

Numerical analysis of nonlinear behavior of steel concrete composite structures

Análise numérica do comportamento não linear de estruturas mistas de aço e concreto



Í. J. M. LEMES^a
igorjml@hotmail.com

A. R. D. SILVA^a
andreardsilva@em.ufop.br

R. A. M. SILVEIRA^a
ricardo@em.ufop.br

P. A. S. ROCHA^b
paulorochoa@em.ufop.br

Abstract

This paper presents the development of an effective numerical formulation for analysis of steel concrete composite structures considering geometric and materials nonlinear effects. Thus, a methodology based on Refined Plastic Hinge Method (RPHM) was developed and the stiffness parameters obtained by homogenization of cross section. The evaluation of structural elements strength is done through the Strain Compatibility Method (SCM). The Newton-Raphson method with path-following strategies is adopted to solve nonlinear global and local (in cross section level) equations. The results are compared with experimental and numerical database presents in literature and a good accuracy is observed in composite cross section, columns and portal frames.

Keywords: nonlinear analysis, RPHM, interaction curves, SCM, moment-curvature relationship.

Resumo

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de uma formulação numérica adequada para análise de estruturas mistas de aço e concreto considerando os efeitos da não linearidade geométrica e da inelasticidade dos materiais. Para tal, foi desenvolvida uma metodologia baseada no Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR), sendo os coeficientes de rigidez obtidos por meio da homogeneização da seção transversal. A avaliação da capacidade resistente dos elementos estruturais é feita no contexto do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). Os problemas oriundos da consideração das fontes de não linearidade (global e local) são resolvidos por meio do método iterativo de Newton-Raphson acoplado a estratégias de continuação. Os resultados obtidos são comparados com aqueles fornecidos em análises experimentais e/ou numéricas presentes na literatura, sendo verificada boa precisão nas análises de seções transversais mistas, pilares isolados mistos e pórticos simples mistos.

Palavras-chave: análise não linear, MRPR, curvas de interação, MCD, relação momento-curvatura.

^a Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.

1. Introdução

As aproximações propostas por normas de projeto para a consideração do comportamento não linear de estruturas se distancia da realidade à medida que os elementos estruturais se tornam mais esbeltos. No contexto atual, a utilização de materiais de alta resistência na construção civil proporciona estruturas menos rígidas, ou seja, susceptíveis a grandes deslocamentos. Uma análise precisa requer o uso de ferramentas computacionais que levem em consideração tanto o comportamento não linear da geometria da estrutura quanto a capacidade resistente de seus elementos estruturais.

As estruturas mistas são aquelas que em sua composição apresentam dois ou mais materiais. O objetivo dessa associação é encontrar um ponto de equilíbrio, minimizando as características desfavoráveis de cada componente.

No passado o concreto era utilizado apenas para proteção do aço contra agentes corrosivos e ao fogo, embora o mesmo contribuísse para o aumento da resistência e rigidez da estrutura. Tal ideia fez com que surgissem os primeiros elementos estruturais mistos de aço e concreto.

A definição da rigidez e da capacidade resistente de elementos estruturais mistos, devido às características anisotrópicas do concreto, não é simples. As normas de projeto [1-2] propõem metodologias simplificadas para a definição desses parâmetros de rigidez e capacidade resistente que podem tanto aproximar ou se distanciar do comportamento real da estrutura [3]. Para se obter boa precisão nos resultados de forma mais viável computacionalmente, o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) surge como alternativa. Usualmente, o MRPR está associado à análise de estruturas metálicas [4-5] e mistas [6-7]. Nessas abordagens, é possível que a degradação da rigidez da seção transversal seja feita por meio de elementos de mola fictícios inseridos nas extremidades dos elementos finitos. Essa degradação se inicia quando a combinação do esforço normal e momento fletor ultrapassa o limite do regime elástico imposto por uma curva de início de plastificação. Em outras palavras, a seção transversal apresenta comportamento linear elástico até que essa curva seja atingida.

Na avaliação da capacidade resistente de elementos mistos de aço e concreto através do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) [2,7], duas estratégias de solução se destacam. Adeptos dos métodos quasi-Newton, Chen *et al.* [8] e Liu *et al.* [9] utilizam esse procedimento de solução para problemas não lineares acoplado ao método da falsa posição. O processo consiste na determinação da posição da linha neutra e sua orientação (problema 3D), que são os parâmetros ajustados no ciclo iterativo. Com isso, podem-se obter os esforços internos resistentes. Já o método de Newton-Raphson [10-11] usa como variáveis de ajuste a deformação axial no centroide plástico da seção e a curvatura em um dos eixos principais (problema 2D). Determina-se então a deformação axial em cada ponto discreto da seção e utilizam-se as respectivas relações constitutivas para o somatório de tensões. O procedimento consiste na construção da relação momento-curvatura (problema não linear), onde, para um dado esforço axial, o ponto limite de momento fletor encontrado reflete a

combinação Esforço Normal-Momento responsável pela plastificação da seção. Na análise da relação momento-curvatura podem-se determinar os parâmetros de rigidez. Chiorean [11] obteve a rigidez à flexão da seção com base na tangente à relação momento-curvatura. Já Liu *et al.* [12] reduzem o momento de inércia dos elementos de concreto armado à medida que a fissuração acontecia. Por outro lado, Chan *et al.* [13] utilizaram a rigidez homogeneizada da seção para o cálculo dos coeficientes da matriz de rigidez.

Tem-se como objetivo neste trabalho acoplar o MCD ao MRPR para proporcionar à plataforma CS-ASA – Computational System of Advanced Structural Analysis [7] – uma formulação capaz de avaliar capacidade resistente de estruturas mistas considerando conjuntamente os efeitos das não linearidades geométrica e física. Trata-se de uma nova formulação dentro do contexto da avaliação da plasticidade de forma concentrada. Assim, a simplicidade e o pequeno esforço computacional do MRPR são mantidos, e a precisão do MCD na avaliação da capacidade resistente é considerada. Embora algumas pesquisas recentes façam esse acoplamento MRPR/MCD, nenhuma delas utiliza a construção da relação momento-curvatura na análise da capacidade resistente da seção transversal. Além disso, para ampliar a gama de possibilidades de análise, prescrições normativas [1-2] para obtenção da capacidade resistente dos elementos são também implementadas. Torna-se assim possível avaliar o comportamento estrutural de elementos mistos com base nas considerações normativas, e realizar a comparação com resultados obtidos através da formulação generalizada proposta através do acoplamento MCD/MRPR.

2. Fundamentos para análise não linear de estruturas

O problema estrutural não linear global, no contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF) e MRPR/MCD, é resolvido através da seguinte equação:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, S) \cong \lambda \mathbf{F}_r \quad (1)$$

sendo \mathbf{F}_i o vetor de forças internas, que é escrito em função do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} , esforços internos nos membros, \mathbf{P} , e do parâmetro de avaliação da degradação da rigidez à flexão da seção, S . O vetor de forças externas é definido pelo produto entre o parâmetro de carga, λ , e \mathbf{F}_r , que é o vetor de forças externas de referência.

A Eq. (1) é resolvida aqui através do método de Newton-Raphson acoplado a estratégias de continuação, tais como a técnica do deslocamento generalizado [14] e a norma mínima dos deslocamentos residuais [15].

Computacionalmente, os efeitos da não linearidade geométrica são introduzidos na matriz de rigidez convencional através das matrizes \mathbf{K}_σ , \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 . \mathbf{K}_σ é a matriz de rigidez geométrica, \mathbf{K}_1 é função linear dos deslocamentos nodais incrementais enquanto os termos na matriz \mathbf{K}_2 são funções quadráticas [16]. Termos de ordem elevada (\mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2) podem ser desprezados, principalmente quando as estruturas são rígidas e a não linearidade do material se torna relevante.

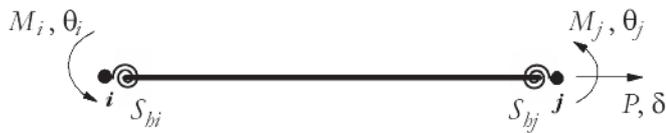


Figura 1
Elemento finito com molas rotacionais nas extremidades

3. Análise da plasticidade de forma concentrada

O programa computacional CS-ASA [5] vem sendo desenvolvido desde 2009, e já é consolidado para análises não lineares de estruturas de aço. Esse programa utiliza como metodologia para análise da plasticidade concentrada, nos pontos nodais, o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) [4].

São adotadas as seguintes hipóteses na modelagem das estruturas consideradas neste trabalho:

- interação total entre os materiais presentes na seção transversal;
- os elementos são inicialmente retos e prismáticos, e o empenamento é ignorado;
- a estrutura é perfeitamente travada no eixo ortogonal à mesma (problema 2D);
- efeitos de instabilidade localizados são desprezados;
- grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos; e
- efeitos de deformação por cortante são desprezados.

Na modelagem, via MEF, utiliza-se o elemento finito de pórtico plano delimitado pelos pontos nodais *i* e *j*, mostrado na Fig. 1. Também são ilustrados os esforços internos, M_i , M_j e P , e os respectivos graus de liberdade θ_i , θ_j e δ , referentes ao sistema corrotacional. São inseridas molas fictícias, de comprimento nulo, nas extremidades do elemento, para simular a degradação da rigidez à flexão através do parâmetro S .

O parâmetro S é definido dentro de três domínios (Fig. 2).

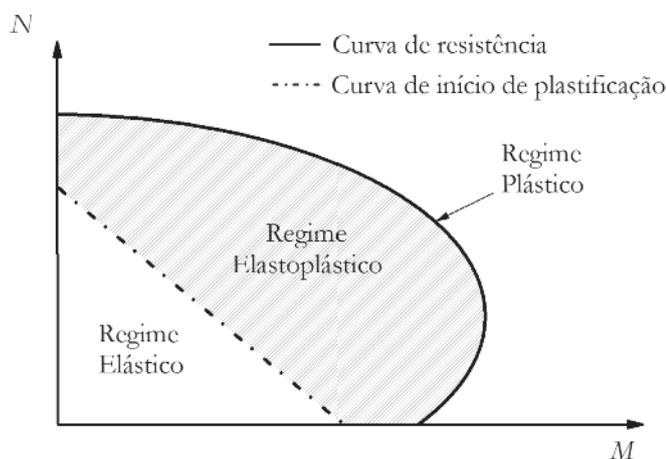


Figura 2
Curvas de interação esforço normal-momento; definição da rigidez à flexão das molas fictícias

Quando em regime elástico, é assumido para S o valor de 10^{16} . Tal regime é limitado pela curva de início de plastificação. Uma vez atingido o regime plástico (situação onde as forças internas atingem a curva de interação), tem-se a degradação da rigidez à flexão. Nesse caso, S é tomado, numericamente, igual a 10^{-10} . Entre as curvas de início e de final de plastificação, considera-se que a perda de rigidez ocorre de forma gradativa através da seguinte equação:

$$S = \frac{(EI)_{comp}}{L} \left(\frac{M_{pr} - M}{M - M_{er}} \right) \quad (2)$$

em que L é o comprimento do elemento finito; M_{pr} e M_{er} são, respectivamente, os momentos resistente último e de início de plastificação, que serão definidos na Seção 4; e $(EI)_{comp}$ é a rigidez à flexão da seção mista homogeneizada que, para seções duplamente simétricas e laje apoiada sobre perfil I, é dada por [17]:

$$(EI)_{comp} = \eta \left[(EI)_a + (EI)_b + (\mu EI)_c \right] \quad (3a)$$

$$(EI)_{comp} = E_a \left(0,4 I_{comp} + 0,6 I'_{comp} \right) \quad (3b)$$

em que os subscritos *a*, *b* e *c* se referem, respectivamente, ao perfil de aço, às armaduras e ao concreto; μ é o fator de redução da rigidez flexional do concreto devido à fissuração; e η um coeficiente de redução da rigidez global; e I_{comp} e I'_{comp} são os momentos de inércia da seção mista em regiões de momento positivo e de momento negativo, respectivamente.

Para o elemento ilustrado na Fig. 1, a relação força-deslocamento é expressa por [9]:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA_{comp}/L & 0 & 0 \\ 0 & S_i - S_i^2(k_{ji} + S_j)/\beta & (S_i S_j k_{ij})/\beta \\ 0 & (S_i S_j k_{ji})/\beta & S_j - S_j^2(k_{ii} + S_i)/\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ou

$$\Delta \mathbf{f}_{co} = \mathbf{K}_{co} \Delta \mathbf{u}_{co}$$

com $\beta = (S_i + k_{ii})(S_j + k_{jj}) - k_{ij}k_{ji}$. Os subscritos *i* e *j* indicam as extremidades do elemento e o subscrito *co* o sistema de coordenadas utilizado (corrotacional); $(EA)_{comp}$ é a rigidez axial da seção transversal mista homogeneizada; ΔP e ΔM são, respectivamente, o esforço normal e o momento fletor incrementais; $\Delta \delta$ e $\Delta \theta$ são os incrementos de deformação axial e rotação nodais.

Os termos k_{ii} , k_{jj} , k_{ji} e k_{ij} são obtidos conforme a formulação de Yang e Kuo [14]. Quando a seção se plastifica, qualquer aumento na carga incremental faz com que as forças internas extrapolem o limite resistente da seção transversal. Na formulação utilizada, isso é contornado por meio da estratégia denominada Return Mapping [5]. Nessa estratégia mantém-se o esforço normal atuante no elemento constante e retorna o momento solicitante para o contorno do domínio resistente da seção transversal. Em outras palavras, a Eq. (4) deve ser

modificada para que nessas situações a capacidade resistente dos elementos não seja violada.

4. Método da compatibilidade de deformações

A definição de M_{pr} e M_{er} , utilizados na Eq. (2), é feita no contexto do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). O acoplamento da configuração deformada da seção às relações constitutivas dos materiais que a compõem produz uma metodologia mais realista em comparação com os procedimentos normativos simplificados [1,2]. Para a obtenção o campo de deformações na seção de forma satisfatória, faz-se necessária a discretização da seção transversal. Em problemas bidimensionais a discretização em fatias é suficiente para a avaliação da capacidade resistente, porém esse procedimento é sensível ao grau de refinamento imposto pelo analista.

4.1 Comportamento do aço dos perfis e das armaduras

Fong e Chan [6] propuseram, que tanto para as armaduras quanto para o perfil metálico, que fosse adotada uma relação constitutiva elástica-perfeitamente plástica, apresentada na Fig. 3, assim descrita:

$$\sigma = \begin{cases} -f_y & \text{se } -\epsilon_u \leq \epsilon \leq -\epsilon_y \\ E_a \epsilon & \text{se } -\epsilon_y < \epsilon < \epsilon_y \\ f_y & \text{se } \epsilon_y \leq \epsilon \leq \epsilon_u \end{cases} \quad (5)$$

sendo f_y a resistência de escoamento, E_a o módulo de elasticidade do aço, ϵ_y e ϵ_u as deformações de escoamento e última, respectivamente.

4.2 Comportamento do concreto

Quando comprimido, o diagrama parábola-retângulo é adotado (Fig. 4a) limitado pela deformação última do concreto à compres-

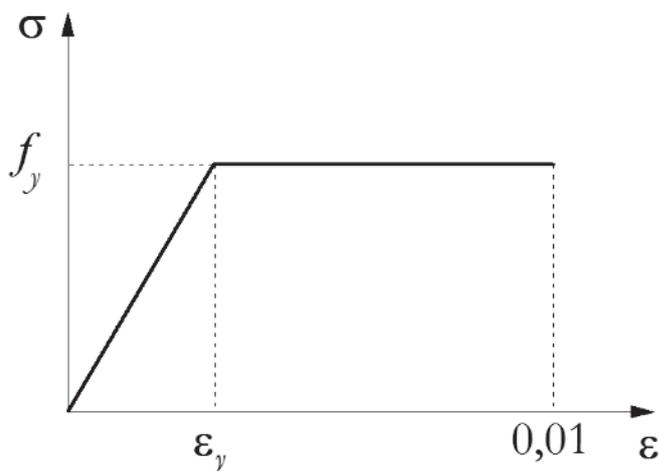


Figura 3 Relação constitutiva do aço

são, ϵ_{cu} . Conforme proposto por Bazant e Oh [18], há ainda a possibilidade da consideração, ou não, da resistência à tração dada por um modelo bilinear com inclinação positiva até que a deformação de início de fissuração, ϵ_{tr} , seja atingida, juntamente com a máxima resistência à tração, f_{cr} (Fig. 4b). A deformação limite para o concreto tracionado é considerado aqui 0,0007 como adotado por Bratina *et al.* [19]. Dessa forma, tem-se:

$$\sigma = \begin{cases} -f_c & \text{se } \epsilon_{cu} \leq \epsilon \leq \epsilon_{ci} \\ \left[\frac{2\epsilon}{\epsilon_{ci}} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{ci}} \right)^2 \right] f_c & \text{se } \epsilon_{ci} < \epsilon \leq 0 \\ E_{tr} \epsilon & \text{se } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{tr} \\ E_{tr,2} (\epsilon - \epsilon_{tr}) & \text{se } 0,0007 \geq \epsilon > \epsilon_{tr} \end{cases} \quad (6)$$

em que f_c é a resistência máxima à compressão do concreto, E_{tr} e

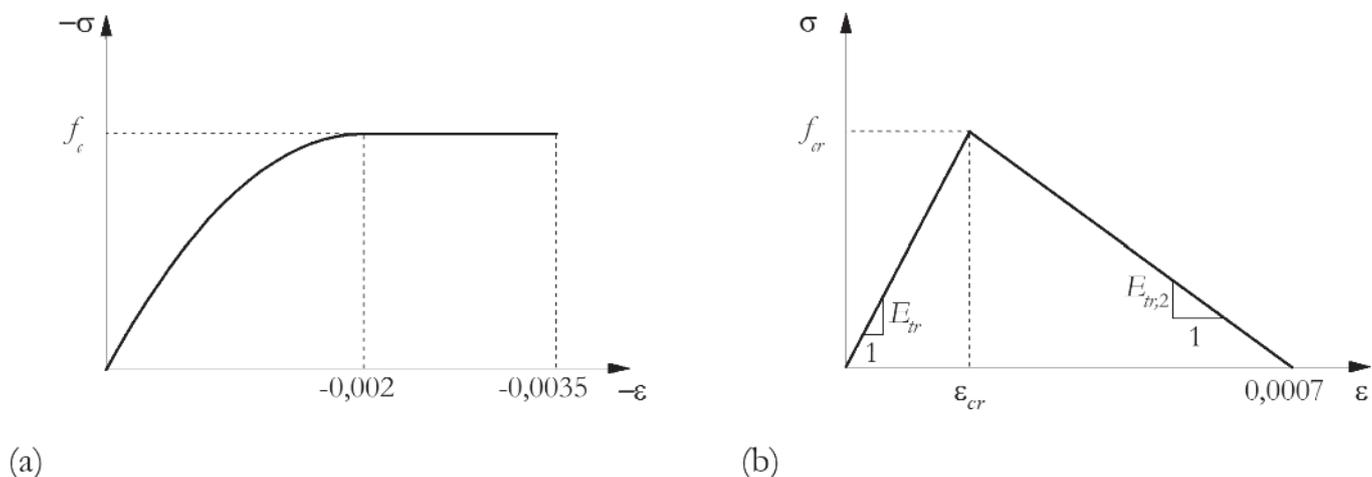


Figura 4 Relação constitutiva do concreto sob (a) compressão e (b) tração

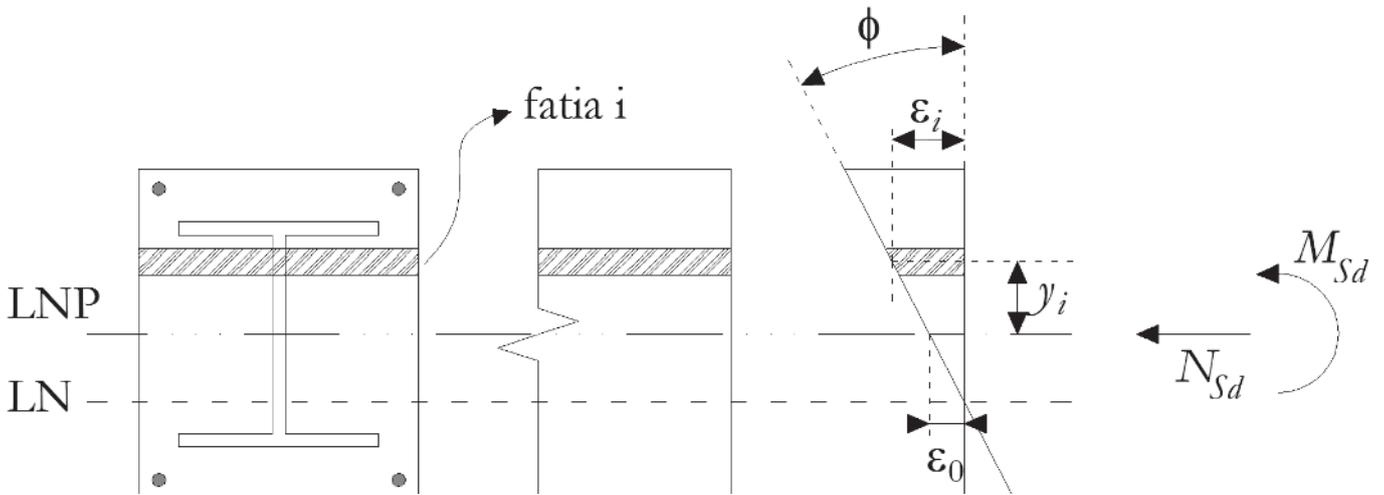


Figura 5
Campo de deformações linear bidimensional

$E_{tr,2}$ são os módulos de elasticidade do concreto sob tração, antes e após a fissuração, respectivamente. ϵ_{ci} é a deformação limite do regime parabólico do concreto à compressão.

4.3 Relação momento-curvatura

Uma vez discretizada a seção transversal, duas variáveis são relevantes para se empregar o MCD acoplado ao método de Newton-Raphson: a área das fatias e sua respectiva posição. Essa segunda é referenciada ao centroide plástico (CP) de forma a minimizar os problemas de convergência [8].

A posição do CP da seção é obtida através da seguinte expressão [20]:

$$y_{cp} = \frac{y_c A_c \gamma f_{cd} + y_a A_a f_{yd} + y_b A_b f_{ybd}}{A_c \gamma f_{cd} + A_a f_{yd} + A_b f_{ybd}} \tag{7}$$

com A_c , A_a e A_b sendo as áreas de concreto, do perfil metálico e da armadura, respectivamente; γ é um coeficiente de confinamento do concreto; y_c , y_a e y_b são as coordenadas do centroide, das respectivas áreas no eixo das ordenadas, em relação a um sistema de referência; e f_{cd} , f_{yd} e f_{ybd} são a resistência de cálculo do concreto, as resistências de escoamento de cálculo do perfil e das armaduras, respectivamente.

A Fig. 5 ilustra a distribuição de deformações na seção mista para uma combinação de esforços axial e de momento fletor. Note que a deformação axial na i -ésima fatia, ϵ_i , é dada por uma função linear, já que foi definido que os elementos apresentarão interação total. Assim:

$$\epsilon_i = \epsilon_0 + \phi y_i \tag{8}$$

em que y_i é a distância entre os centroides plásticos (CP) da fatia analisada e da seção transversal, ϵ_0 é a deformação axial no CP da seção e ϕ , a respectiva curvatura.

Para a notação matricial adotada a seguir, as variáveis ϵ_0 e ϕ serão posições do vetor de deformações $\mathbf{X} = [\epsilon_0 \ \phi]^T$. Torna-se necessário ajustar o vetor \mathbf{X} até que a configuração deformada da seção seja condizente com os esforços externos atuantes. Esse ajuste é feito

através do processo iterativo descrito a seguir. Chiorean [11] ressalta que adotando $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ na primeira iteração, a convergência é atingida mais rapidamente. Numericamente, pode-se dizer que o equilíbrio da seção é obtido quando a seguinte equação é satisfeita:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong \mathbf{0} \tag{9}$$

em que o vetor de forças externas é descrito como $\mathbf{f}_{ext} = [N \ M]^T$. Já o vetor de forças internas é dado por expressões integrais clássicas para o esforço axial, N_{int} , e momento fletor, M_{int} . Uma vez conhecidas as áreas, A_j , e posições, y_j , de cada fatia, a integral passa a ser o somatório descrito como:

$$\mathbf{f}_{int} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{fat}} \sigma_{ai} A_{ai} + \sum_{i=1}^{n_{fat}} \sigma_{ci} A_{ci} + \sum_{j=1}^{n_b} \sigma_{bj} A_{bj} - \sum_{j=1}^{n_b} \sigma_{cj} A_{cj} \\ \sum_{i=1}^{n_{fat}} \sigma_{ai} A_{ai} y_{ai} + \sum_{i=1}^{n_{fat}} \sigma_{ci} A_{ci} y_{ci} + \sum_{j=1}^{n_b} \sigma_{bj} A_{bj} y_{bj} - \sum_{j=1}^{n_b} \sigma_{cj} A_{cj} y_{cj} \end{bmatrix} \tag{10}$$

sendo n_{fat} o número de fatias utilizadas na discretização da seção transversal e n_b o número de linhas de armaduras presentes na seção mista. As tensões nas fatias, σ , são dependentes da configuração deformada da seção transversal, e consequentemente são funções de ϵ_0 e ϕ .

Embora seja adequado iniciar o processo com \mathbf{X} nulo, a convergência só é atingida na primeira iteração se os esforços externos forem nulos. Assim, para a iteração seguinte, $k+1$, o vetor de deformações é dado por:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \tag{11}$$

na qual \mathbf{F}' é a matriz de rigidez tangente da seção transversal ou matriz Jacobiana do problema não linear expresso na Eq. (9), isto é:

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{int}}{\partial \epsilon_0} & \frac{\partial N_{int}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial M_{int}}{\partial \epsilon_0} & \frac{\partial M_{int}}{\partial \phi} \end{bmatrix} \tag{12}$$

O critério de convergência adotado neste trabalho é baseado na razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F} , e do vetor de forças externas, \mathbf{f}_{ext} . Assim, essa relação deve ser menor que uma tolerância, assumida aqui como 10^{-5} .

O fluxograma do processo de obtenção da relação momento-curvatura é detalhado na Fig. 6.

Quando, para um dado esforço axial, é atingido o momento máximo da relação momento-curvatura, tem-se a plastificação total da seção. Define-se então, que esse par de esforços é um ponto da curva de interação normal-momento de plastificação total.

A curva de início de plastificação também é obtida a partir da relação momento-curvatura. Quando a primeira fatia da seção apresenta deformação axial, ϵ , maior que a deformação de início de escoamento do aço (do perfil e das barras longitudinais) e/ou a deformação de início de plastificação do concreto [6], a fatia inicia o processo de degradação e conseqüentemente a seção perde rigidez. O momento responsável por esse fato é tido como momento de início de plastificação.

5. Limitações da metodologia de análise

Alem das hipóteses simplificadoras citadas no item 3, como por

exemplo a perfeita interação entre os materiais, a desconsideração da deformação por esforço cortante, etc., há algumas limitações na metodologia de análise proposta. A utilização de molas fictícias nas extremidades do elemento finito para simular a plasticidade induz a uma simplificação condizente com o comportamento de estruturas puramente de aço. Na Figura 2 pode-se observar que a rigidez rotacional das molas, abordada no item 3, é definida dentro de três regimes (elástico, elastoplástico e plástico). Uma vez dentro do regime elástico, o parâmetro S da mola é mantido constante, ou seja, independente dos materiais usados na estrutura, haverá um comportamento linear elástico. Isso caracteriza o comportamento linear do aço dentro da Lei de Hooke, ilustrado na Fig. 3, para deformações menores do que ϵ_y . Assim, para a simulação numérica de estruturas mistas nesta formulação, as rigidezes axial e à flexão são avaliadas por meio da homogeneização da seção transversal.

O estudo e análise de estruturas de concreto armado requer uma avaliação mais criteriosa. Como ilustrado na Fig. 4, o concreto apresenta um comportamento não linear sob compressão para deformações menores do que ϵ_{cr} , o que indica uma limitação do uso das molas fictícias.

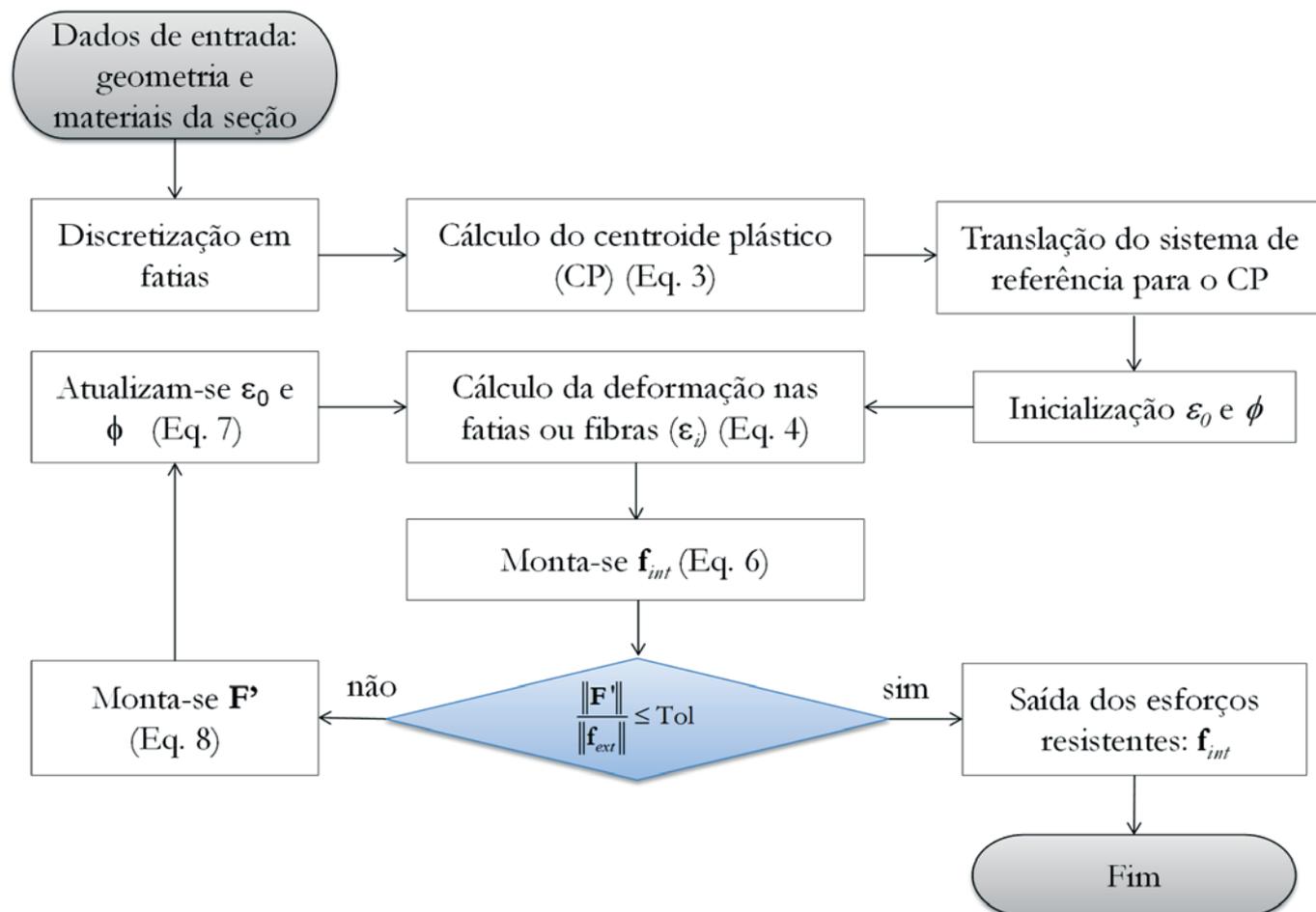


Figura 6
Fluxograma de solução do problema não linear local - relação momento-curvatura

6. Exemplos numéricos

As estratégias numéricas apresentadas nos itens anteriores são utilizadas agora visando a análise não linear de sistemas estruturais mistos de aço e concreto. Os exemplos avaliados são divididos em 4 grupos: curvas de interação, pilares isolados com seção circular preenchida com concreto, pilares curtos com materiais de alta resistência e pórtico misto simples. Os resultados encontrados são comparados com os apresentados na literatura, obtidos de forma numérica e/ou experimental. Para a simulação dos exemplos a seguir foi utilizado um computador com processador Intel Core i7 2.20 GHz e 8 GB de memória RAM.

6.1 Curvas de interação esforço normal-momento fletor

Nesta seção são estudadas as curvas de interação esforço normal-momento fletor de duas seções mistas. Em um primeiro momento, a seção totalmente revestida ilustrada na Fig. 7 é avaliada em torno dos eixos de maior e menor inércia. Trata-se de um perfil I (256x256x14,4x16 mm) de aço, com f_y tomado igual a 250 MPa, totalmente envolvido por concreto com f_{ck} de 25 MPa. Na sequência, estuda-se a seção circular metálica com diâmetro externo de 400 mm e espessura 10 mm com f_y = 275 MPa preenchida com concreto com f_{ck} de 35 MPa. Serão feitas duas análises em cada caso: a análise CST em que o concreto não apresentará resistência à tração; e a análise CCT em que a relação constitutiva ilustrada na Fig. 4b será considerada.

As curvas de interação foram construídas com 101 pontos de coordenadas (M,N), sendo cada uma das seções discretizada em 12 fatias. Tais dados são apresentados de modo a padronizar

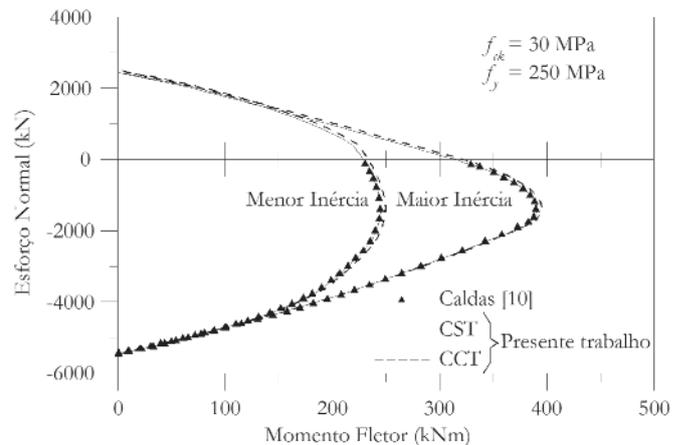
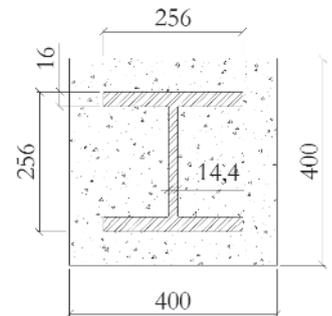


Figura 7 Curvas de interação normal-momento para seção mista totalmente revestida

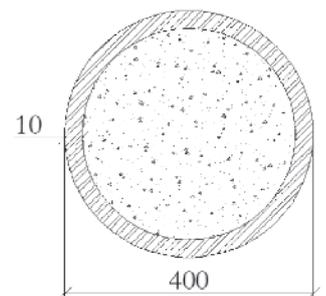
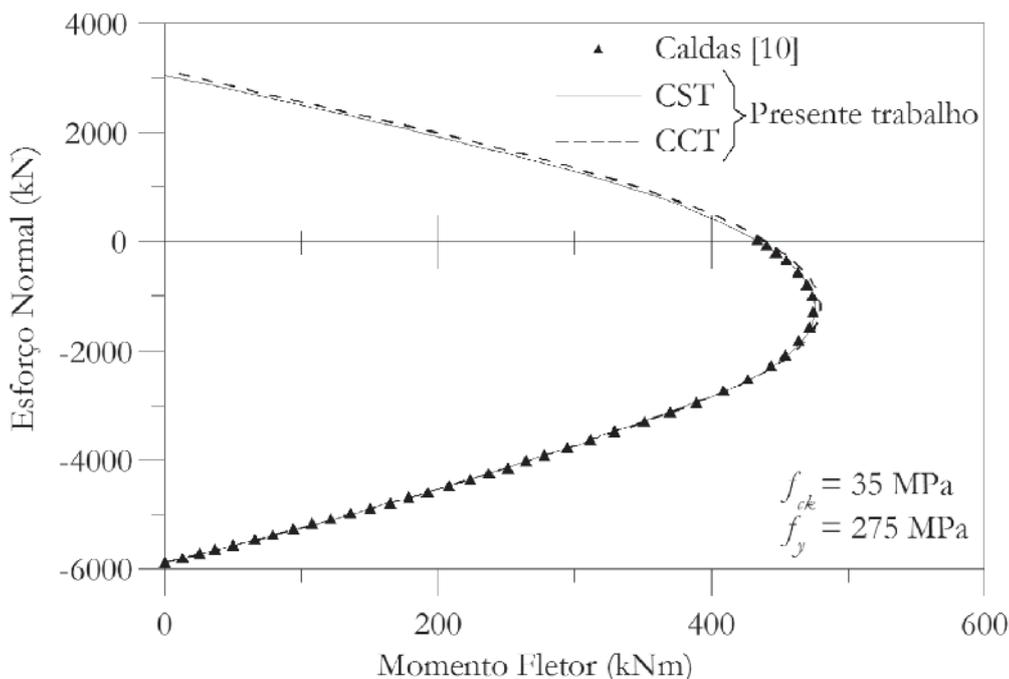


Figura 8 Curvas de interação normal-momento para seção tubular circular preenchida

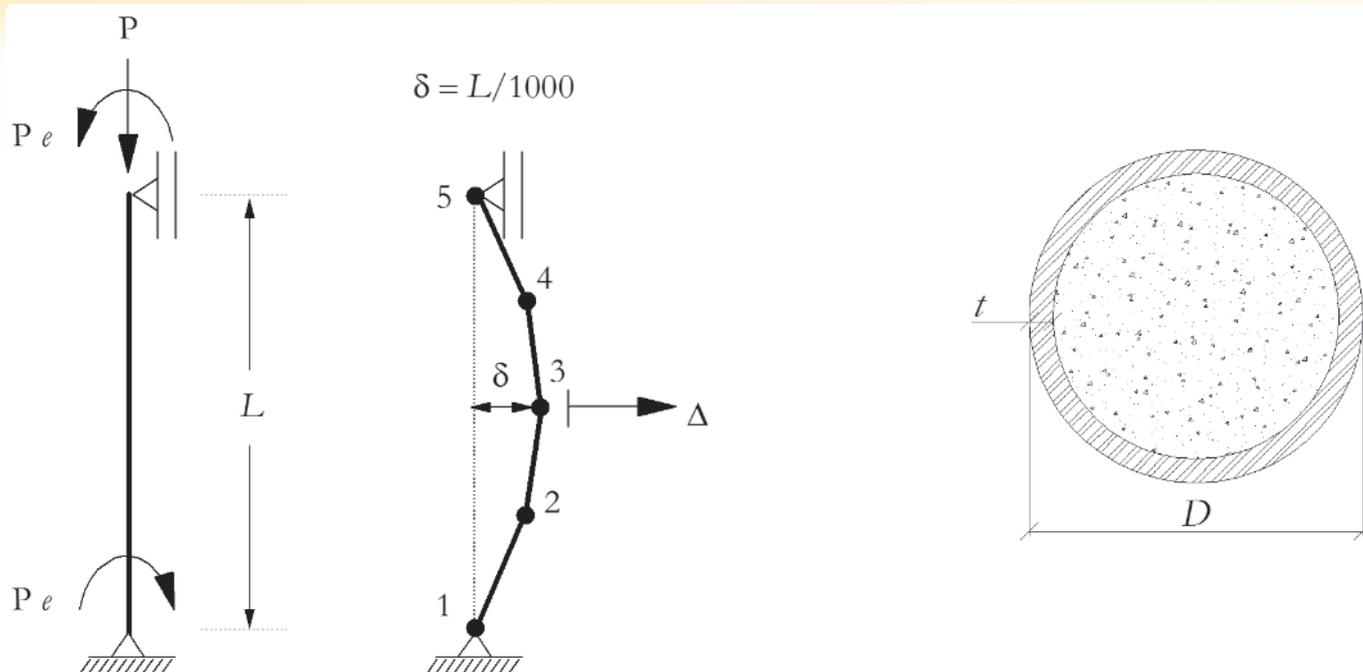


Figura 9
Modelo idealizado para análise de pilares circulares mistos com excentricidade

medidas comparativas de tempo de execução, que até então não eram fornecidas na literatura.

Na Figura 7 são ilustradas as curvas de interação do perfil metálico totalmente revestido por concreto para os eixos de maior e menor inércia. Foi avaliado também o acréscimo de resistência da seção transversal quando se considera o comportamento do concreto à tração, ilustrado na Fig. 4b. Numericamente, esse acréscimo é de aproximadamente 2,1% no primeiro quadrante do diagrama esforço normal-momento fletor. Para a construção das quatro curvas o *software* CS-ASA levou 0,57 segundos, ou seja, em média foram gastos 0,14 segundos para a construção de cada uma das curvas.

Na Figura 8 é ilustrado o comportamento da capacidade resistente da seção circular de aço preenchida com concreto. Uma vez que a seção apresenta o mesmo comportamento nos eixos x e y, apenas uma das curvas foi plotada. Para esse caso, foram necessários 0,28 segundos, com média de 0,14 segundos para cada curva. Verificou-se um aumento de 1,7% na capacidade resistente no primeiro quadrante quando considerada a contribuição do concreto tracionado na obtenção da curva.

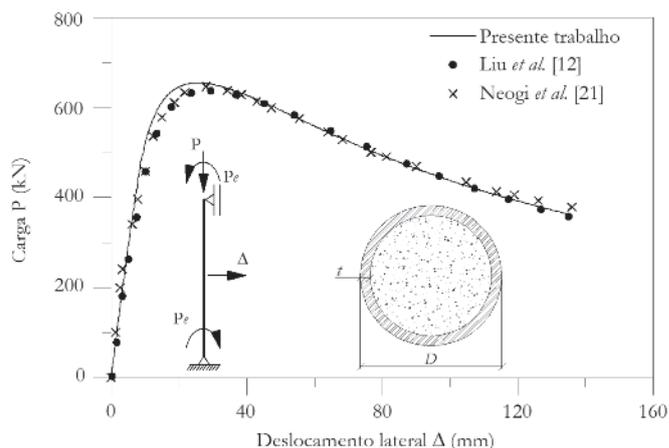


Figura 10
Trajetória de equilíbrio – pilar M5

Tabela 1
Geometria e dados dos materiais

Espécime	L (mm)	e (mm)	D (mm)	t (mm)	f_y (kN/mm ²)	f_{cu} (kN/mm ²)
M1	3048	47,6	169,4	5,11	0,309	0,05553
M2	3048	38,1	169,2	5,26	0,309	0,054
M3	3048	47,6	168,9	5,66	0,295	0,04247
M4	3048	47,6	168,4	6,55	0,298	0,038
M5	3048	47,6	169,4	7,19	0,312	0,032
M6	3048	38,1	169,4	7,29	0,312	0,03318
M7	3022,6	47,6	168,9	8,81	0,323	0,03306

Tabela 2

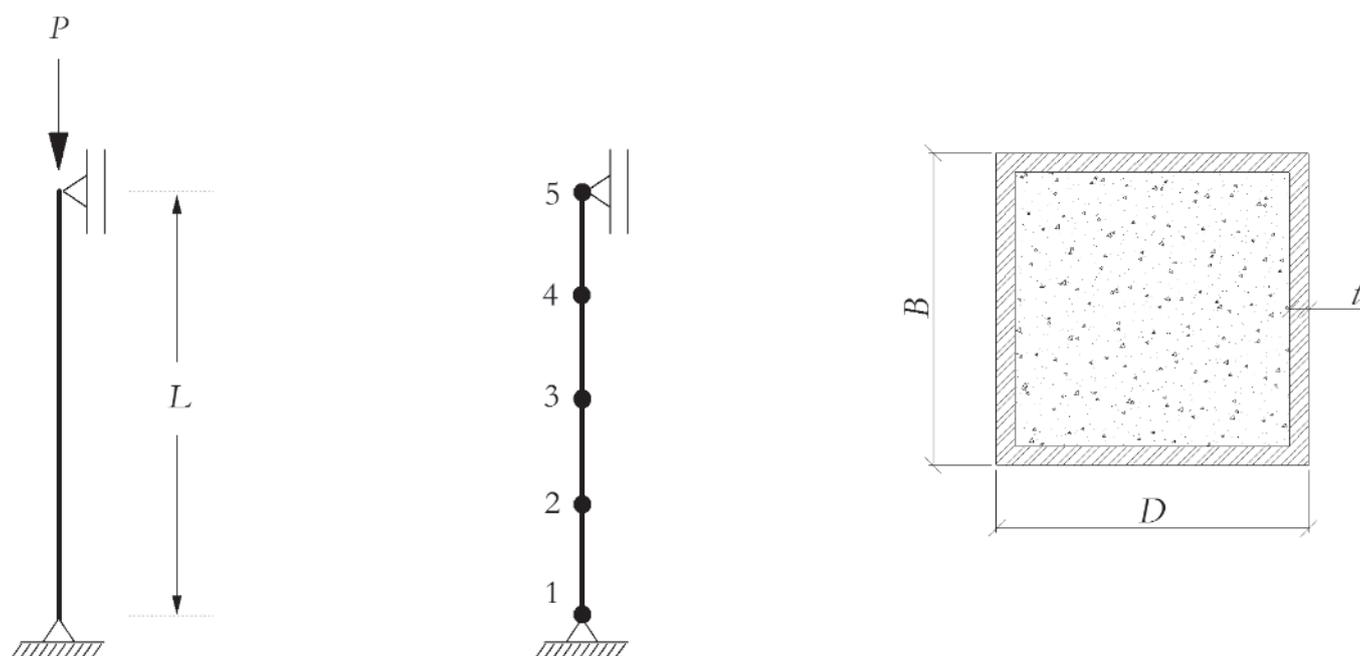
Cargas últimas, em kN, obtidas usando o MCD e comparações com a literatura

Espécime	P_{Teste}	P_{Liu}	P_{CS}	Tempo de processamento (s)	$P_{\text{CS}}/P_{\text{Teste}}$	$P_{\text{CS}}/P_{\text{Liu}}$
M1	622	607,3	628,5	2,22	1,010	1,035
M2	702	695,1	698,7	2,65	0,995	1,005
M3	600	590,1	586,5	2,30	0,978	0,994
M4	625	621,3	628,3	2,31	1,005	1,011
M5	653	642,8	655,3	2,57	1,003	1,019
M6	739	732,9	733,9	2,79	0,993	1,001
M7	758	756,1	750,7	3,13	0,990	0,993
Média					0,996	1,008
Desvio padrão					0,0107	0,0149

Nos casos abordados nesse item, observa-se boa concordância entre os resultados obtidos por meio do método de Newton-Raphson e os fornecidos por Caldas [10], que utiliza a abordagem do parâmetro de deformação D para a construção da curva. Nessa metodologia, um dos parâmetros de deformação é tirado dos domínios de deformação do concreto, e assim ajustam-se as equações para percorrer as configurações deformadas para o estado limite último da seção. Para ambos os casos abordados neste item, verifica-se que a proposta de se adotar a condição de singularidade da matriz Jacobiana da seção transversal (Eq. 12) como critério de parada para a construção das relações momento-curvatura é adequada.

6.2 Pilares isolados com seção circular preenchida

Sete pilares circulares metálicos preenchidos com concreto foram inicialmente analisados por Neogi *et al.* [21] de forma experimental. Liu *et al.* [12] e Fong e Chan [6] utilizaram esses resultados obtidos em laboratório para testarem suas formulações baseadas no MRPR. O modelo simulado consiste em um pilar simplesmente apoiado com uma imperfeição geométrica inicial ($\delta=L/1000$). A excentricidade da carga é introduzida ao sistema considerando momentos fletores tanto no topo quanto na base do pilar, como mostrado na Fig. 9. São utilizados 4 elementos finitos para a


Figura 11

Modelo idealizado para análise de pilares retangulares mistos sem excentricidade

discretização do sistema estrutural. Em termos locais, a seção transversal circular foi dividida em 16 fatias. Para a estratégia de incrementos de carga [14] o primeiro incremento deve ser fornecido e tomado neste exemplo como 2 kN.

As propriedades dos pilares analisados são mostradas na Tab. 1. O módulo de elasticidade do aço é tomado igual a 207000 MPa para todos os protótipos. Segundo Liu *et al.* [12], Neogi *et al.* [21] não fornecem o módulo de elasticidade do concreto, assim o mesmo é definido conforme as recomendações do ACI-318 [22].

Na Fig. 10 é comparada a trajetória de equilíbrio do pilar M5 obtida com o CS-ASA, com as fornecidas por Neogi *et al.* [21] e Liu *et al.* [12]. Nessa mesma figura, nota-se que no início das trajetórias há uma ligeira diferença, em que o modelo simulado no CS-ASA se apresenta um pouco mais rígido. Algumas fontes que podem causar tal divergência são: a formulação não linear geométrica, os refinamentos global e local, além de algumas variáveis como

as deformações limites das relações constitutivas dos materiais. Após o ponto limite de carga ser atingido, as trajetórias numéricas são praticamente coincidentes.

Na Tab. 2 são apresentadas as cargas últimas atingidas em cada uma das simulações. Nessa mesma tabela faz-se a comparação dos valores das cargas obtidas aqui com os resultados da literatura. A baixa diferença média calculada em relação aos resultados experimentais, P_{Teste} (0,4%), aponta para a confiabilidade das análises numéricas apresentadas para pilares mistos circulares sob flexão composta normal. Ressalta-se que a comparação com os resultados numéricos obtidos por Liu *et al.* [12], P_{Liu} , também apresentam pequena divergência. Saliencia-se que na Tab. 2, o valor da carga limite obtido com o CS-ASA é denotado P_{CS} . Outro ponto a ser destacado na formulação proposta neste trabalho é o baixo tempo de execução do programa para o cálculo de cada um dos protótipos, também mostrado na Tab. 2. O tempo mostrado

Tabela 3

Dados das seções transversais e cargas últimas

Espécime	B (mm)	h (mm)	t (mm)	L (mm)	P_{Teste} (kN)	P_{CS} (kN)	Tempo de processamento (s)	$\frac{P_{CS}}{P_{Teste}}$
C1-1	100,3	98,2	4,18	300	1490	1459	1,25	0,979
C1-2	101,5	100,6	4,18	300	1535	1500	1,31	0,977
C2-1	101,2	101,1	4,18	300	1740	1599	1,53	0,919
C2-2	100,7	100,4	4,18	300	1775	1585	1,36	0,893
C3	182,8	181,2	4,18	540	3590	3469	2,43	0,966
C4	181,8	180,4	4,18	540	4210	4078	2,94	0,969
C5-1	120,7	80,1	4,18	360	1450	1455	1,37	1,003
C5-2	119,3	80,6	4,18	360	1425	1449	1,39	1,017
C6-1	119,6	80,6	4,18	360	1560	1542	1,43	0,988
C6-2	120,5	80,6	4,18	360	1700	1552	1,33	0,913
C7-1	179,7	121,5	4,18	540	2530	2526	2,07	0,998
C8-1	180,4	119,8	4,18	540	2970	2917	2,30	0,982
C8-2	179,2	121,3	4,18	540	2590	2928	2,33	1,131
C9-1	160,2	81,4	4,18	480	1710	1747	1,60	1,022
C9-2	160,7	80,5	4,18	480	1820	1739	1,59	0,955
C10-1	160,1	81,0	4,18	480	1880	1865	1,62	0,992
C10-2	160,6	80,1	4,18	480	2100	1856	1,65	0,884
C11-1	199,8	101,2	4,18	600	2350	2426	1,97	1,032
C11-2	200,2	98,9	4,18	600	2380	2411	1,97	1,013
C12-1	199,2	102,1	4,18	600	2900	2816	2,23	0,971
C12-2	199,8	99,6	4,18	600	2800	2773	2,03	0,990
Média								0,981
Desvio padrão								0,053

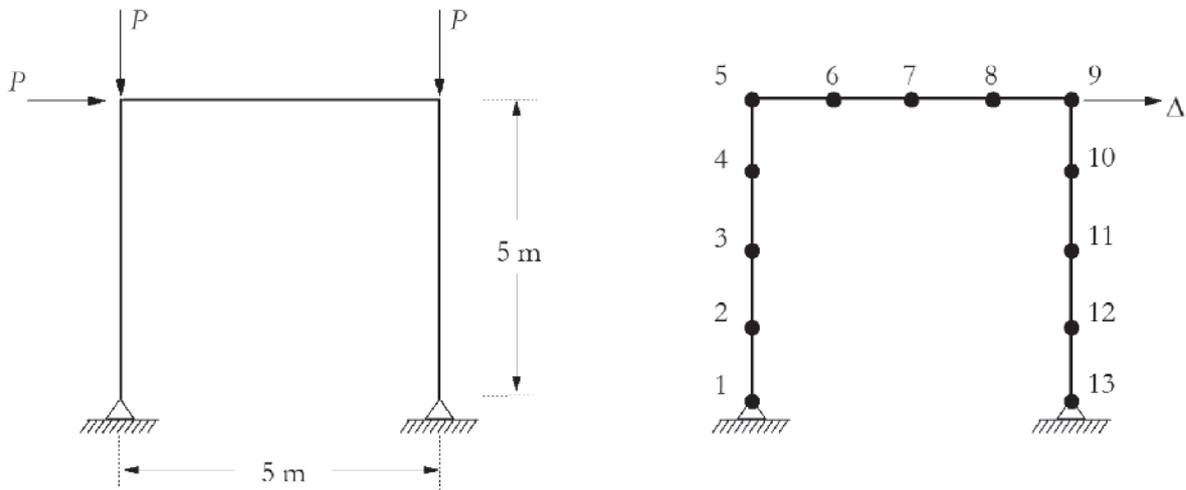
na tabela foi medido do instante em que a análise se inicia até o momento em que o ponto limite de carga foi atingido.

6.3 Pilares mistos curtos com materiais de alta resistência

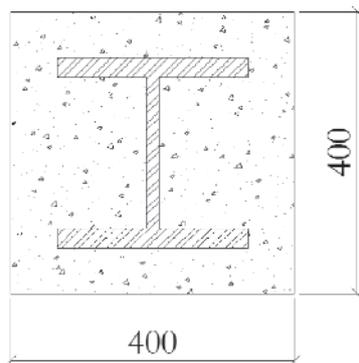
Liu *et al.* [23] realizaram o ensaio experimental de 21 espécimes tubulares retangulares mistos. Os materiais utilizados eram de alta resistência, sendo o aço com f_y igual a 550 MPa. A tensão de compressão cilíndrica do concreto varia entre 70,8 e 82,1 MPa. Basicamente, os ensaios foram realizados em pilares curtos de

modo que sua seção transversal conseguisse desenvolver sua capacidade resistente máxima. Além disso, a carga axial no elemento estrutural foi aplicada de forma concêntrica para evitar o aparecimento de esforços de flexão. Os pilares são simplesmente apoiados e foram discretizados da mesma forma tanto a nível global, utilizando quatro elementos e cinco nós, como ilustrado na Fig. 11, quanto a nível local, com 8 fatias.

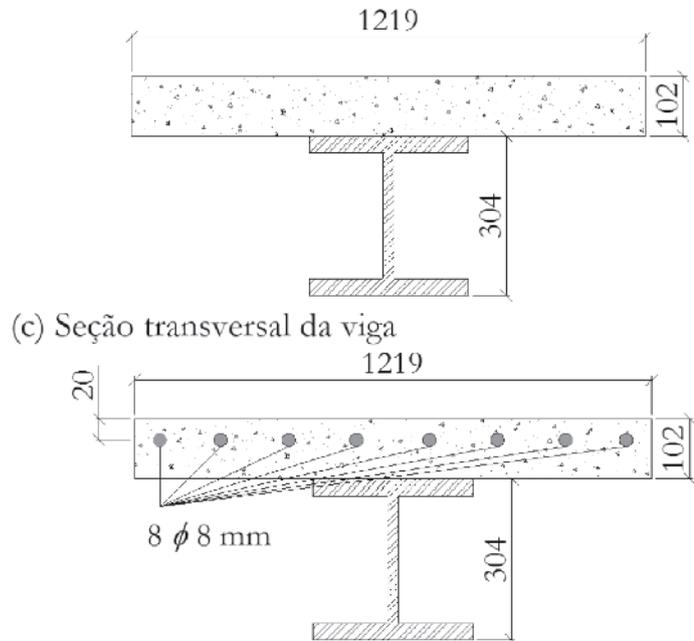
Os dados das seções transversais e os resultados obtidos com a formulação apresentada (P_{CS}) são descritos na Tab. 3, onde também é feita a comparação com os resultados experimentais (P_{Test}) obtidos por Liu *et al.* [23]. Através dessa tabela verifica-se uma



(a) Geometria, carregamentos e discretização

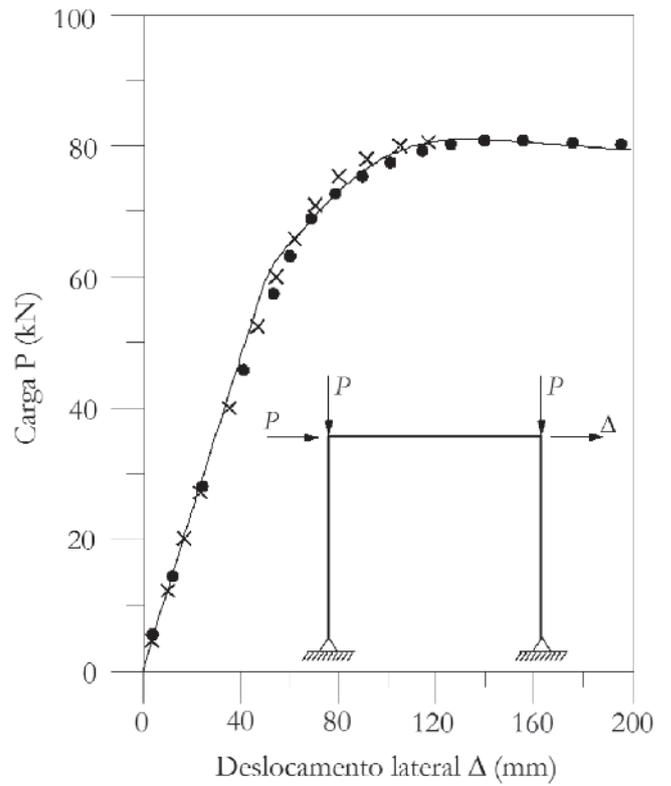
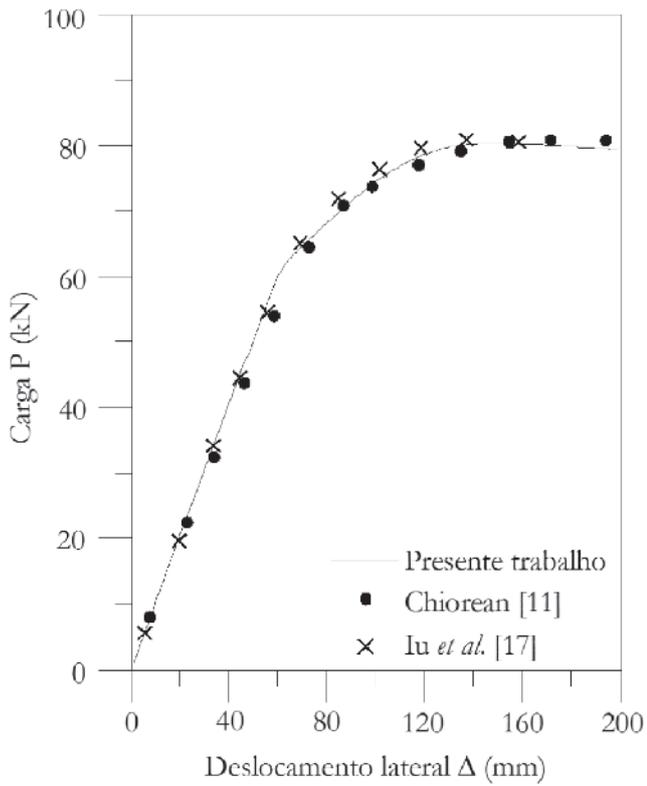


(b) Seção transversal dos pilares



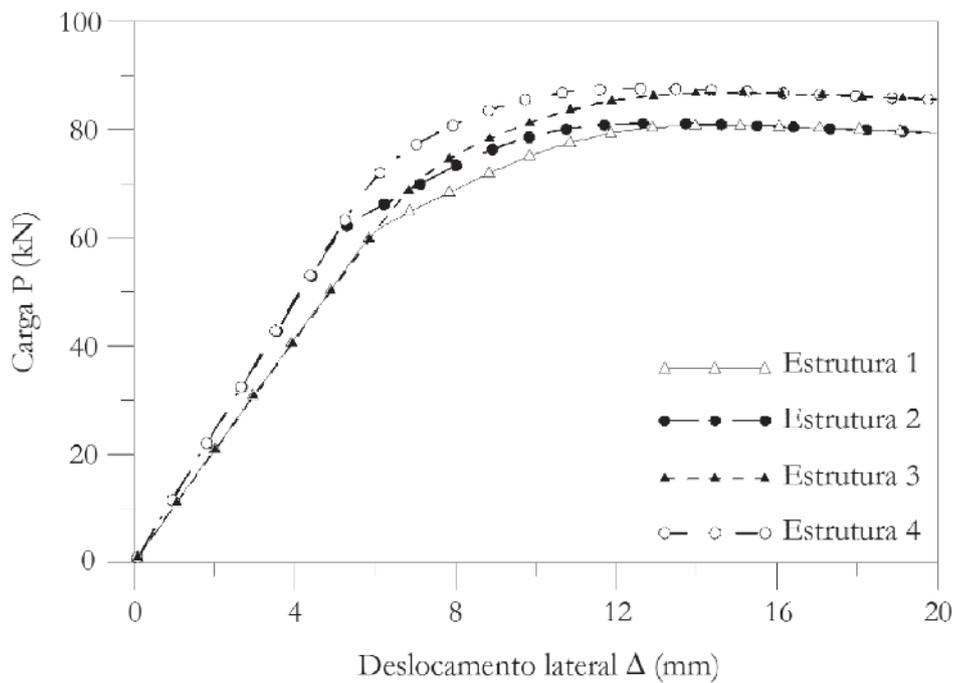
(c) Seção transversal da viga
(d) Seção transversal da viga armada – Estruturas 3 e 4

Figura 12
Pórtico simples: geometria, discretização e carregamentos



(a) Estrutura 1

(b) Estrutura 2



(c) Comparação entre as estruturas simuladas numericamente

Figura 13
Trajetórias de equilíbrio - pórtico simples

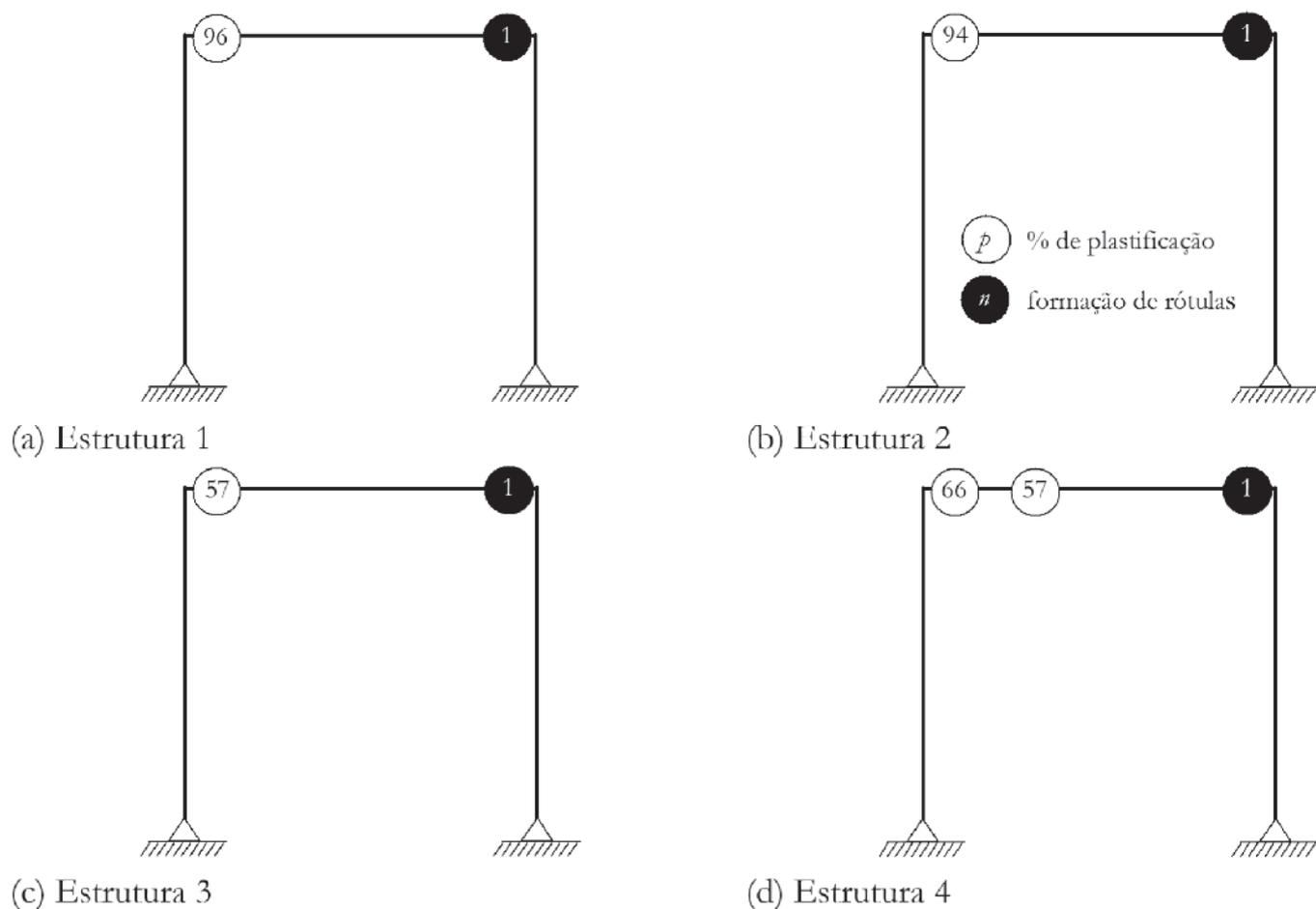


Figura 14
Formação de rótulas plásticas

boa aproximação entre os resultados numéricos e experimentais. Em termos médios, os dados extraídos do programa CS-ASA apresentam uma variação de apenas 1,9% em relação aos dados obtidos em laboratório. Destaca-se também a baixa dispersão dos resultados em relação à média calculada, como mostrado pelo desvio padrão, demonstrando assim, a confiabilidade dos resultados obtidos com a presente formulação numérica. Nessa mesma tabela são mostrados os tempos de execução do programa para cada um dos espécimes simulados.

Independentemente da consideração da não linearidade geométrica, a carga crítica do pilar é definida exclusivamente pela curva de interação esforço normal-momento. Isso ocorre pelo fato do pilar ser classificado como curto, ou seja, apresenta uma baixa esbelteza. Outro fator condicionante é a posição de aplicação da carga no centroide da seção, o que faz com que o pilar esteja sob ação do carregamento axial, sem momentos fletores. Em outras palavras, a carga última dos pilares é igual ao ponto da curva de interação onde há esforço normal de compressão máximo e momento fletor nulo.

Nota-se que, em alguns casos dois espécimes com mesmos materiais, o corpo-de-prova com menor seção transversal apresentou

uma carga limite, em termos experimentais, maior do que o outro elemento ensaiado. Isso pode ser visto se comparados os espécimes C2-1 e C2-2. Teoricamente esses valores deveriam ser invertidos, já que a redução da seção transversal implica diretamente na diminuição da capacidade resistente do elemento estrutural. Nos pilares C6-1 e C6-2 pode-se visualizar que nos testes a seção levemente maior (C6-2) apresentou uma capacidade de carga 9% maior. Por fim, destacam-se os resultados dos pilares C8-1 e C8-2. Esses pilares com seções muito semelhantes e mesmos materiais apresentaram 15% de diferença na capacidade resistente. Nesses casos citados percebe-se a maior discrepância se confrontados os resultados desses pilares com as análises via CS-ASA.

6.4 Pórtico simples

O pórtico mostrado na Fig. 12 foi inicialmente apresentado por Liew *et al.* [17] em um estudo de sistemas estruturais metálicos com vigas mistas. Os autores estudaram o ganho de rigidez e capacidade resistente proporcionado pela inclusão da laje de concreto se comparado a um sistema puramente metálico. Já Lu *et al.* [24] propuseram revestir totalmente os pilares com concreto.

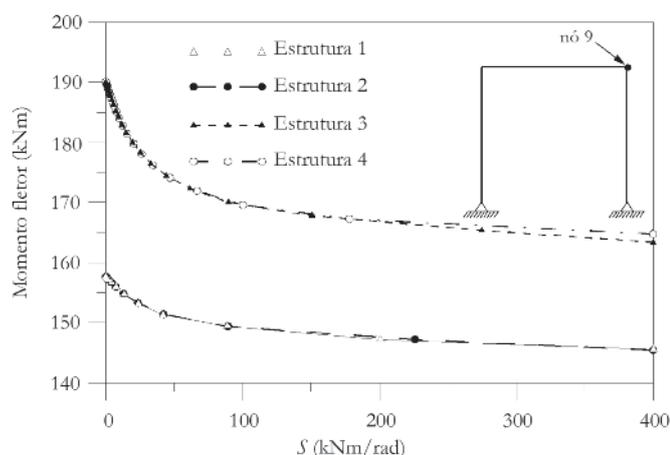


Figura 15
Degradação da rigidez da mola fictícia no nó 9

Posteriormente, Chiorean [11] validou suas formulações comparando as curvas carga-deslocamento obtidas por ele com as presentes na literatura.

A estrutura em questão é um pórtico simples de altura e vão iguais a 5 metros, sendo os pilares constituídos por perfis W12x50 e a viga por um perfil W12x27. Quando considerado o efeito da laje de concreto, a mesma apresenta altura igual a 102 mm e largura de 1219 mm. Os pilares são totalmente revestidos em uma segunda análise, apresentando seção mista quadrada de base igual a 400 mm. São aplicadas cargas incrementais verticais no topo dos pilares, e uma carga horizontal no topo do pilar esquerdo. É considerado que o pórtico não apresenta imperfeições geométricas iniciais. Cada membro do pórtico foi dividido em 4 elementos finitos, sendo as seções transversais discretizadas em 10 fatias.

São realizadas aqui duas análises presentes na literatura: estrutura com pilares metálicos e viga mista (Estrutura 1) e o sistema estrutural totalmente misto (Estrutura 2). O deslocamento no topo do pilar à direita é avaliado juntamente com a carga incremental nas trajetórias de equilíbrio. Uma vez que nas duas análises são utilizadas vigas mistas sem armaduras na região de momento negativo, propõe-se neste trabalho avaliar o ganho de resistência proporcionado pela inclusão de barras metálicas na laje. Nomeia-se então o pórtico com pilares metálicos e viga mista armada na região de momento negativo como Estrutura 3 e o pórtico misto com a viga armada na região de momento negativo como Estrutura 4.

Considera-se para o aço uma resistência de escoamento f_y igual a 248,2 MPa e um módulo de elasticidade tomado como 200000 MPa. A resistência característica do concreto à compressão, f_c , adotada é de 16 MPa e o módulo de elasticidade secante é calculado relacionando f_c com a deformação ϵ_{ci} tida como -0,002. Não foi permitido que o concreto ultrapassasse a deformação de -0,0035, definida como ϵ_{cu} .

Na Figura 13 são apresentadas as curvas carga-deslocamento para os quatro casos acima descritos. Os tempos de execução medidos do início da análise até o momento em que a carga limite é atingida para as Estruturas 1, 2, 3 e 4 são, respectivamente: 0,64 s; 0,66 s; 0,65 s; e 0,73 s. Nas trajetórias de equilíbrio obtidas por meio da análise via CS-ASA pode-se observar em ambas as análises,

uma perda de rigidez quase que instantânea do sistema estrutural próximo à carga P igual a 60 kN. Esse fato está relacionado à formação da primeira rótula plástica do pórtico (Fig. 14) que ocorre na viga próxima à junção com o pilar da direita. Esse trecho está sob efeito de momento negativo, ou seja, a contribuição da laje de concreto é praticamente nula, uma vez que não há armaduras longitudinais. Nessa mesma figura pode-se observar que apenas a viga apresenta pontos em regime de plastificação. Dessa forma, conclui-se que o preenchimento dos pilares com concreto não altera significativamente a capacidade resistente do sistema estrutural como um todo. A maior contribuição do preenchimento dos pilares com concreto se dá pela amplificação da rigidez desses elementos. A rapidez com que a plastificação ocorre se deve à relação constitutiva adotada para o aço. Com comportamento elástico-perfeitamente plástico, as curvas de final e de início de plastificação são muito próximas, implicando na redução do trecho de degradação da rigidez (regime elastoplástico).

Considerando a região de momento negativo armada com 8 barras de 8 mm de diâmetro ($f_{yr} = 400$ MPa e $E_b = 200$ GPa), percebe-se claramente que a perda de rigidez instantânea próxima à carga P igual a 60 kN desaparece. As armaduras inseridas na laje amplificam o momento resistente, aumentando o regime elastoplástico da seção transversal. Dessa forma, a degradação da rigidez é mais sutil se vista na trajetória de equilíbrio na Fig. 14. Como resultado, vê-se um ganho de capacidade resistente (carga limite P) da estrutura como um todo em torno de 7%.

A porcentagem de plastificação é mostrada dentro dos círculos sem preenchimento. Na Figura 15 são ilustradas as formas como ocorrem as degradações das rigidezes das molas fictícias no nó 9 da estrutura em relação ao momento fletor.

A plastificação se inicia quando a relação momento x S deixa de ser paralela ao eixo das abscissas, ou seja, quando a seção atinge o momento de início de plastificação. Quando a rigidez S se anula, o momento resistente último é atingido, ou seja, a combinação de esforços internos se encontra sobre a curva de interação.

7. Conclusões

No presente trabalho foi apresentada uma formulação numérica baseada no Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) para análises avançadas de estruturas mistas de aço e concreto. Nesse contexto, foi acoplada ao sistema computacional CS-ASA uma metodologia generalizada para obtenção da capacidade resistente, o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). As rigidezes axial e à flexão foram determinadas por meio da homogeneização da seção transversal.

No MCD, o Método de Newton-Raphson é utilizado para a determinação da relação momento-curvatura. Sua generalidade a nível local permite que, através das relações constitutivas apresentadas, seções puramente de aço ou de concreto armado submetidas à combinação de esforço axial e de momento fletor sejam também modeladas. Verificou-se no item 6.1 que a utilização da singularidade da matriz de rigidez como critério de parada da relação momento-curvatura adotada neste trabalho é condizente com os domínios de deformação utilizados por Caldas [10]. Nas Figuras 7 e 8 vê-se que a consideração da contribuição da resistência à

tração do concreto acresce aproximadamente 2% na capacidade resistente de seções mistas, sob esforços normais positivos. Em seções mistas, nota-se uma participação preponderante do perfil metálico em regiões tracionadas, já que seu comportamento é tratado como isotrópico.

A avaliação de elementos mistos considerando a plasticidade concentrada via MRPR também apresentou resultados condizentes com a literatura. Nos itens 6.2 e 6.3 foram avaliados elementos mistos sob flexão composta normal e sobre compressão simples, e em ambos os casos os resultados foram confrontados com dados obtidos em laboratório. Nas Tabelas 2 e 3 foram destacados, em termos médios, a boa proximidade entre os resultados numéricos e experimentais. Além disso, a baixa dispersão dos resultados em relação à média apontam para a confiabilidade das análises.

As Figuras 13a e 13b ilustram o comportamento de dois pórticos simples com mesma geometria porém seções transversais diferentes para os pilares. Em um primeiro momento os elementos verticais foram considerados puramente metálicos, em seguida os pilares foram totalmente revestidos com concreto. Percebe-se que não houve grande acréscimo na carga resistente, que é definida pela viga mista. Um fato importante a ser ressaltado é que nas análises presentes na literatura, a viga mista não é armada na região de momento negativo. Dessa forma, apenas o perfil metálico trabalha como elemento resistente. Tal fato associado ao comportamento elastoplástico utilizado no presente trabalho, induzem a uma perda de rigidez acentuada do sistema (plastificação na extremidade direita da viga) quando o parâmetro de carga é de aproximadamente 60 kN. Foi então proposta neste trabalho a inserção de armadura na viga mista no trecho de momento negativo. Dessa forma, a armadura introduz um acréscimo de capacidade resistente na seção crítica do sistema estrutural, como ilustrado na Fig. 14. Tal fato implicou em um acréscimo de 7% carga limite da estrutura e de 17% no momento máximo resistente da viga sob momentos negativos, como ilustrado na Fig. 15.

Adicionalmente, deve-se ressaltar o baixo tempo de execução das simulações realizadas no item 6 do presente trabalho. Foi observado durante as análises, que a formulação em questão, em termos de tempo de execução, apresenta sensibilidade ao valor adotado para o parâmetro inicial de incremento de carga. Valores muito pequenos aumentam o tempo de execução porém melhoram a precisão da resposta final. Tal observação pode ser feita também com relação às malhas local e global. Ainda assim, pelos exemplos aqui apresentados, verificou-se que um baixo índice de refinamento dessas malhas apresentaram resultados satisfatórios em relação aos dados presentes na literatura. Vale destacar que no exemplo 6.2 houve uma discretização um pouco mais refinada que nos demais problemas abordados no item 6. Isso pode ser explicado pelo grau de refinamento exigido para a modelagem de seções circulares, uma vez que as fatias geradas na discretização da seção transversal são retangulares, conforme ilustrado na Fig. 5.

Não foram abordados neste trabalho elementos de concreto armado no contexto estrutural global. De fato, a metodologia apresentada, em termos de uma análise da estrutura como um todo, não permite uma boa avaliação desse tipo de estrutura. Ao considerar que uma seção apresenta variação de rigidez à flexão apenas quando os esforços atuantes atingem a curva de início de

plastificação, pressupõe-se que todo tipo de elemento apresenta, inicialmente, um comportamento linear elástico. Como etapas futuras desta pesquisa, pretende-se eliminar essa limitação com a generalização da obtenção das rigidezes axial e à flexão, que serão retiradas diretamente das relações momento-curvatura nos dois pontos nodais do elemento finito. Dessa forma, a utilização do módulo de elasticidade tangente proporcionará maior precisão às análises. O comportamento de elementos mistos com interação parcial e pórticos mistos com ligações semirrígidas também serão estudados. Além disso, pretende-se estender as formulações e simulações à análise dinâmica de estruturas mistas.

8. Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, CNPq, Fapemig e UFOP pelo apoio fornecido durante a elaboração deste trabalho.

9. Referências bibliográficas

- [1] COMITE EUROPEEN DE NORMALISATION. Design of composite steel and concrete structures part I: general rules and rules for buildings. – EUROCODE 4, Brussels, Belgium, 2004.
- [2] AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION. Specification for structural steel buildings, Chicago, USA, 2010.
- [3] WENG, C.C., YEN, S.L. Comparisons of concrete-encased composite column strength provision of ACI code and AISC specifications. *Engineering Structures*, v.24, 2002; p.59-72.
- [4] CHAN, S.L., CHUI, P.P.T. Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections, Oxford: Elsevier, 2000, 336 p.
- [5] SILVA, A.R.D. Sistema computacional para análises avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas, Ouro Preto, 2009, Tese (doutorado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, 322 p.
- [6] FONG M., CHAN, S.L. Advanced analysis of steel-concrete composite beam-columns by refined plastic-hinge method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v.12, 2012.
- [7] LEMES, Í.J.M. Análise avançada via RPHM de estruturas mistas de aço e concreto, Ouro Preto, 2009, Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, 101 p.
- [8] CHEN, S., TENG, J.G., CHAN, S.L. Design of biaxially loaded short composite columns of arbitrary section. *Journal of Structural Engineering*, v.127, n.6, 2001; p.678-685.
- [9] LIU, S.W., LIU, Y.P., CHAN, S.L. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames part 1: Cross-section analysis technique and second order analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, v.70, 2012; p.326-336.
- [10] CALDAS, R. B. Análise numérica de pilares mistos aço-concreto, Ouro Preto, 2004, Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, 200 p.
- [11] CHIOREAN, C.G. A computer method for nonlinear inelas-

- tic analysis of 3d composite steel-concrete frame structures. *Engineering Structures*, v.57, 2013; p.125-152.
- [12] LIU, S.W., LIU, Y.P., CHAN, S.L. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames part 2: Refined plastic hinge and advanced analysis. *Journal of Constructional Steel Research*, v.70, 2012; p.337-349.
- [13] CHAN, S.L., Liu, S.W., LIU, Y.P. Advanced analysis of hybrid frames structures by refined plastic hinge approach. *In: Steel and Composite Structures – Proceedings of 4th International Conference*, 2010.
- [14] YANG, Y.B., KUO, S.B. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*, Singapore: Prentice Hall, 1994, 569 p.
- [15] CHAN, S.L. Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.26, 1988; p.2657-2669.
- [16] GALVÃO, A.S. *Formulações não lineares de EF para análise de sistemas estruturais metálicos reticulados planos*, Ouro Preto, 2000, Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, 168 p.
- [17] LIEW, J., CHEN, H., SHANMUGAM, N. Inelastic analysis of steel frames with composite beams. *Journal of Structural Engineering*, v.127, 2001; p.194-202.
- [18] BAZANT, Z.P., OH, B.H. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, v.16, 1983; p.155-177.
- [19] BRATINA, S., SAJE, M., PLANINC, I. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *International Journal of Solids and Structures*, v.41, 2004; p.7181-7207.
- [20] SFAKIANAKIS, M.G. Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics. *Advances in Engineering Software*, v. 33, 2002, p.227-242.
- [21] NEOGI, P., SEN, H., CHAPMAN, J. Concrete-filled tubular steel columns under eccentric loading. *The Structural Engineer*, v. 47, 1969, p.187-195.
- [22] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building code requirements for reinforced concrete*. – ACI 318, 1995.
- [23] LIU, D., GHO, W.M., YUAN, J. Ultimate capacity of high-strength rectangular concrete-filled steel hollow section stub columns. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 59, 2003, p.1499-1515.
- [24] IU, C.K., BRADFORD, M.A., CHEN, W.F. Second-order inelastic analysis of composite framed structures based on the refined plastic hinge method. *Engineering Structures*, v. 31, 2009, p.799-813.