Programação Dinâmica Aplicada a Finanças

Tara Keshar Nanda Baídya

PUC - RJ - Depto. Engenharia Industrial
Rua Marques de São Vicente, 225 - 22453-200 - Rio de Janeiro - RJ
E-mail: baidya@ind.puc-rio.br

Fernando Antônio Lucena Aiube

Petrobras - AV. Chile, 65, Sala 1703
20035-910 Rio de Janeiro - RJ
E-mail: aiube@ep.petrobras.gov.br

Key words: Stochastic Dynamic Programming, Continuous Time Finance, Engineering Economics

RESUMO

Este artigo mostra a aplicação da programação dinâmica estocástica e o seu uso em Finanças. Um dos objetivos mais usuais da teoria financeira é determinar a trajetória ou caminho ótimo para determinada variável. Brennan e Schwartz (1985) analisaram economicamente o investimento na exploração de um recurso mineral. Determinaram o valor do projeto e o instante ótimo de realizar o investimento. Para tal, usaram os conceitos da teoria das opções e técnicas de avaliação por arbitragem. Este artigo obtém o mesmo modelo usando a programação dinâmica e os conceitos de finanças em tempo contínuo.

ABSTRACT

This paper shows the dynamic programming approach related to Finance Theory. We exhibit how to construct the optimal path, one of the most important aims in the Finance. Brennan and Shwartz (1985) derived their model to evaluate a project of mining using option pricing theory and arbitrage approach. This is an use of option theory to evaluate a real project. Here we obtain the same model as an example, using stochastic dynamic programming.

I - Introdução

Uma das questões fundamentais da ciência é a de investigar o comportamento físico dos sistemas e expressá-lo através de leis matemáticas. Pode-se dizer que uma vez estabelecida a lei que rege o comportamento físico de um sistema, interessa averiguar o que ocorre quando alguns parâmetros, sobre os quais se pode atuar, são alterados. Da mesma forma, surge a necessidade de saber como ajustar os parâmetros de controle com o objetivo de atingir determinada meta como resposta do sistema. Pode-se desejar ir além, buscando-se otimizar o sistema, ou seja, buscando os pontos extremos de seu comportamento. A teoria da otimização consiste em determinar as soluções que maximizam ou minimizam o comportamento de sistemas.

O cálculo variacional foi a primeira disciplina que estudou os problemas de otimização. Posteriormente, surgiu a programação dinâmica como técnica mais abrangente na solução destes problemas.

De grande utilidade em Finanças é o caso em que as variáveis do problema não são determinísticas. Trata-se da programação dinâmica estocástica. Neste caso, assume-se que as variáveis de estado têm valores aleatórios de acordo com uma lei de distribuição de probabilidades. O problema fundamental pode ser visto como uma questão de planejamento: tomar decisões agora que permitam atingir o caminho ótimo através do tempo. A disciplina Programação Dinâmica Estocástica permite abordar problemas de gerência, planejamento e controle.

Trataremos inicialmente da programação dinâmica estocástica e posteriormente será apresentada sua aplicação em Finanças.

II - Programação Dinâmica Estocástica

O princípio básico da otimização dinâmica, denominado princípio da otimalidade, foi desenvolvido por Richard Bellman e pode ser assim enunciado:

"Uma trajetória ótima goza da seguinte propriedade: quaisquer que sejam os estado inicial e controle adotados para um primeiro intervalo de tempo, as decisões de controle remanescentes para o restante do período serão ótimas a partir das condições iniciais resultantes do primeiro estágio".

Considere o seguinte problema de controle estocástico ótimo:

$$\max_{q(t)} E_0\left[\int_0^t f(t,x(t),q(t))dt + B(x(T),T\right] \tag{2.1}$$

sujeito a:

$$d\tilde{x}(t) = g(t,x(t),q(t))dt + \sigma(t,x(t),q(t))d\tilde{Z}(t)$$

e $\quad x(0) = x0$

onde:

q(t): é denominada variável de controle. É uma função contínua em subintervalos do intervalo 0 £ t £ T x(t): é a variável de estado, aqui considerada como uma variável estocástica.

x(0): é o estado inicial

B(.): é denominada função terminal e estabelece a condição final.

E0: significa o valor esperado condicionado ao evento no tempo zero.

g(.): é a função que descreve o *drift* do processo.

s(.):é a função que descreve a volatilidade do processo.

dZ é o processo padrão de Weiner.

Define-se J*(t0,x0) como a função que descreve a trajetória ótima a partir do tempo t0 e do estado x(t0) = x0. J* é considerada uma função contínua e com derivada contínua.

$$J^*(t_0,x_0) \max_q E_{t0}\left[\int_{t0}^{t} f(t,x(t),q(t))dt + B(x(T),T\right]$$

(2.2)

A integral acima é separada em uma soma de duas outras. A primeira parcela refere-se ao intervalo de tempo compreendido entre t0 £ t £ t0 + Dt e a segunda refere-se ao intervalo de tempo compreendido entre t0 + Dt £ t £ T. Pelo princípio da otimalidade de Bellman a segunda integral é a função J* avaliada em t + Dt e x + Dx. Abandonando-se o subíndice zero pode ser escrito que:

$$J^*(t,x) = \max_{q(t)} E_t\left[f(t,x(t),q(t))dt + J^*(t+\Delta t, x+\Delta x)\right]$$

(2.3)

Expandindo J*(t+Dt,x+Dx) em série de Taylor:

$$J^*(t+\Delta t, x+\Delta x) = J^* + \frac{\partial J^*}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial J^*}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J^*}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 0(\Delta x, \Delta t)$$

(2.4)

A variável de estado pode ser discretizada simplificadamente como:

Dx = g Dt + s DZ e (Dx)2 = s2 Dt

Levando em (2.4) e posteriormente na equação (2.3) tem-se:

$$J^*(t,x) = \max_{q(t)} E_t\left[f\Delta t + J^*(t,x) + \frac{\partial J^*(t,x)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial J^*(t,x)}{\partial x}(g\Delta t + \sigma\Delta Z) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J^*(t,x)}{\partial x^2}\sigma^2\Delta t + 0(\Delta x, \Delta t)\right]$$

Subtraindo J* em ambos os membros, tomando o valor esperado e ainda dividindo por Dt:

$$-\frac{\partial J^*(t,x)}{\partial t} = \max_q\left[f(t,x(t),q(t)) + \frac{\partial J^*(t,x)}{\partial x}g(t,x,q) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 J^*(t,x)}{\partial x^2}\right]$$

(2.5)

E o problema do controle estocástico ótimo fica definido pela equação diferencial parcial acima. A equação (2.5) também pode ser expressa como:

$$0 = \max_q\left[f(t,x(t),q(t)) + \frac{1}{dt}E_t(dJ^*(t,x))\right]$$

(2.6)

onde o termo $\frac{1}{dt}E_t(.)$ significa o operador diferencial de Itô.

O problema pode ser resolvido para um horizonte de tempo infinito. Seja então:

$$V(x) = \max_q E_0 \int_0^{\infty} \exp(-rt) f(x(t), q(t)) dt$$

(2.7)

sujeito a:

$$d\tilde{x}(t) = g(t, x(t), q(t))dt + \sigma(t, x(t), q(t))d\tilde{Z}(t)$$

$$\text{e} \quad x(0) = x0 \qquad (2.8)$$

Seja J*(t0,x0) definida como anteriormente, tal que:

$$J(t_0, x_0) = \max_q E_{t0}\left[\int_{t0}^{\infty} \exp(-rt) f(x, q) dt\right]$$

(2.9)

$$J(t_0, x_0) = \exp(-rt_0) \max_q E_{t0}\left[\int_{t0}^{\infty} \exp(-r(t - t_0)) f(x, q) dt\right]$$

(2.10)

Usando (2.7), teremos:

$$V(x_0) = \max_q E_{t0} \int_{t0}^{\infty} \exp(-r(t - t_0)) dt$$

(2.11)

Então, a equação (2.10) pode ser escrita (abandonando o subíndice zero):

$$J(t, x) = \exp(-rt) V(x)$$

Tomando as derivadas parciais de J e levando em (2.9) teremos:

$$r\exp(-rt)V(x) = \max_q \begin{bmatrix} f(t, x, q)\exp(-rt) + \\ + \exp(-rt)V'(x)g + \frac{1}{2}\sigma^2 \exp(-rt)V''(x) \end{bmatrix}$$

Multiplicando por exp(rt), fica:

$$rV(x) = \max_q \left[(f(x, q) + V'(x)g(x, q) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, q)V''(x) \right]$$

(2.12)

$$rV(x) = \max_q \left[f(x(t), q(t)) + \frac{1}{dt} E_t(dV) \right]$$

(2.13)

Esta equação diferencial parcial expressa as condições necessárias para o controle estocástico ótimo para um problema de horizonte infinito definido na equação (2.7). Por tratar-se de um problema de horizonte de tempo infinito "V" não é função de t.

III - Programação Dinâmica Estocástica Aplicada a Finanças

Dentre as muitas aplicações da programação dinâmica a Finanças, destaca-se aquela referente a avaliação econômica de ativos reais. Será derivado o modelo de Brennan e Schwartz (1985). Este artigo tornou-se um trabalho clássico dentro do tema. Os autores avaliam um ativo (recurso natural) através da técnica de arbitragem com o desenvolvimento em tempo contínuo. O mesmo modelo será obtido fazendo uso da programação dinâmica estocástica.

Descrição e Formulação do Problema

Considere o caso em que o governo ou empresa governamental negocie a concessão dos direitos de lavra de uma jazida de um recurso mineral. Ambas partes têm interesse em avaliar economicamente o ativo. Admita que há um prazo finito sobre o qual o proprietário terá os direitos de exploração do recurso. Ao fim do prazo a propriedade é devolvida.

O arrendatário do recurso atua maximizando o valor monetário da propriedade. Por sua vez, o valor monetário é definido como o valor esperado da soma dos fluxos de caixa descontados ao instante presente. A maximização é feita atuando sobre a função de controle. Ele deve ajustar esta função a cada instante de modo a obter o valor máximo da propriedade. Considere hipoteticamente uma economia neutra ao risco. Seja t o tempo corrente, T a data final dos direitos do proprietário tal que 0 £ t £ T. O problema pode ser formulado como:

$$V(S,R,t) = \max_{q(S,R,t)} E_t\left[\int_0^T \pi(S,R,q,t)\exp(-rt)dt\right] \qquad (3.1)$$

onde:

V(.): denota a função valor

S: variável de estado do preço do produto gerado a partir da exploração do recurso mineral. Esta variável evolui segundo um processo estocástico.

R: variável de estado que denota a reserva da jazida. Esta variável é considerada determinística.

Et : operador expectância dado que se conhece as variáveis de estado em t.

p(.): função fluxo de caixa líquido.

q(.): função controle que é a taxa de extração do recurso mineral da jazida.

r: representa a taxa livre de risco admitida como constante.

sujeito as variáveis de estado:

$$\frac{dS}{S} = (r-k)dt + \sigma_S dZ \qquad (3.2)$$

$$dR = -qdt \qquad (3.3)$$

e à condição terminal:

$$V(S,R,T) = 0 \qquad (3.4)$$

onde k representa o retorno de conveniência marginal líquido e sS a volatilidade dos preços do recurso mineral que é negociado no mercado *spot*. A equação (3.2) representa um processo estocástico definido como processo estocástico browniano. A equação (3.3) representa a definição da taxa de extração e significa as variações da reserva por unidade de tempo. Está sendo considerado que a reserva da jazida segue um processo determinístico. Estamos diante de um problema de controle estocástico ótimo, tal qual aquele apresentado na equação (2.1).

Derivação do Modelo

Usando a equação de Bellman pode-se escrever:

$$rV = \max_{q} \left[\pi(.) + \tfrac{1}{dt} E_t(dV) \right] \tag{3.5}$$

A equação acima é uma relação de equilíbrio. O primeiro membro representa o retorno total do ativo. O segundo membro é composto de duas parcelas. A primeira é o fluxo de caixa e a segunda o ganho de capital. Usando o lema de Itô, teremos:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial R} dR + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial R^2}(dR)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial R}(dS)(dR)$$

Usando as variáveis de estados definidas nas equações (3-2) e (3-3):

$$dV = (r-k)S\frac{\partial V}{\partial S} dt + \sigma_S S \frac{\partial V}{\partial S} dZ - q\frac{\partial V}{\partial R} dt + \frac{\partial V}{\partial R} dt + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt$$

Aplicando o operado expectância:

$$\frac{1}{dt}E_t(dV) = (r-k)S\frac{\partial V}{\partial S} - q\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Este resultado levado em (3-5) fornece:

$$rV = \max_{q} \left[\begin{array}{l} \pi(.) + (r-k)S\frac{\partial V}{\partial S} - \\ q\frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \end{array} \right]$$

que é a equação geral que definirá o modelo. A EDP resultante é obtida após a maximização da expressão entre colchetes em relação a variável q. Esta equação é idêntica a equação (18) do artigo mencionado.

IV - Conclusões

A teoria das opções representa um marco relevante dentro da teoria financeira. Desenvolvida inicialmente para avaliação de ativo financeiros, hoje ela é empregada também na avaliação de ativos reais. Um dos artigos clássicos nesta área resultou do trabalho de Brennan e Schwartz (1985). Os autores avaliaram um recurso mineral (mina de cobre). Este minério é uma commodity negociada em mercados internacionais. Logo o seu preço flutua de acordo com as forças de oferta e demanda do mercado. Por esta razão admite-se que seu preço segue um processo estocástico bastante conhecido em Finanças. Eles fizeram uso fizeram uso da teoria das opções e dos conceitos de arbitragem. Este artigo mostrou a derivação do mesmo modelo usando a programação dinâmica estocástica, ressaltando portanto sua relevância na resolução de problemas em Finanças.

V - Bibliografia

Dixit, Avinash K., e Robert S. Pindyck. 1994. *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press.

Kamien, Morton I., e Nancy L. Schwartz. 1991. *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management.* New York: North-Holland.

Shimko, David C. 1992. *Finance in Continuous Time: A Primer.* Miami: Kolb Publishing Company.

Brennan Michael, e Eduardo S. Schwartz. 1985. "Evaluating Natural Resourse Investments". *Journal of Business* 58 (January): 135-157.