

# Three-dimensional analysis of reinforced concrete members via embedded discontinuity finite elements

## *Análise tridimensional de elementos estruturais de concreto armado via elementos finitos com descontinuidades incorporadas*



O. L. MANZOLI <sup>a</sup>  
omanzoli@feb.unesp.br

J. OLIVER <sup>b</sup>  
oliver@cimne.upc.es

G. DIAZ <sup>c</sup>  
gdiaz@cimne.upc.es

A. E. HUESPE <sup>d</sup>  
ahuespe@intec.unl.edu.ar

### Abstract

This paper presents a methodology to model three-dimensional reinforced concrete members by means of embedded discontinuity elements based on the Continuous Strong Discontinuous Approach (CSDA). Mixture theory concepts are used to model reinforced concrete as a 3D composite material constituted of concrete with long fiber bundles (rebars) oriented in different directions embedded in it. The effects of the rebars are provided by phenomenological constitutive models designed to reproduce the axial non-linear behavior, as well as bond-slip and dowel action. This paper is focused on the constitutive models assumed for the components and the compatibility conditions chosen to constitute the composite. Numerical analyses of existing experimental reinforced concrete members are presented, illustrating the applicability of the methodology.

**Keywords:** finite elements, fracture mechanics, strong discontinuities, mixture theory, embedded cracks.

### Resumo

Apresenta-se uma metodologia para modelar elementos estruturais de concreto armado tridimensionais através de elementos finitos com descontinuidade incorporada no contexto da aproximação contínua de descontinuidades fortes. Utilizam-se conceitos de teoria de misturas para representar o concreto armado como um material composto de matriz (concreto) com feixes de fibras (barras de aço) longas em diferentes direções. O efeito das barras é proporcionado por modelos constitutivos fenomenológicos, desenvolvidos para reproduzir o comportamento axial não-linear, assim como efeitos provenientes de deslizamento por perda de aderência e ação de pino. O presente artigo foca os modelos constitutivos dos componentes e as condições de compatibilidade escolhidas para constituir o composto. Para ilustrar a aplicabilidade da metodologia proposta, apresentam-se análises numéricas de testes experimentais de elementos de concreto armado existentes.

**Palavras-chave:** elementos finitos, mecânica de fratura, descontinuidades fortes, teoria de misturas, fissuras incorporadas.

<sup>a</sup> Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, Brasil, e-mail: omanzoli@feb.unesp.br

<sup>b</sup> Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), Barcelona, España, e-mail: oliver@cimne.upc.es

<sup>c</sup> Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), Barcelona, España, e-mail: gdiaz@cimne.upc.es

<sup>d</sup> CIMEC/Intec, Conicet, Santa Fe, Argentina, e-mail: ahuespe@intec.unl.edu.ar

### 1. Introdução

O comportamento mecânico de elementos estruturais de concreto armado é muito afetado pelo dano causado pela formação de fissuras durante o processo de carregamento. Em muitas situações, a capacidade última de carga corresponde a um mecanismo de colapso provocado pela formação de uma ou poucas fissuras dominantes, que aparecem quando o concreto já se encontra muito degradado por fissuras secundárias. Portanto, para modelar o comportamento do concreto armado, é fundamental contar com uma aproximação que seja capaz de descrever a formação e propagação de múltiplas fissuras em sólidos não-homogêneos, compostos de concreto e barras de aço.

Recentemente, os elementos finitos com descontinuidades fortes incorporadas adquiriram importantes contribuições, sobretudo destinadas à melhoria de aspectos relacionados à robustez e estabilidade. Também se destaca o desenvolvimento de uma técnica mais eficaz de seguimento de trajetórias de múltiplas descontinuidades em meios bi e tridimensionais, baseada em um problema térmico análogo [1, 2]. Com tais avanços, essa classe de elementos apresenta atualmente a maturidade necessária para representar o complexo processo de fissuração do concreto armado, desde que os efeitos das barras de aço sejam incluídos adequadamente. Tais efeitos devem refletir a contribuição proporcionada pelo comportamento mecânico das barras de aço, assim como os fenômenos de interação entre concreto e reforço, relacionados à perda de aderência (*bond-slip*) e o efeito pino (*dowel action*).

Atualmente existem diferentes possibilidades para levar em conta esses efeitos. Um tratamento em escala mesoscópica poderia ser adotado utilizando-se elementos sólidos homogêneos de concreto e reforço, com elementos de interface entre eles para modelar o comportamento de aderência. Entretanto, para análise de problemas práticos de estruturas de concreto armado, essa forma de tratamento mesoscópica demanda elevados recursos computacionais. Alternativamente, mediante um tratamento em escala macroscópica, as barras de aço podem ser consideradas embebidas nos elementos sólidos, permitindo o uso de malhas grosseiras e reduzindo assim os custos computacionais.

Nesse sentido, a teoria de misturas [3] é uma opção apropriada

para a consideração do reforço em um nível macroscópico. Empregando-se essa teoria, os efeitos das fibras (barras de aço) podem ser adicionados ao comportamento da matriz (concreto). Para fibras suficientemente longas, como é o caso das barras de aço de reforço, pode-se empregar um esquema de mistura mecânica em paralelo, admitindo-se que todos constituintes estão submetidos ao mesmo campo de deformações (ou componentes específicas dele). Assim, o campo de tensões do composto pode ser obtido como a soma das tensões fornecidas pelos modelos constitutivos de cada constituinte, ponderada em função das participações volumétricas. Para formular tais modelos constitutivos, pode-se recorrer aos modelos fenomenológicos disponíveis, baseados em teorias contínuas convencionais. Nesse caso, a Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) pode ser empregada para modelar falha material de materiais compostos. Essa metodologia, que combina a ACDF com a teoria de misturas, foi proposta por Linero [4] para análises bidimensionais de elementos de concreto armado com dois feixes de fibras ortogonais, obtendo-se resultados muito promissores.

O presente trabalho estende essa metodologia para a análise de problemas tridimensionais com um número ilimitado de feixes de fibras em diferentes direções. A matriz e cada feixe de fibras são tratados como constituintes do composto, que, por sua vez, pode ser considerado como um meio contínuo homogêneo. Dessa forma, a simulação numérica da formação e propagação de descontinuidades pode ser feita empregando-se elementos finitos com descontinuidades fortes incorporadas, no contexto da ACDF, da mesma maneira que em análises de contínuos homogêneos, cuja aplicação dessa classe de aproximação já conta com extensivos estudos [2, 5, 6].

Portanto, esse trabalho enfoca a apresentação dos modelos constitutivos empregados para descrever o comportamento mecânico dos constituintes, assim como as condições de compatibilidade empregadas para constituir o material composto, incluindo os referidos efeitos fenomenológicos de interação entre concreto e barras de aço.

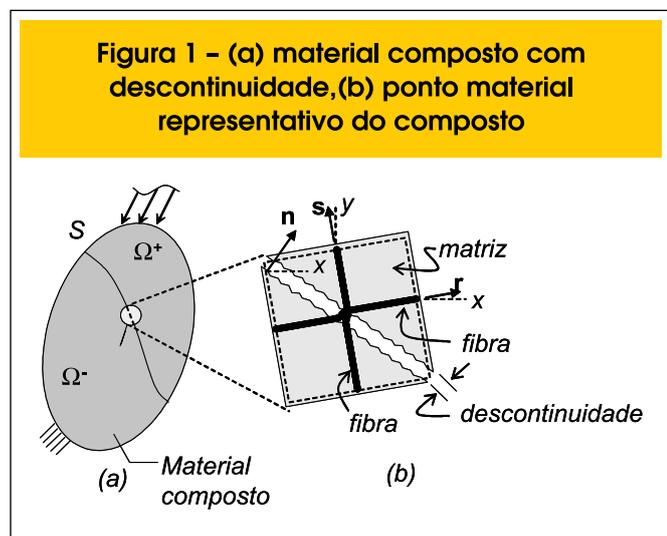
### 2. Material Composto

Considera-se o concreto armado como um material composto constituído por matriz (concreto) com fibras (barras de aço) orientadas em diferentes orientações, como ilustra a Figura 1. De acordo com a hipótese básica da teoria de misturas, o composto é um meio contínuo no qual cada volume infinitesimal é ocupado por todos constituintes [3]. Admitindo-se um mecanismo em paralelo, todos os constituintes são submetidos às deformações do composto. As tensões no composto são obtidas somando-se as tensões de cada constituinte, ponderadas em função da participação volumétrica correspondente. Assim, as deformações na matriz,  $\epsilon^m$ , coincidem com as deformações no composto,  $\epsilon$ :

$$\epsilon^m = \epsilon \tag{1}$$

A deformação axial de uma fibra  $f$ , orientada na direção  $\mathbf{r}^{(f)}$ , se

Figura 1 - (a) material composto com descontinuidade, (b) ponto material representativo do composto



igual a componente do campo de deformações do composto nessa direção, ou seja:

$$\varepsilon^{(f)} = \mathbf{r}^{(f)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}^{(f)} \quad (2)$$

Como será visto posteriormente, para que seja possível levar em consideração o efeito de pino (*dowel action*), as deformações tangenciais da fibra,  $\gamma^{(f)}$ , correspondem às componentes tangenciais da deformação do composto, segundo um sistema de referência ortogonal local  $(\mathbf{r}^{(f)}, \mathbf{s}^{(f)}, \mathbf{t}^{(f)})$ :

$$\gamma_{rs}^{(f)} = 2\mathbf{r}^{(f)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{s}^{(f)} \quad (3)$$

$$\gamma_{rt}^{(f)} = 2\mathbf{r}^{(f)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t}^{(f)} \quad (4)$$

As tensões em um composto com  $nf$  fibras (ou feixes de fibras) orientadas em diferentes direções  $\mathbf{r}^{(f)}$  ( $f=1,2,\dots,nf$ ) podem ser obtidas através da seguinte soma ponderada de cada contribuição:

$$\boldsymbol{\sigma} = k^m \boldsymbol{\sigma}^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m) + \sum_{f=1}^{nf} k^{(f)} \left\{ \sigma^{(f)}(\varepsilon^{(f)}) (\mathbf{r}^{(f)} \otimes \mathbf{r}^{(f)}) + 2\tau_{rs}^{(f)} (\gamma_{rs}^{(f)}) (\mathbf{r}^{(f)} \otimes \mathbf{s}^{(f)})^s + 2\tau_{rt}^{(f)} (\gamma_{rt}^{(f)}) (\mathbf{r}^{(f)} \otimes \mathbf{t}^{(f)})^s \right\} \quad (5)$$

onde  $k^m$  e  $k^{(f)}$ , são as participações volumétricas da matriz e da fibra  $f$ , respectivamente,  $\boldsymbol{\sigma}^m$  é o tensor de tensões da matriz,  $\sigma^{(f)}$  é a tensão axial da fibra, enquanto que  $\tau_{rs}^{(f)}$  e  $\tau_{rt}^{(f)}$  são as componentes da tensão de cisalhamento, associadas ao efeito de pino. A letra S sobrescrita indica a parte simétrica do tensor de segunda ordem.

Por simplicidade, considerou-se na Equação (5) que as componentes de tensões normal e tangenciais nas fibras relacionam-se com as respectivas deformações mediante equações constitutivas específicas, de maneira completamente desacoplada.

Posto que as componentes de deformações dos componentes são obtidas a partir das deformações do composto, a forma incremental da equação constitutiva do composto pode ser escrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{ig} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6)$$

onde o tensor constitutivo tangente  $\mathbf{C}_{ig}$  pode ser obtido a partir da forma incremental da Equação (5), conduzindo a:

$$\mathbf{C}_{ig} = k^m \mathbf{C}_{ig}^m + \sum_{f=1}^{nf} k^{(f)} \left\{ E_{ig}^{(f)} (\mathbf{r}^{(f)} \otimes \mathbf{r}^{(f)}) \otimes (\mathbf{r}^{(f)} \otimes \mathbf{r}^{(f)}) + 4G_{rs}^{(f)} (\mathbf{r}^{(f)} \otimes \mathbf{s}^{(f)})^s \otimes (\mathbf{r}^{(f)} \otimes \mathbf{s}^{(f)})^s + 4G_{rt}^{(f)} (\mathbf{r}^{(f)} \otimes \mathbf{t}^{(f)})^s \otimes (\mathbf{r}^{(f)} \otimes \mathbf{t}^{(f)})^s \right\} \quad (7)$$

na qual  $\mathbf{C}_{ig}^m = \partial \boldsymbol{\sigma}^m / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $E_{ig}^{(f)} = \partial \sigma^{(f)} / \partial \varepsilon^{(f)}$ ,  $G_{rs}^{(f)} = \partial \tau_{rs}^{(f)} / \partial \gamma_{rs}^{(f)}$  e  $G_{rt}^{(f)} = \partial \tau_{rt}^{(f)} / \partial \gamma_{rt}^{(f)}$  são os operadores tangentes das relações constitutivas envolvidas.

### 3. Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF)

O processo de formação e propagação de fissuras no meio composto, originalmente contínuo, é modelado no contexto da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF), originalmente proposta por Simó et al. [7]. Os desenvolvimentos da ACDF, assim como os detalhes de sua implementação no contexto dos elementos finitos com descontinuidade incorporadas, podem ser encontrados em referências posteriores [8-11]. Para evitar problemas de falta de convergência durante a solução das equações não-lineares, emprega-se a formulação simétrica de elementos com descontinuidade forte (cinematicamente consistente) combinada com o algoritmo de integração IMPLEX [6]. A continuidade das trajetórias de fissuras entre elementos finitos (2D e 3D) é imposta por um algoritmo global de construção dessas trajetórias, baseado em um problema térmico análogo [1]. Nos exemplos apresentados aqui, assumiu-se que a orientação da falha é dada pela direção de máxima tensão principal, fixada no instante em que a condição de bifurcação descontínua [10] para essa direção é alcançada.

### 4. Modelos constitutivos

#### 4.1 Modelo constitutivo da matriz de concreto

O comportamento da matriz de concreto é descrito por um modelo constitutivo de dano isotrópico com resistência diferenciada à tração e compressão. Esse modelo pertence à família de modelos de dano proposto por Simo e Ju [12] e apresentado por Oliver et al.[13]. O modelo do material é regido pelas seguintes equações:

$$\boldsymbol{\sigma}^m = \frac{q}{r} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m ; \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m = \mathbf{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m \quad (\text{relação constitutiva}) \quad (8)$$

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}^m, r) = \tau_\varepsilon - r \leq 0 ; \tau_\varepsilon = \alpha \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m : (\mathbf{C}^m)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m} = \alpha \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^m : \mathbf{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m} \quad (\text{critério de dano}) \quad (9)$$

$$\dot{q} = H^m \dot{r} \quad (\text{lei de abrandamento}) \tag{10}$$

$$r(t) = \max_{s \in [0,t]} [r_0, \tau_\varepsilon(s)] ; \quad r_0 = \frac{\sigma_u^m}{\sqrt{E^m}} \quad (\text{evolução da variável interna tipo deformação}) \tag{11}$$

onde  $\bar{\sigma}^m$  é o tensor de tensões efetivas,  $C^m$  é o tensor constitutivo elástico,  $r$  e  $q$  são as variáveis internas tipo deformação e tensão, respectivamente, relacionadas na Equação (10) através do módulo de abrandamento  $H^m$ ,  $\sigma_u^m$  é a tensão de resistência à tração e  $E^m$  é o módulo de Young do concreto. No critério de dano da Equação (9) o fator  $\alpha$  é definido por:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i^m \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i^m|} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \tag{12}$$

onde  $\bar{\sigma}_i^m$  é a  $i$ -ésima tensão efetiva principal,  $\langle \cdot \rangle$  representa o operador de Mac-Auley ( $\langle x \rangle = x$ , se  $x > 0$  e  $\langle x \rangle = 0$ , se  $x \leq 0$ ) e  $n$  é a razão entre as tensões de compressão e tração do concreto (ver Figura 2).

A forma incremental da equação constitutiva pode ser expressa por:

$$\dot{\sigma}^m = C_{tg}^m : \dot{\varepsilon}^m \tag{13}$$

na qual o tensor constitutivo tangente,  $C_{tg}^m$ , assume uma das seguintes expressões, dependendo do estado de carga:

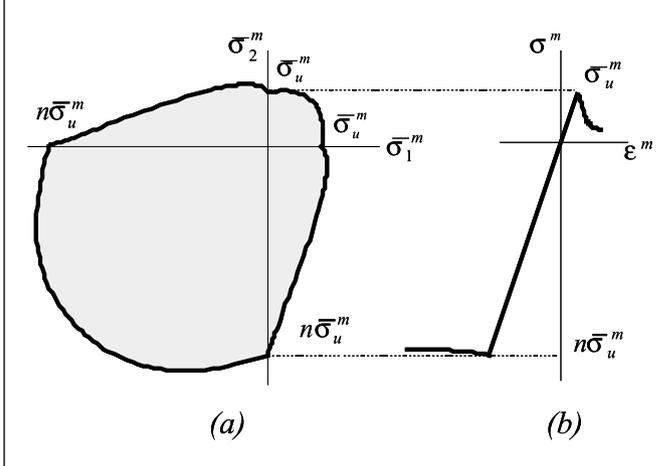
$$C_{tg}^m = \frac{q}{r} C^m \quad \text{se } \dot{r} = 0 ; \quad (\text{descarga}) \tag{14}$$

$$C_{tg}^m = \frac{q}{r} C^m - \left( \frac{q - H^m r}{r^3} \right) \cdot \left[ \frac{r^2}{\alpha} (\bar{\sigma}^m \otimes A) + \alpha^2 (\bar{\sigma}^m \otimes \bar{\sigma}^m) \right] \quad \text{se } \dot{r} > 0 ; \quad (\text{carga}) \tag{15}$$

$$A = C^m : \partial_{\bar{\sigma}} \alpha$$

Para que o modelo constitutivo seja compatível com a forma regularizada da cinemática da ACDF, e com os princípios da mecânica de fratura, o módulo de abrandamento deve depender da largura da banda de localização de deformações, que tende a um valor  $k$ ,

Figura 2 - Modelo de dano com resistências à tração e à compressão diferenciadas. (a) Domínio elástico inicial no espaço de tensões efetivas. (b) curva de tensão-deformação uniaxial



próximo de zero e da energia de fratura à tração (modo I),  $G_f^m$ , considerada como uma propriedade material. Assim, para o caso de abrandamento linear, o módulo  $H^m$  é dado por:

$$H^m = \bar{H}^m k ; \quad \bar{H}^m = - \frac{\sigma_u^{m2}}{2E^m G_f^m} \tag{16}$$

#### 4.2 Modelo Constitutivo das fibras de aço

As fibras são consideradas como sendo elementos resistentes unidimensionais embebidos na matriz. Podem contribuir ao comportamento mecânico do composto introduzindo sua rigidez axial ou cisalhante.

A contribuição axial de cada feixe de fibras ao comportamento do composto depende de suas propriedades mecânicas axiais e do estado de sua aderência à matriz. Esses dois mecanismos resistentes são reproduzidos pelo modelo de fibra deslizante, que se descreve a continuação. Já a contribuição transversal das fibras corresponde ao acréscimo de resistência ao cisalhamento nas zonas fissuradas do concreto, devido ao efeito pino proporcionado pela armadura.

##### 4.2.1 Modelo de fibra deslizante

A contribuição axial das fibras pode ser modelada através de relações constitutivas unidimensionais, relacionando a deformação específica longitudinal com a tensão normal. A compatibilidade admitida entre as deformações da matriz e das fibras faz com que os efeitos de possíveis deslizamentos, produzidos pela degrada-

ção da aderência, possam ser representados somente através da introdução de uma parcela de deformação específica longitudinal, associada ao deslizamento. Assim, a deformação axial das fibras,  $\varepsilon^f$ , pode ser considerada como uma composição de duas partes: uma devida à deformação da fibra,  $\varepsilon^d$ , e outra relacionada ao relaxamento equivalente produzido pela perda da aderência na interface matriz-fibra,  $\varepsilon^i$ :

$$\varepsilon^f = \varepsilon^d + \varepsilon^i \quad (17)$$

Admitindo-se uma composição em série entre fibra e interface, como ilustra a Figura 3, a tensão normal do modelo de fibra deslizante,  $\sigma^f$ , será igual à tensão de cada componente, ou seja:

$$\sigma^f = \sigma^d = \sigma^i \quad (18)$$

Considera-se que tanto a parcela da tensão normal associada à deformação como ao deslizamento se relacionam com as deformações correspondentes através do modelo constitutivo elasto-plástico perfeito uniaxial [14]. Assim, a composição em série resultará em um comportamento de fibra deslizante que também se descreve através de um modelo elasto-plástico perfeito, cujos parâmetros materiais são proporcionados pela composição dos parâmetros associados a cada efeito (ver figura 4). Portanto, o módulo de elasticidade,  $E^f$ , e a tensão de escoamento plástico,  $\sigma_y^f$ , do modelo constitutivo de fibra deslizante são dados por:

$$E^f = \frac{1}{\frac{1}{E^d} + \frac{1}{E^i}} \quad (19)$$

$$\sigma_y^f = \min[\sigma_y^d, \sigma_{adh}^i] \quad (20)$$

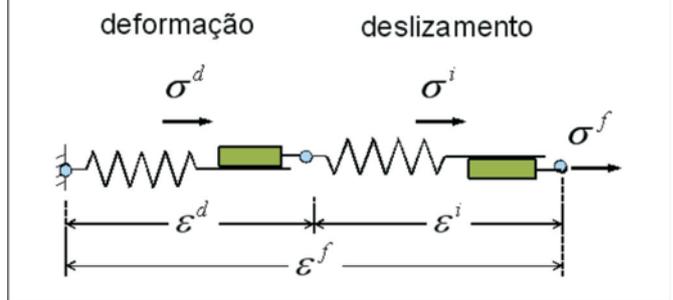
onde  $E^d$  e  $\sigma_y^d$  são o módulo de Young e a tensão de escoamento plástico do aço,  $E^i$  é o módulo elástico da interface matriz-fibra e  $\sigma_{adh}^i$  é a tensão de aderência limite.

Os parâmetros relacionados à deformação axial da fibra podem ser obtidos de ensaios de tração das barras de aço, enquanto que os relacionados à aderência podem ser estimados a partir de resultados de ensaios de arrancamento.

#### 4.2.2 Efeito de Pino (Dowel action)

Em algumas situações, o efeito pino pode contribuir significante-

Figura 3 – Modelo de fibra deslizante



mente para a transferência de esforços cortantes em elementos estruturais de concreto armado, principalmente nos estágios de carga próximos ou posteriores à carga crítica.

Para levar em conta o efeito pino produzido pelas barras de aço que atravessam as fissuras, pode-se introduzir uma rigidez adicional ao cisalhamento, buscando representar a reação cortante das barras de aço ao deslocamento transversal relativo na fissura. Esse mecanismo de transferência de esforços cortantes provém da iteração entre as barras de aço e o concreto circundante, podendo ser analisado tratando as barras como vigas sobre fundação elástica [15, 16].

Essa rigidez adicional é proporcionada pelas duas últimas contribuições de tensões das Equações (5) e (7). Por simplicidade, as contribuições de tensões de cisalhamento em dois planos ortogonais contendo a direção  $r$  do feixe de fibra,  $\tau_{rs}^f$  e  $\tau_{rt}^f$ , são consideradas desacopladas e descritas por relações tensão-deformação elástico-plásticas perfeitas, como ilustra a Figura 5.

Os parâmetros do modelo,  $\tau_y^f$  e  $G^f$ , podem ser estimados a partir das características do concreto e das barras de aço, de acordo com o modelo descrito na referência [15].

## 5. Exemplos Numéricos

### 5.1 Painel tracionado

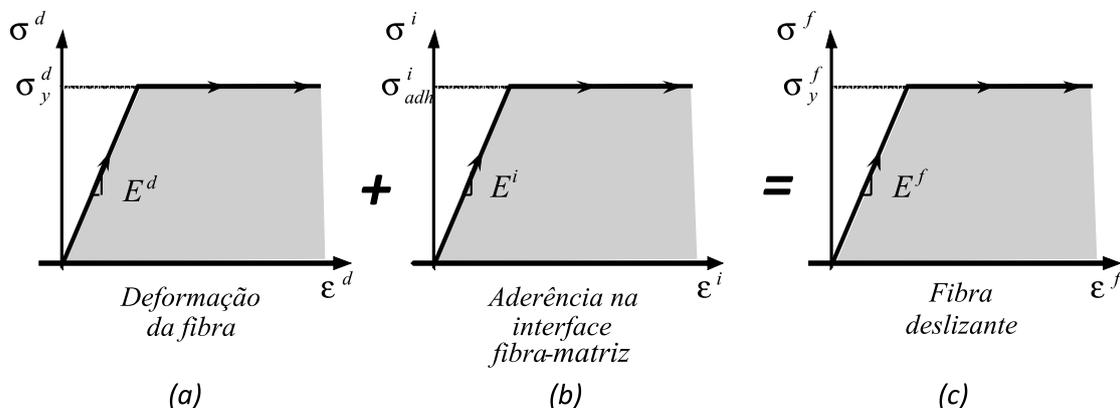
Utilizando a metodologia apresentada, analisa-se o painel de concreto armado submetido à tração uniaxial, reportado por Ouyang e co-autores [17, 18]. O espécime consiste em um painel de dimensões 686 mm x 127 mm com espessura de 50.8 mm, reforçado com três barras de aço de 9.5 mm de diâmetro, como mostra a Figura 6.

As propriedades mecânicas do concreto são:  $E^m = 27.35$  GPa,  $\nu^m = 0.2$ ,  $G_f^m = 100$  N/m e  $\sigma_u^m = 3.19$  MPa. As barras de aço correspondem a 3.3% do volume total do painel e apresentam as seguintes propriedades:  $E^d = 191.6$  GPa e  $\sigma_y^d = 508.0$  MPa.

As propriedades de aderência entre concreto e barras de aço foram caracterizadas através dos ensaios de arrancamento reportados por Naaman et al. [19], permitindo chegar às seguintes propriedades do modelo de fibra deslizante, descrita na seção 4.2:  $E^f = 0.86 E^d$  e  $\sigma_{adh}^i = 311.1$  MPa.

As análises numéricas foram feitas com modelos numéricos bidimensional (2D) e tridimensional (3D). Na análise bidimensional empregaram-se elementos finitos triangulares de três nós para

Figura 4 - Composição do modelo de fibra deslizante



modelar um quarto do painel, levando-se em conta as simetrias do problema. Na análise tridimensional, modelou-se um oitavo do painel, empregando-se elementos finitos tetraédricos de quatro nós. As Figuras 7 e 8 ilustram as malhas de elementos finitos usadas. Nos dois casos, as regiões vizinhas a cada barra, indicadas pelos elementos com cores mais escuras nas Figuras 7 e 8, foram modeladas com propriedades de uma mistura de concreto com 8.24% e 24.71% de fibras horizontais, para o caso 2D e 3D, respectivamente. O restante foi modelado com propriedades do concreto puro. A solicitação por tração foi produzida pela imposição de deslocamento axial crescente nos nós situados na extremidade direita do painel (ver Figura 6). As Figuras 9 e 10 mostram os contornos de iso-deslocamentos para diferentes níveis de

deslocamento axial imposto. Nessas figuras, a concentração de linhas de iso-deslocamentos indica localização de deformações, associada à abertura de fissuras no interior dos elementos. Observa-se que, após atingir a tensão de resistência à tração, o concreto começa a apresentar fissuras que se propagam das regiões externas às internas, até a estabilização, mantendo um espaçamento

praticamente constante entre si. Cabe observar que, diferentemente de outros modelos numéricos, esse valor do espaçamento não foi introduzido como parâmetro do modelo, posto que emergiu naturalmente como resultado da análise. Na análise tridimensional pode-se verificar os diferentes níveis de fissuração estabilizada entre as partes externa e interna (próxima às barras). Os resultados estruturais (força de reação *versus* des-

Figura 5 - Modelo constitutivo do efeito pino

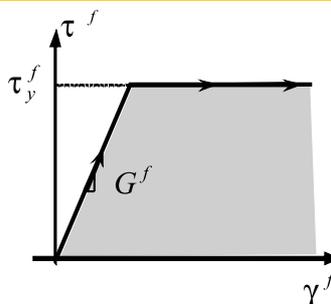


Figura 6 - Painel de concreto armado submetido à tração

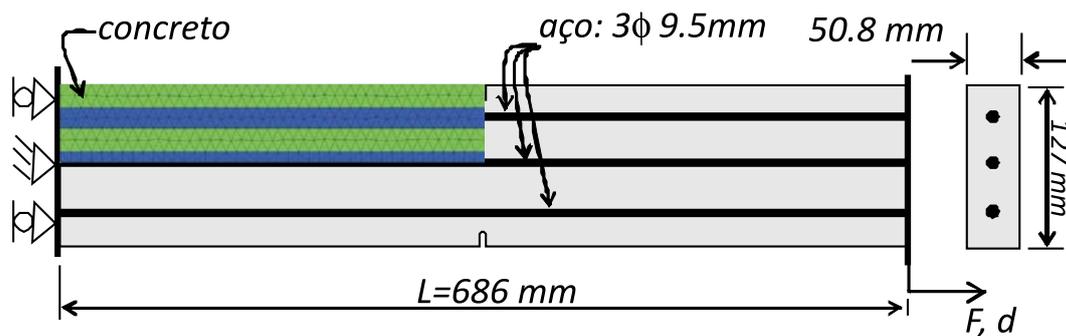
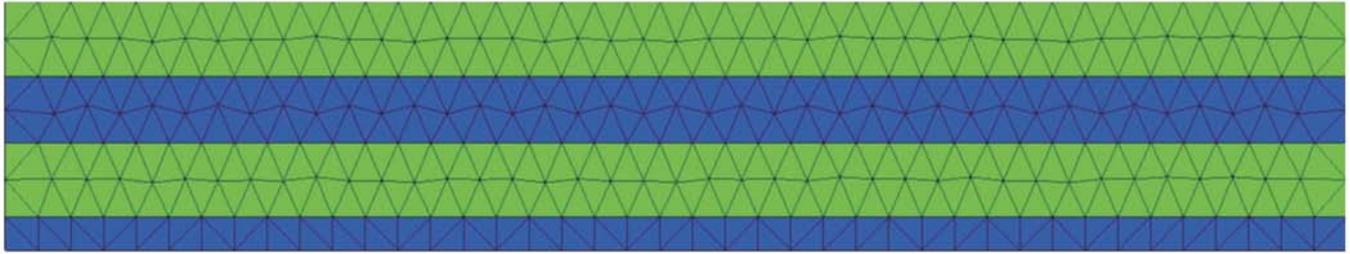


Figura 7 - Painel de concreto armado submetido à tração. Malha bidimensional

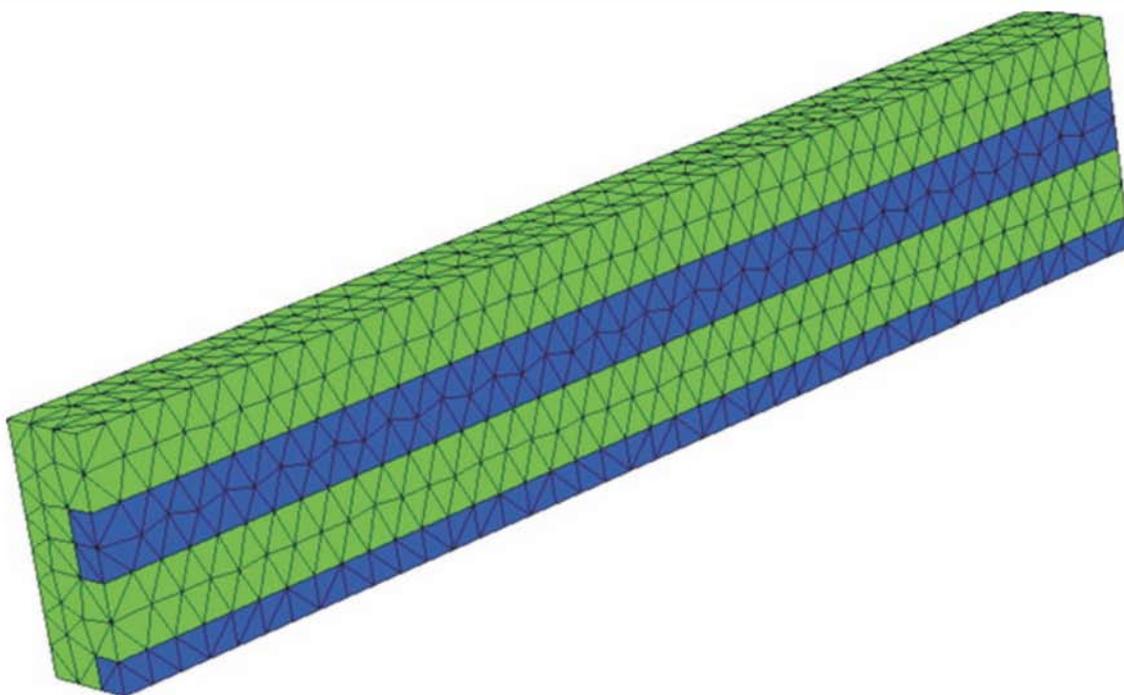


locamento imposto) obtidos numericamente são contrastados com os experimentais na Figura 11. As análises bi e tridimensionais fornecem soluções semelhantes e condizentes com o resultado experimental. É importante destacar que o fenômeno de enrijecimento na tração (*tension-stiffening*) pôde ser reproduzido adequadamente sem a necessidade de introduzir contribuições *ad-hoc* associadas a esse fenômeno nos modelos constitutivos dos materiais. A curva estrutural numérica é mais rígida que a obtida com três barras idênticas não embebidas em concreto, mesmo após a fissuração do concreto. Essa rigidez adicional é proporcionada pelo comportamento resistente do concreto adjacente às barras, na região entre as fissuras.

A evolução das fissuras mostra claramente as distintas fases do processo de degradação do elemento estrutural. As

primeiras fissuras, espaçadas quase uniformemente, ocorrem quando as tensões normais no concreto atingem o valor de resistência à tração. Nesse instante, a curva estrutural mostra um declínio de rigidez, produzido pelo rápido processo de degradação com abrandamento de tensões nas zonas fissuradas do concreto, enquanto que as barras de aço permanecem em regime elástico linear. Ao aumentar-se o nível do deslocamento imposto, surge um novo conjunto de fissuras entre as existentes. A partir de então, ocorre estabilização da fissuração, sem formação de novas fissuras. Nesse estágio estabilizado, as fissuras existentes se abrem continuamente até que as barras de aço entrem em regime de escoamento localizado em uma das seções fissuradas, causando a redução da capacidade resistente da peça, caracterizada pela redução da força de reação na curva estrutural.

Figura 8 - Painel de concreto armado submetido à tração. Malha tridimensional

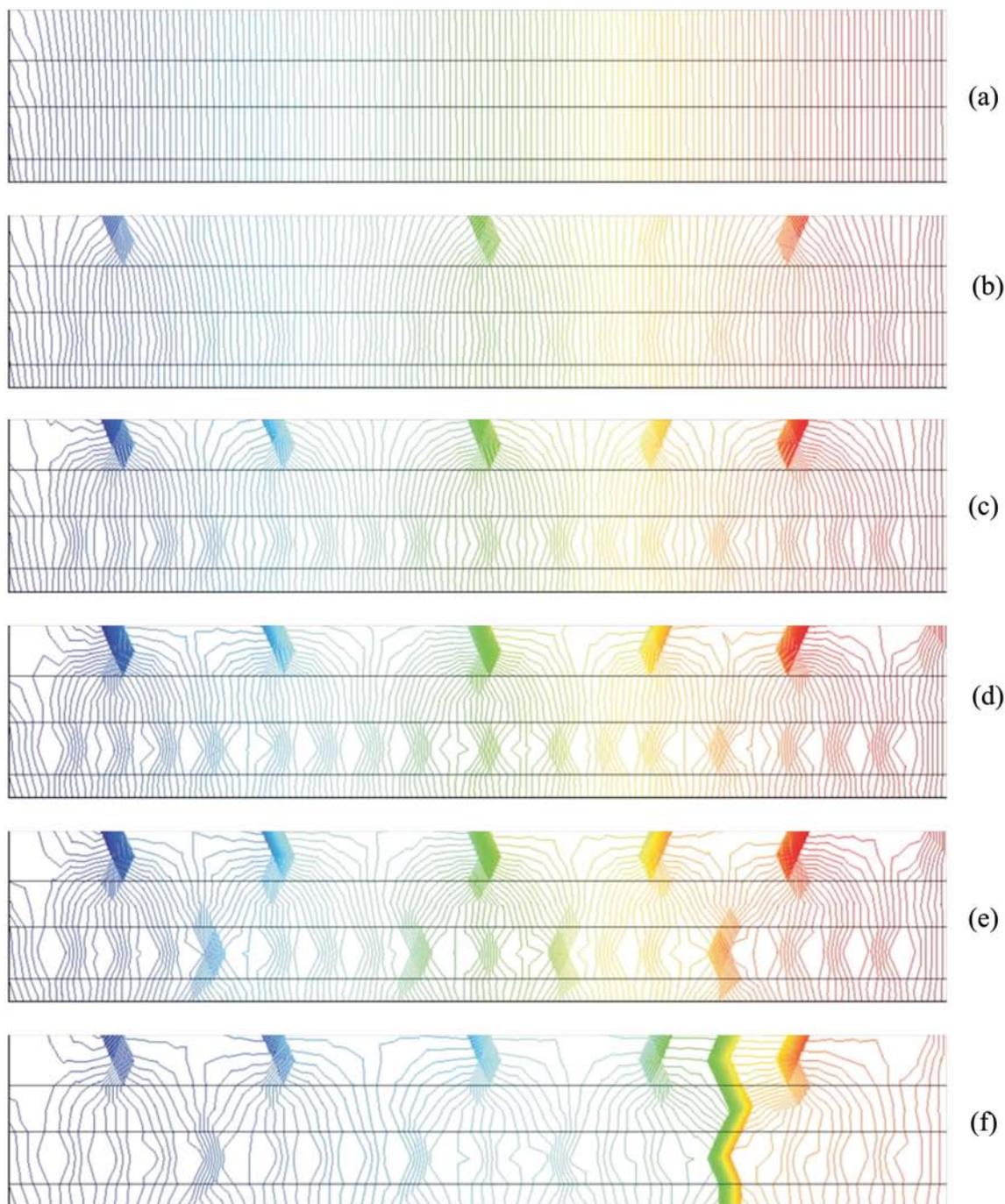


5.2 Consolo de concreto armado

Analisa-se numericamente o ensaio do consolo de concreto ar-

mado realizado por Mehmel e Freitag [20], cuja descrição está ilustrada na Figura 12. Devido às simetrias do problema, modelou-se somente um quarto do espécime. Cada barra de aço e o con-

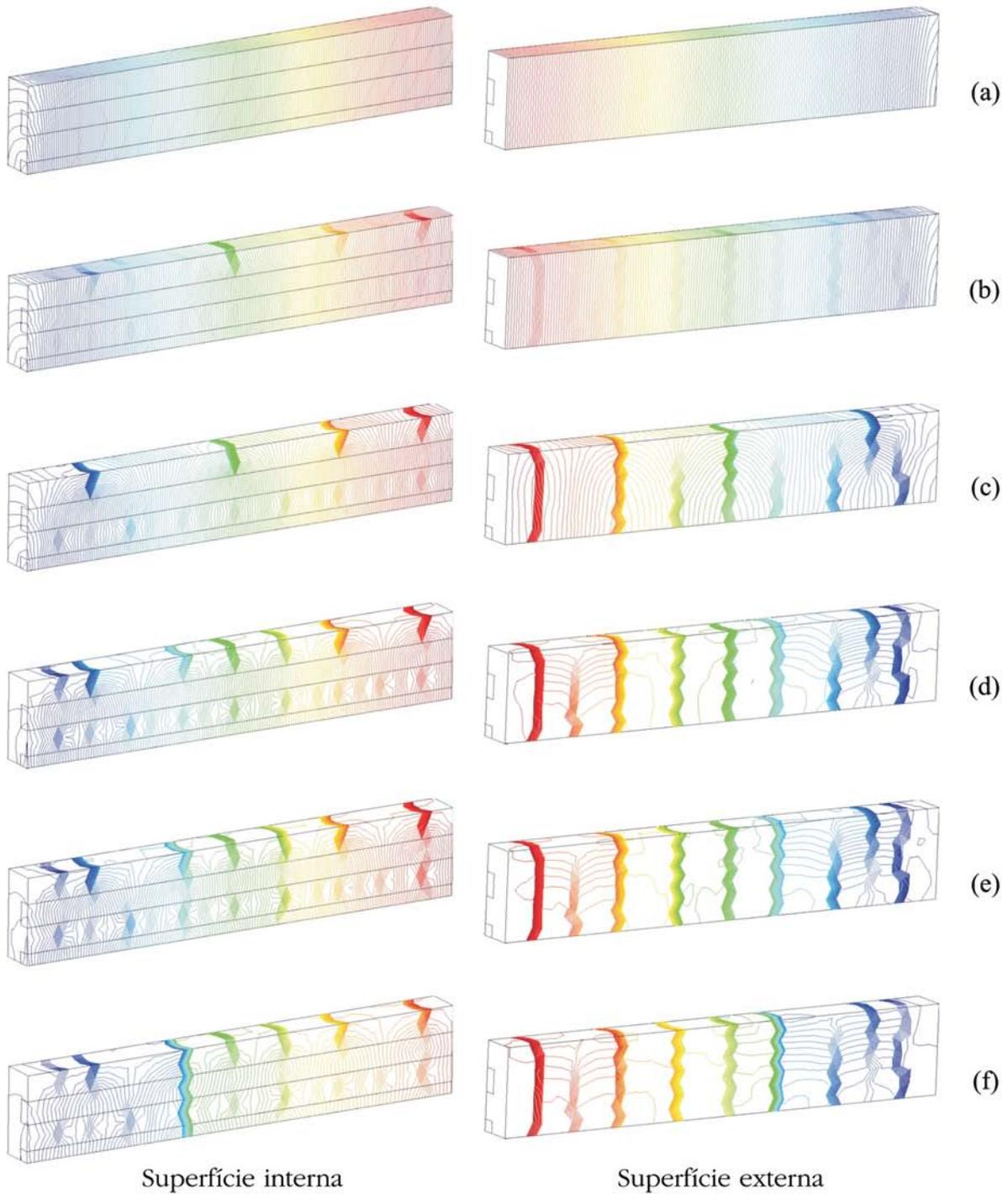
Figura 9 – Resultados da análise bidimensional. Contornos de iso-deslocamentos para diferentes níveis de deslocamento imposto



creto de sua vizinhança foram modelados através de um material composto com propriedades mecânicas equivalentes. Assim, a

peça foi dividida em sub-regiões envolvendo as barras de aço, como ilustra a Figura 13. Em cada sub-região, as orientações e

**Figura 10 – Resultados da análise tridimensional. Contornos de iso-deslocamentos para diferentes níveis de deslocamento imposto**



as frações volumétricas das fibras do composto equivalente correspondem às barras de aço do problema real, que estariam em seu interior. As propriedades mecânicas adotadas para o concre-

to são:  $E^m = 21.87 \text{ GPa}$ ,  $\nu^m = 0.2$ ,  $G_f^m = 100 \text{ N/m}$  e  $\sigma_u^m = 2.26 \text{ MPa}$ . As barras de aço apresentam as seguintes propriedades:  $E^d = 206 \text{ GPa}$  e  $\sigma_y^d = 430 \text{ MPa}$ . As propriedades da aderência en-

Figura 11 – Painel tracionado. Curvas de força de reação versus deslocamento imposto

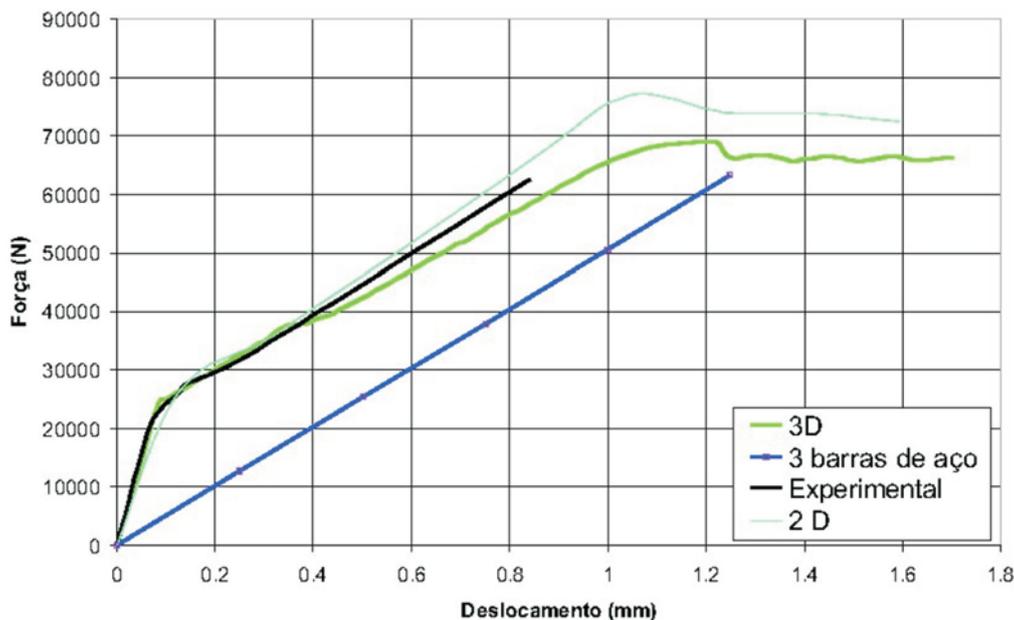
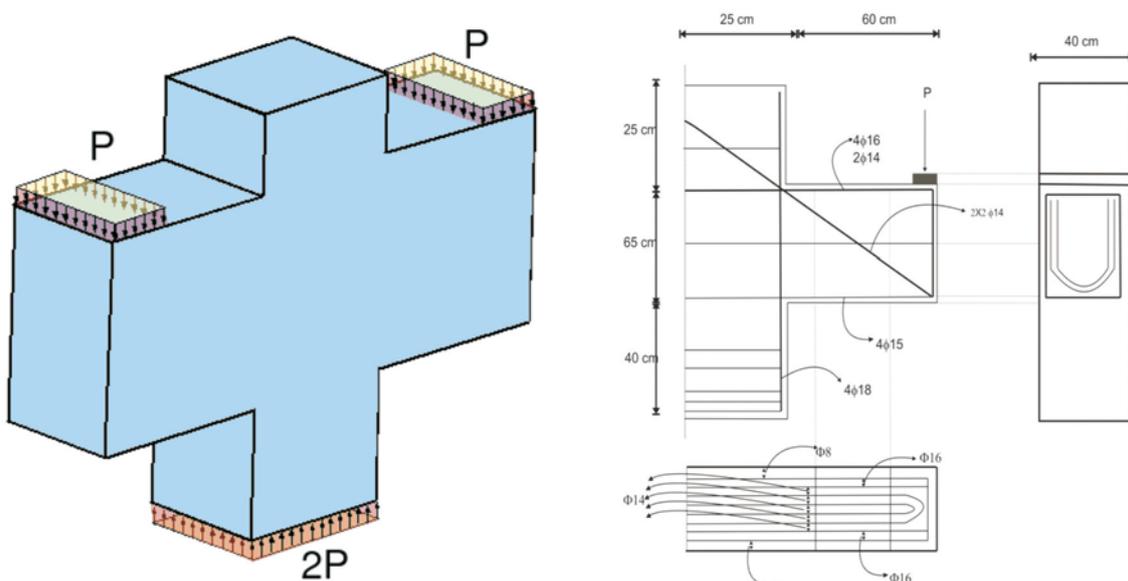


Figura 12 – Consolo de concreto armado



tre concreto e barras de aço foram introduzidas considerando-se as seguintes propriedades do modelo de fibra deslizante:  $E^f = E^d$  e  $\sigma_{adh}^i = 300$  MPa.

Os contornos de iso-deslocamentos no final da análise, apresentadas na Figura 14, indicam as fissuras que se formaram durante o

carregamento. O padrão de fissuração obtido apresenta boa correspondência com o observado no experimento.

A figura 15 mostra as curvas estruturais obtidas numericamente com a metodologia proposta e com a aproximação utilizando um modelo de fissura distribuída com representação embebida da armadura,

Figura 13 - Consolo de concreto armado. Malha de elementos finitos tetraédricos

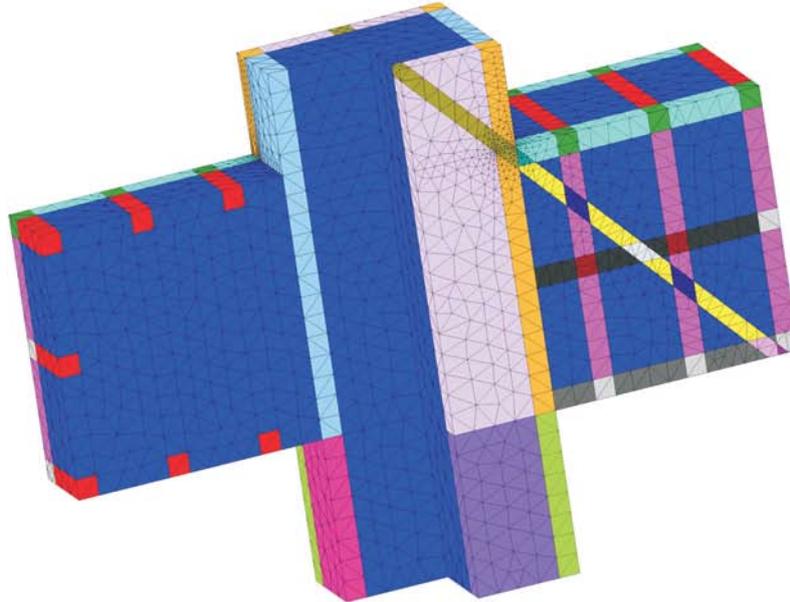
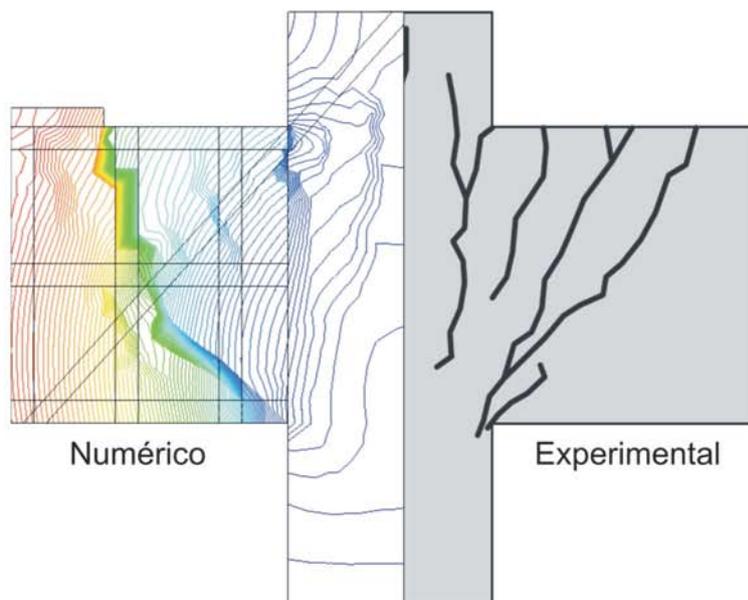


Figura 14 - Consolo de concreto armado: padrões de fissuração



apresentada por Hardtl [21]. Ambas metodologias fornecem uma estimativa razoável da carga limite de ruptura experimental. Entretanto, somente a metodologia proposta captura uma forte variação da curva estrutural anterior ao colapso (para uma força próxima a 600 kN), produzida pela repentina formação da macro-fissura principal, cruzando o consolo diagonalmente (ver figura 14).

## 6. Conclusões

A Metodologia proposta para representar o comportamento de elementos estruturais de concreto armado se fundamenta nos seguintes aspectos:

- Representação macroscópica do concreto armado através da teoria de misturas;
- Leis constitutivas convencionais para descrever o comportamento dos componentes (concreto e aço), assim como de suas interações (perda de aderência e efeito pino);
- Aproximação contínua de descontinuidades fortes para descrever a fratura do material composto resultante;
- Elementos finitos com descontinuidades incorporadas para simular a propagação de fissuras com malha fixa;
- Esquema global 3D para construir a trajetória de múltiplas superfícies de descontinuidade;
- Esquema de integração implícito-explicito para melhorar a robustez e estabilidade dos cálculos não-lineares.

Tais aspectos fazem com que a presente metodologia possa:

- Descrever o processo de degradação causado pela formação de múltiplas fissuras;

- Reproduzir o acréscimo de rigidez em tração (tension stiffening) proveniente do comportamento do concreto entre fissuras, sem a necessidade de um modelo específico para isso;
- Levar em consideração efeitos de perda de aderência entre as barras de aço e o concreto adjacente;
- Proporcionar o acréscimo de rigidez transversal associado à ação de pino (*dowel action*).

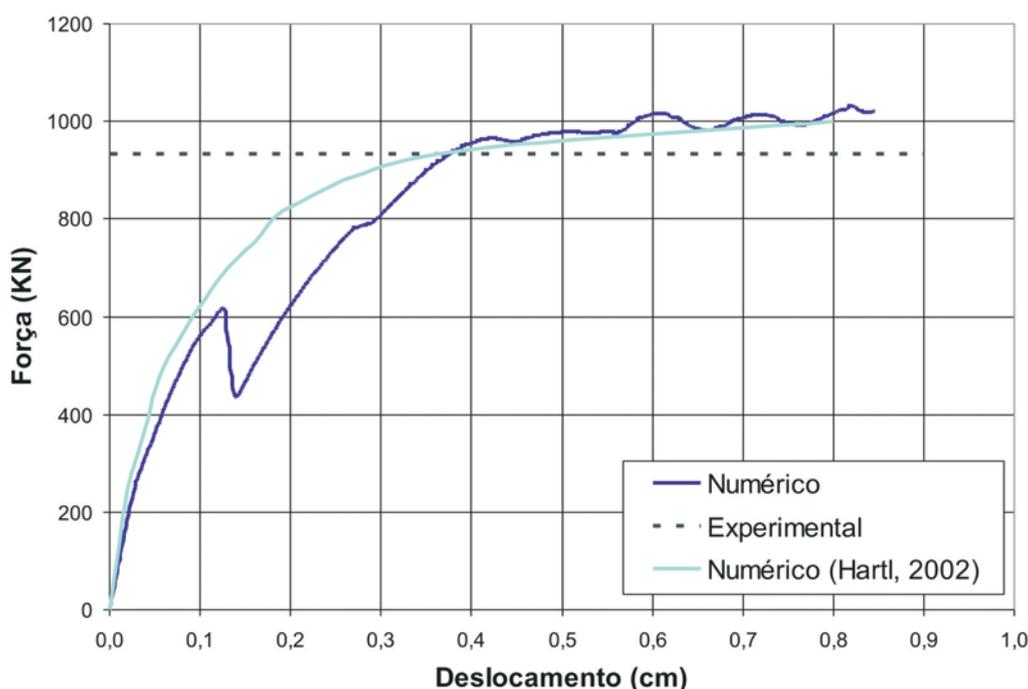
A aproximação proposta é uma tentativa de estabelecer uma ferramenta numérica capaz de lidar com a sofisticação requerida na modelagem de fenômenos físicos complexos, com o menor esforço computacional.

Para isso, recorre-se à teoria de misturas para poder incluir os efeitos da armadura em uma escala macroscópica, evitando-se a representação explícita de cada barra da armadura em um contexto mesoscópico.

Por outro lado, a aproximação contínua de descontinuidades fortes (ACDF) permite a modelagem do comportamento mecânico de todos os constituintes do material composto (concreto e barras de aço), assim como dos fenômenos dominantes (múltiplas fissuras, perda de aderência, enrijecimento em tração), de uma maneira relativamente simples, mediante relações constitutivas contínuas usuais entre tensões e deformações.

A combinação desses modelos constitutivos básicos com a cinemática de descontinuidades fortes no contexto da ACDF, representada numericamente por elementos com descontinuidade incorporada, projeta os mencionados modelos constitutivos contínuos em uma lei coesiva muito complexa, que se cumpre nas fissuras sem ter sido deduzida explicitamente. Naturalmente este tipo de apro-

Figura 15 - Consolo de concreto armado. Respostas estruturais



ximação proporciona vantagens em simulações numéricas tridimensionais, uma vez que requer elementos finitos muito maiores do que nas aproximações mesoscópicas, nas quais a geometria real da seção transversal das barras deve ser representada. Aqui, os feixes ou camadas de barras, envolvidas por uma quantidade apropriada de concreto, são modelados como uma região de material composto, cuja dimensão é determinada pela malha de elementos finitos. Isso implica esforços computacionais menores do que os requeridos nas aproximações mesoscópicas. Por outro lado, a simplificação da geometria não parece afetar significativamente a qualidade do comportamento mecânico obtido. O padrão de fissuras, o mecanismo de colapso e as curvas de resposta estrutural, obtidos numericamente, reproduzem bem os resultados experimentais.

## 7. REFERÊNCIAS

- [01] Oliver, J., et al., *Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2004. **28**(7-8): p. 609-632.
- [02] Oliver, J. and A.E. Huespe, *Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004. **193**(30-32): p. 3195-3220.
- [03] Trusdell, C. and R. Toupin, *The classical field theories. Handbuch der Physik III/I*. 1960, Berlin: Springer Verlag.
- [04] Linero, D.L., *Un modelo de fallo material en el hormigón armado mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo y la teoría de mezclas*. 2006, Universidad Politécnica de Cataluña: Barcelona.
- [05] Blanco, S., et al. *Strong discontinuity modeling of material failure in large concrete structures: recent computational developments and applications*. in *EURO-C 2006 Computational Modelling of Concrete Structures*. 2006. Tyrol (Austria): Balkema Publishers.
- [06] Oliver, J., et al., *Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure in the strong discontinuity approach*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 2006. **195**: p. 7093-7114.
- [07] Simo, J., J. Oliver, and F. Armero, *An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids*. Computational Mechanics, 1993. **12**: p. 277-296.
- [08] Oliver, J., *Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations . 1. Fundamentals*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996. **39**(21): p. 3575-3600.
- [09] Oliver, J. and A.E. Huespe, *Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004. **193**(27-29): p. 2987-3014.
- [10] Oliver, J., M. Cervera, and O. Manzoli, *Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach*. International Journal of Plasticity, 1999. **15**(3): p. 319-351.
- [11] Manzoli, O.L. and P.B. Shing, *A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements*. Computers & Structures, 2006. **84**(10-11): p. 742-757.
- [12] Simo, J.C. and J.W. Ju, *Stress and strain based continuum damage models: I formulation*. International Journal Solids and Structures, 1987. **15**: p. 821-840.
- [13] Oliver, J., et al. *Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete*. in *Proc. SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*. 1990.
- [14] Simo, J.C. and T.J.R. Hughes, *Computational Inelasticity*. 1998: Springer.
- [15] He, X.G. and A.K.H. Kwan, *Modeling dowel action of reinforcement bars for finite element analysis of concrete structures*. Computers & Structures, 2001. **79**(6): p. 595-604.
- [16] Deipoli, S., M. Diprisco, and P.G. Gambarova, *Shear Response, Deformations, and Subgrade Stiffness of a Dowel Bar Embedded in Concrete*. Aci Structural Journal, 1992. **89**(6): p. 665-675.
- [17] Ouyang, C., et al., *Prediction of cracking response of reinforced concrete tensile members*. Journal of Structural Engineering. ASCE, 1997. **123**(1): p. 70 - 78.
- [18] Ouyang, C. and P. Shah, *Fracture energy approach for predicting cracking of reinforced concrete tensile members*. ACI Structural Journal, 1994. **91**(1): p. 69-78.
- [19] Naaman, A., et al., *Fiber pullout and bond slip II. Experimental validation*. Journal of Structural Engineering ASCE, 1991. **117**(9): p. 2791-2800.
- [20] Mehmel, A. and W. Freitag, *Tragfähigkeitsversuche an Stahlbetonkonsolen*. Bauingenieur, 1967. **42**: p. 362-369.
- [21] Hartl, H., *Development of a continuum-mechanics-based toll for 3D finite element analysis of reinforced concrete structures and application to problems of soil-structure interaction*. 2002, Graz University of Technology: Graz.