,64/7,64	0,43/4,79	6,63/2,35	10,09/1,19	10,78/0	3,75/0
2	0/5,12	0/8,34	0,22/18,32	2,37/25,92	0/0	0/3,97	0/15,62	3,57/26,23
3	9,26/9,34	6,83/8,37	5,09/5,77	1,36/4,12	6,63/2,35	4,27/2,72	3,17/2,21	0/0,59
4	5,82/24,8	7,5/30,12	6,4/37,76	2,82/47,9	7,81/5,69	4,2/10,29	5,86/17,36	6,66/28,31
5	0/18,05	0/24,48	0/34,51	0/52,08	0/14,37	0/20,02	0/27,81	0/43,09
6	5,82/24,8	7,5/30,12	6,4/37,76	2,82/47,9	7,81/5,69	4,2/10,29	5,86/17,36	6,66/28,31

Ponto	$ \sigma_{c\phi, \text{sup}} _{\text{máx}} \text{ (MPa)}$				$ \sigma_{c\phi, \text{inf}} _{\text{máx}} \text{ (MPa)}$			
	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$
1	-5,03	-6,75	-6,55	-2,04	-2	-2,01	-1,59	-1,33
2	-1,52	-1,55	-1,47	-1,92	-0,65	-1,96	-6,67	-11,73
3	-5,03	-3,44	-1,96	-0,67	-2	-1,38	-0,53	-0,51
4	-0,52	-1,66	-2,01	-1,8	-0,2	-2,62	-6,95	-13,47
5	-5,3	-5,28	-4,98	-4,1	-0,19	-3,41	-8,97	-18,86
6	-0,52	-1,66	-2,01	-1,8	-0,2	-2,62	-6,95	-13,47

alternativa indicada no CEB-FIP Model Code 1990 [24], com chapas mais espessas e braços de alavanca correspondentes (Figura 15). As tensões no concreto atendem a tensão admissível para 0° e 15° e, de forma aproximada, para a esconsidade de 30°. A ponte com 45° requer o concreto C60 ou 30cm de espessura de laje.

A esconsidade altera o momento volvente  $M_{xy}$  e as forças normais na direção transversal  $F_y$ . O acréscimo da massa total de aço (Tabela 10) está associado à armadura efetivamente necessária, pois as armaduras mínimas têm pequena influência no resultado.

O dimensionamento de malhas ortogonais, utilizando os resultados dos modelos esconsos, não aumenta significativamente a armadura necessária. As malhas ortogonais e variáveis são mais econômicas. As malhas oblíquas facilitam o detalhamento e a execução. Essas alternativas devem ser avaliadas no caso de pontes esconsas em vigas múltiplas.

### 5. Considerações finais

Este trabalho apresenta aspectos do dimensionamento de estruturas laminares de concreto com armaduras esconsas entre si, e oblíquas em relação às direções das solicitações. Os esforços no plano do elemento são duas forças normais, uma força tangencial, dois momentos fletores e um momento volvente. Dois esforços cortantes atuam na direção transversal ao plano do elemento. O modelo de dimensionamento é baseado na teoria da chapa fissurada de concreto armado.

São apresentados exemplos completos de dimensionamento de pontes em laje sem vigas, pontes estruturadas em laje com vigas laterais e pontes em vigas múltiplas, para ângulos de esconsidade de 0°, 15°, 30° e 45°.

As pontes em laje sem vigas laterais indicam que são necessárias armaduras na face superior, especialmente nos casos de maior esconsidade. As regiões dos bordos livres das pontes com 0°, 15° e 30° apresentam os valores máximos das armaduras principais. A armadura máxima da ponte com 45° é verificada no centro da laje.

A esconsidade aumenta significativamente as armaduras secundárias e as armaduras nos cantos obtusos. As tensões no concreto são maiores, em módulo, na chapa inferior e nos cantos obtusos.

A utilização de vigas laterais diminui a armadura necessária, mas não altera a localização das máximas armaduras longitudinais. As vigas laterais também reduzem a necessidade de armadura dos cantos obtusos. As armaduras dos cantos agudos e obtusos são semelhantes. As tensões no concreto também são maiores, em módulo, na chapa inferior, porém são observadas na região do meio do vão. A utilização de vigas laterais reduz, significativamente, a massa total de aço e a compressão no concreto.

As maiores armaduras inferiores das lajes das pontes em vigas múltiplas são obtidas na região do meio do vão, entre as vigas principais. As armaduras superiores máximas são obtidas sobre as longarinas, junto aos apoios. As tensões no concreto são mais elevadas no meio do vão, pois a laje é mesa de compressão das longarinas. As lajes de pontes em vigas múltiplas devem ser dimensionadas utilizando-se o modelo de duas chapas proposto por Baumann [5]. A aproximação de Wood, Mills e Armer [3][4] não deve ser adotada, pois não considera os esforços normais presentes nessas lajes.

**Tabela 7**

Peso total e taxas de aço para as pontes em laje com vigas laterais

$\gamma$	Peso total de aço (kg)	Taxas		P/P <sub>0°</sub>
		kg/m <sup>2</sup>	kg/m <sup>3</sup>	
0°	6648	50	83	1,00
15°	8303	62	104	1,25
30°	12538	94	157	1,89
45°	21271	160	266	3,20

Esta pesquisa mostra que o aumento da esconsidade aumenta as armaduras e as tensões no concreto, e mesmo o efeito de pequenas esconsidades não deve ser desprezado. Quando a tensão admissível no concreto não é atendida, pode-se considerar chapas extremas mais espessas. Essa alternativa, que reduz os braços de alavanca e aumenta as armaduras necessárias, nem sempre é suficiente. Em alguns casos, deve-se aumentar a resistência do concreto ou a espessura da laje.

A proposta de armadura e relação mínimas estende os critérios de malhas ortogonais para armaduras oblíquas, em termos de forças principais. Esses critérios mostram que a esconsidade das malhas oblíquas deve ser limitada.

## 6. Referências bibliográficas

- [1] FALCONER, B. H. – Theory of the stresses induced in reinforced concrete by applied two-dimensional stress, *ACI Journal*, vol. 53(9), 1956, pp. 277–294.
- [2] NIELSEN, M. P. – Yield conditions for reinforced concrete shells in the membrane state, *Non Classical Shell Problems: IASS Symposium*, W. Olszak, ed., North-Holland, Amsterdam, 1964, pp. 1030-1040.
- [3] WOOD, R. H. – The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments, *Concrete, The Journal of the Concrete Society*, vol. 2, no. 2, 1968, pp. 69-76.
- [4] MILLS, H. B., ARMER, G. S. T., WOOD, R. H. – The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments – Correspondence, *Concrete, The Journal of the Concrete Society*, vol. 2, no. 8, 1968, pp. 319-320.
- [5] BAUMANN, T. – Tragwirkung orthogonaler Bewehrungsnetze beliebiger Richtung in Flächentragwerken aus Stahlbeton, *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, no. 217, Berlin, 1972, pp. 1–53.
- [6] Comité Euro-International du Béton and Fédération Internationale de la Précontrainte – *Bul. d'Information* 141:

**Tabela 8**

Áreas de aço e tensões no concreto nas pontes em vigas múltiplas, com  $k_c=0,3$  e  $k_z=0,9$

Ponto	$\alpha_{s\alpha, sup, máx} \text{ (cm}^2\text{/m)} / \alpha_{s\alpha, inf, máx} \text{ (cm}^2\text{/m)}$				$\alpha_{s\beta, sup, máx} \text{ (cm}^2\text{/m)} / \alpha_{s\beta, inf, máx} \text{ (cm}^2\text{/m)}$			
	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$
1	3,07/2,02	3,22/1,5	1,58/0,86	0/8,15	4,47/2,52	5/1,74	6,07/0,55	0/0
2	2,84/1,91	5,21/3,6	8,82/5,32	12,87/3,61	2,87/3,86	5,32/5,46	9,2/7,22	13,95/5,53
3	3,07/2,02	3,55/2,56	3,56/3,11	3,56/0	4,47/2,52	4,04/3,6	3,46/4,9	10,53/0,77
4	0/0	0/0	0/0	0/0	3,12/0	1,59/0	0/0	0/0
5	0/0	0/0	0/0	0/0	1,52/0,38	0,03/0	0/0	0/0
6	0/0	0/0	0/0	0/0	3,12/0	1,59/0	0/0	0/0
7	0,57/0	0,56/0	3,27/2,25	7,33/2,73	2,14/0,58	1,77/0,71	4,8/5,41	13,58/6,25
8	0,4/0	1,78/0	5,59/1,95	7,97/5,98	1,94/0,98	3,67/1,34	8,3/4,9	10,77/8,2
9	0,57/0	1,77/0	4,92/1,45	0/0	2,14/0,58	3,22/1,33	6,27/4,26	2,97/4,13
10	0/0	0/0	0/0	0/0	0/3,21	0/3,61	0/7,09	8,49/0
11	0/0	0/0	0/0	0/8,58	0/7,57	0/8,31	0/16,41	0/31,19
12	0/0	0/0	0/0	0/0	0/3,21	0/3,61	0/7,09	8,49/0

Ponto	$ \sigma_{c\phi, sup} _{máx} \text{ (MPa)}$				$ \sigma_{c\phi, inf} _{máx} \text{ (MPa)}$			
	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$
1	-5,94	-7,29	-10,5	-16,98	-4,46	-6,01	-9,65	-19,36
2	-5,32	-7,05	-11,04	-17	-3,49	-5,06	-7,29	-5,95
3	-5,94	-5,44	-5,05	-7,75	-4,46	-4,24	-4,99	-4,72
4	0	-24,94	-26,57	-23,51	-19,29	-19,77	-21,14	-29,88
5	-15,06	-22,78	-24,71	-28,76	-7,26	-17,14	-18,33	-20,83
6	0	-24,94	-26,57	-23,51	-19,29	-19,77	-21,14	-29,88
7	-2,51	-1,97	-5,97	-12,28	-2,7	-2,42	-5,05	-5,98
8	-1,98	-3,83	-9,53	-13,64	-2,35	-2,5	-5,87	-10,69
9	-2,51	-3,97	-8,31	-3,51	-2,7	-2,96	-5,3	-3,31
10	-24,11	-24,03	-28,17	-19,99	-14,58	-17,54	-22,01	-23,26
11	-23,18	-22,72	-25,56	-20,97	-14,45	-16,54	-22,42	-36,56
12	-24,11	-24,03	-28,17	-19,99	-14,58	-17,54	-22,01	-23,26

Tabela 9

Áreas de aço e tensões no concreto nas pontes em vigas múltiplas, com parâmetros MC 90

Ponto	$a_{s\alpha, sup, máx}$ (cm <sup>2</sup> /m) / $a_{s\alpha, inf, máx}$ (cm <sup>2</sup> /m)				$a_{s\beta, sup, máx}$ (cm <sup>2</sup> /m) / $a_{s\beta, inf, máx}$ (cm <sup>2</sup> /m)			
	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$
1	3,36/1,73	3,72/1,3	2,16/0,33	0/15,02	4,88/2,11	5,72/1,28	7,32/0	0/0
2	3,16/1,59	5,74/3,08	9,74/4,4	14,69/1,78	2,96/3,82	5,54/5,29	9,71/6,77	15,31/4,17
3	3,36/1,73	3,85/2,26	3,85/2,82	6,33/0	4,88/2,11	4,21/3,43	3,38/4,97	13,42/0,64
4	0/0	0/0	0/0	0/0	3,91/0,41	2,44/0	0/0	0/0
5	0/0	0/0	0/0	0/0	1,98/0	0,57/0	0/0	0/0
6	0/0	0/0	0/0	0/0	3,91/0,41	2,44/0	0/0	0/0
7	1,19/0	1,61/0	5,32/3,75	6,94/2,71	2,59/0,96	2,53/0,97	6,3/6,78	14,87/6,66
8	1,08/0	2,92/0	8,05/3,02	10,72/7,34	2,46/1,21	4,51/2,05	10,11/5,95	12,95/9,6
9	1,19/0	2,82/0	7,11/2,25	0/0	2,59/0,96	3,92/2,09	7,76/5,08	3,5/4,96
10	0/0	0/0	0/0	0/0	0/4,11	0/4,71	0/9,92	10,75/0
11	0/0	0/0	0/0	0/18,67	0/9,56	0/10,74	0/23,84	0/40,46
12	0/0	0/0	0/0	0/0	0/4,11	0/4,71	0/9,92	10,75/0

Ponto	$ \sigma_{c\phi, sup} _{máx}$ (MPa)				$ \sigma_{c\phi, inf} _{máx}$ (MPa)			
	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 15^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 45^\circ$
1	-3,32	-4,04	-5,77	-8,68	-2,11	-2,9	-4,79	-11,02
2	-3,04	-4,01	-6,28	-9,95	-1,55	-2,32	-3,29	-2,02
3	-3,32	-3,02	-2,77	-5,86	-2,11	-2,03	-2,47	-2,74
4	0	-13,39	-14,32	-11,61	-9,71	-9,95	-10,58	-16,26
5	-8,76	-12,3	-13,46	-15,9	-3,46	-8,55	-9,12	-10,12
6	0	-13,39	-14,32	-11,61	-9,71	-9,95	-10,58	-16,26
7	-1,63	-1,56	-4,21	-6,51	-1,53	-1,47	-3,63	-3,13
8	-1,41	-2,62	-6,37	-8,78	-1,44	-1,59	-3,79	-6,49
9	-1,63	-2,59	-5,5	-1,93	-1,53	-1,65	-3,31	-1,82
10	-13,04	-13	-15,28	-10,41	-7,29	-8,76	-11,52	-12,66
11	-12,67	-12,39	-13,93	-11,54	-7,21	-8,32	-12,93	-25,42
12	-13,04	-13	-15,28	-10,41	-7,29	-8,76	-11,52	-12,66

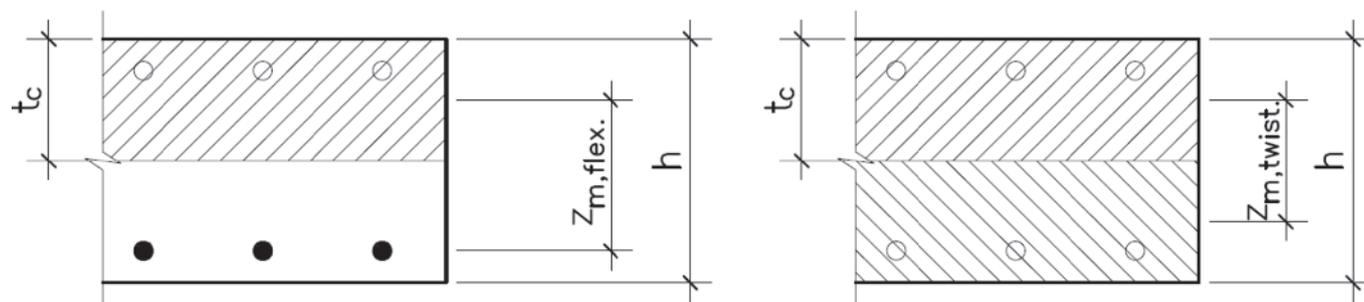


Figura 16  
Espessura das chapas e braços de alavanca considerados

**Tabela 10**

Peso total e taxas de aço para as pontes em vigas múltiplas

$\gamma$	Peso total de aço (kg)	Taxas		P/P <sub>0</sub>
		kg/m <sup>2</sup>	kg/m <sup>3</sup>	
0°	8985	19	85	1,00
15°	11478	25	108	1,28
30°	21345	46	201	2,38
45°	51592	112	487	5,74

CEB/FIP manual on bending and compression, Construction Press, London, 1982.

- [7] MITCHELL, D., COLLINS, M. P. – Diagonal compression field theory – A rational model for structural concrete in pure torsion, *ACI Journal*, vol. 71(8), 1974, pp. 396-408.
- [8] SCHULZ, M. – Design of reinforced concrete plates and shells, *Proceedings of the Conference on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1984, pp. 115-127.
- [9] VECCHIO, F. J., COLLINS, M. P. – The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *ACI Journal*, vol. 83(2), pp. 219-231.
- [10] POLAK, M. A., VECCHIO, F. J. – Nonlinear analysis of reinforced concrete shells” Publication No. 93-03, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Toronto, Toronto, 1993.
- [11] SCHULZ, M. – Verificação geral de peças de concreto armado baseado no modelo da chapa fissurada, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1988.
- [12] SCHULZ, M., SANTISI D’AVILA, M. P. – Analysis of Reinforced Concrete Shells with Transverse Shear Forces, *ASCE Journal of Structural Engineering*, vol. 136, no. 7, 2010, pp. 837-848.
- [13] SCHULZ, M., OLIVEIRA, E. – Design procedure for plane elements with skew reinforcement, *IABSE Symposium Report*, Venice, 2010, pp. 46-53 (8).
- [14] EUROCODE 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, CEN, EN 1992-1-1, Brussels, 2004.
- [15] ROBINSON, J. R., DEMORIEUX, J. M. – Essais de traction-compression sur modèles d’âme de poutre en béton armé (Compte rendu partiel II), *Institut de Recherches Appliquées du Béton Armé*, Paris, 1972.
- [16] LEONHARDT, F; MÖNNIG, E. – Construções de concreto – vol. 2: Casos Especiais de Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado, tradução: V. L. E. Merino, Editora Interciência, Rio de Janeiro, 1978.
- [17] EUROCODE 2: Design of concrete structures – Part 2: Concrete bridges – Design and detailing, CEN, EN 1992-2, Brussels, 2005.
- [18] BERTAGNOLI, G., GIORDANO, L., MANCINI, S – Design and optimization of skew reinforcement in concrete shells, *Structural Concrete*, vol. 13/4, 2012, pp. 248-258.
- [19] ABNT – NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2014.
- [20] ROCHA, B. F. – Dimensionamento de lajes de pontes com armadura esconsa baseado no modelo da chapa fissurada, *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro, 2015.
- [21] MARTI, P. – Design of concrete slabs for transverse shear, *ACI Structural Journal*, vol. 87(2), 1990, pp. 180-190.
- [22] CSI Computers & Structures - SAP 2000 Basic Analysis Reference Manual, Berkeley, 2009.
- [23] ABNT – NBR 7188:2013 – Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2013.
- [24] ABNT – NBR 8681:2003 – Ações e segurança nas estruturas - Procedimento, Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2003.