A Análise de Entrada/Saída ou a Análise de Insumo-Produto

Antônio Carlos Mattos *

A **análise de entrada/saída** consiste em um modêlo matemático utilizado no estudo do fluxo de materiais econômicos entre os diversos setores da economia.

Êsse modêlo é de grande valia na realização de **previsões,** onde se buscam as influências mútuas, em têrmos de fluxo de dinheiro, entre os centros consumidores e produtores de um sistema econômico.

A funcionalidade dêsse método reside no fato de que êle encara o sistema de um modo **global,** em contraposição com os métodos **clássicos,** onde a previsão se resume numa simples extrapolação gráfica.

Os primeiros trabalhos sôbre a **Análise de Entrada/Saída** datam de 1941, e são de autoria de Wassily W. Leontief, da Universidade de Harvard, Estados Unidos, sendo hoje universalmente

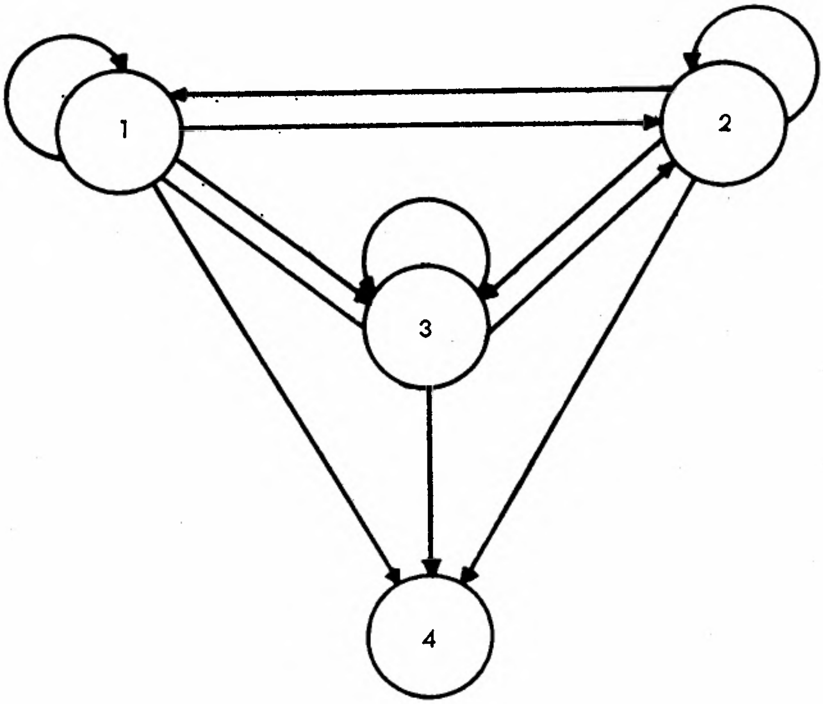
* Engenheiro eletricista, formado pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e aluno do Curso de Mestrado da Escola de Adminstração de Emprêsas de São Paulo, da Fundação Getúlio Vargas.

aceitos e utilizados por exemplo, pelo govêrno da Holanda, onde é feito, anualmente, um estudo macroeconômico, baseado nesse modêlo, sôbre a realidade econômica dêsse país.

2. O Modêlo Matemático

Vamos, inicialmente, imaginar uma rêde hidráulica urbana como, v.g., a esquematizada abaixo:

Gráfico 1



Os círculos indicam os centros fornecedores e consumidores de águas 1, 2 e 3; 4 é um centro apenas consumidor; as setas indicam as direções de escoamento.

Esse esquema visa a dar uma idéia física do modêlo que passaremos a apresentar.

O modêlo de **entrada/saída** tem um comportamento parecido com o acima exposto e surge naturalmente ao fazermos as seguintes associações na rêde acima, que passará a ser, então, a rêde de interdependência entre os setores econômicos:

a) os círculos 1, 2 e 3 corespondem a centros (ou setores) de movimentação econômica. Êsses setores nada mais são do que conjuntos de entidades produtoras, em princípio tão arbitrários como qualquer conjunto. A reunião dêsses setores deve fornecer o conjunto de tôdas as entidades produtoras, cujo comportamento se quer estudar.

Como exemplo, podemos fazer:

1. setor da agricultura
2. setor da indústria
3. setor de serviços.

Obviamente, podemos ter tantos setores quanto nos convém. Usamos apenas quatro por simplicidade. (O govêrno holandês divide a economia do seu país em 35 setores diferentes).

b) o círculo 4 representa o centro consumidor, para onde fluem os produtos dos demais setores.

c) as setas indicam o intercâmbio de produtos econômicos, normalmente medidos em unidades monetárias, que é a mais conveniente.

No nosso exemplo, o setor 2 é, na realidade, o conjunto de tôdas as indústrias e o intercâmbio de produtos industriais entre elas está representado pela seta que começa e termina em 2. O mesmo sucede com os demais setores.

Passemos, agora, ao equacionamento matemático do modêlo.

Antes, porém, transcreveremos uma tabela de **entrada/saída** oriunda do serviço de estatística americano, a título de exemplo:

Tabela 1

		para o setor de			consum.	total
		agricultura	indústria	serviços		
do setor de	agricultura	1,0	2,25	0,2	1,55	5
	indústria	2,0	6,0	1,0	16,0	25
	serviços	0,2	3,0	1,8	15,0	20

Vamos supor uma tabela, semelhante à acima, válida para um determinado ano (que chamaremos de instante t_o) e para uma determinada região econômica (na qual queremos realizar as previsões):

Tabela 2

		para o setor de					cs.	total
		1	2	3	......	N		
do setor	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	....	x_{1N}	C_1	T_1
	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	....	x_{2N}	C_2	T_2
	N	x_{N1}	x_{N2}	x_{N3}	....	x_{NN}	C_N	T_N

onde,

N é o número de setores produtivos
x_{ij} é o fluxo medido em têrmos de valor do setor i para o setor j
C_i é o fluxo em dinheiro do setor i para o centro de consumo dos produtos de i.
T_k é o total do setor k, isto é,

$$T_k = C_k + \sum_{i=1}^{i=N} x_{ki} \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{I}$$

Vamos estabelecer, agora, a **hipótese fundamental** do modêlo de **análise de entrada/saída.**

Esta hipótese, embora característica do modêlo ora em construção, mostrou-se aplicável na prática, dentro de certos erros, e é fruto de uma observação intuitiva, quando se estabelece a analogia hidráulica já apresentada.

Admitimos que, num intervalo Δt (temporal), T_1 (t_0) sofreu uma variação de p%, isto é

$$\Delta T_1 = T_1(t) - T_1(t_0) = p\% \cdot T_1(t_0)$$

A hipótese diz que se o total que *saiu* de *l*, T_l (t_o), sofreu uma variação de *p*% num intervalo Δt, então o que *entrou* em *l*, nesse mesmo intervalo Δt, também sofreu variações de *p*%, ou seja

$$\Delta x_{11} = x_{11}(t) - x_{11}(t_0) = p\% \cdot x_{11}(t_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta x_{N1} = x_{N1}(t) - x_{N1}(t_0) = p\% \,.\, x_{N1}(t_0)$$

De um modo geral, temos:

$$i = 1{,}2, \ldots, N \begin{cases} \Delta T_i = pT_i(t_0) \\ \Delta x_{ki} = px_{ki}(t_0) \qquad k = 1{,}2, \ldots, N \end{cases}$$

Definição: definimos como **coeficiente técnico** a relação

$$k_{ki} = \frac{\Delta x_{ki}(t_0)}{\Delta T_i(t_0)}$$

ou, em conseqüência da hipótese acima,

$$k_{ki} = \frac{x_{ki}\ (t_0)}{T_i\ (t_0)} \qquad (constante) \qquad \text{(II)}$$

Observação: poderíamos ter definido

$$k_{ki} = \lim_{\Delta_t \to 0} \left(\frac{\Delta x_{ki}}{\Delta T_i} = \frac{\partial x_{ki}}{\partial T_i} \right)_{t=t_0}$$

Entretanto, as complexidades que tal definição introduziria não são justificáveis, pois a outra é suficiente para os fins a que se destina, além de não necessitar o conhecimento da função

$$\partial\, x_{ki}/\partial T_i.$$

Da relação (II)

$$x_{ki}(t_0) = k_{ki} \cdot T_i(t_0)$$

Substituindo em (I):

$$T_k(t_0) = C_k(t_0) + \sum_{i=1}^{i=n} k_{ki}T_i(t_0)$$

Esta relação pode ser escrita sob a forma matricial; de fato, sendo

$$T = (T_k) = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n \end{pmatrix}; \; C = (C_k) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n \end{pmatrix}; \; K = (k_{ij}) =$$

$$= \begin{pmatrix} k_{11}\, k_{12} \ldots k_{1n} \\ k_{21}\, k_{22} \ldots k_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{n1}\, k_{n2} \ldots k_{nn} \end{pmatrix}$$

onde os k_{ij} são dados pela relação (II), vem

$$T = C + K \,.\, T;$$

daí temos que $\Delta T = \Delta C + K \cdot \Delta T$ onde

$$\begin{cases} \Delta T = T(t) - T(t_0) \\ \Delta C = C(t) - C(t_0) \end{cases}$$

Somando membro a membro as duas relações acima

$$T(t_0) + \Delta T = C(t_0) + \Delta C + K \cdot [T(t_0) + \Delta T] \quad \text{ou}$$
$$T(t) = C(t) + K \cdot T(t) \quad \text{ou ainda}$$

$$\boxed{C(t) = (I - K) \cdot T(t)} \qquad \text{(III)}$$

sendo I a matriz-unidade (NxN).

De (II) também obtemos:

$$\boxed{x_{ki}(t) = k_{ki} \cdot T_i(t)} \qquad \text{(IV)}$$

Chegamos, assim, às expresões (III) e (IV) que nos permitem prever os valôres de C (ou de T) num instante $t \neq t_o$, a partir do conhecimento de K e do valor de T (ou de C) para $t = t$.

Essas são as expressões matemáticas da **Análise de Entrada/Saída.**

3. Exemplo Numérico

Vamos aplicar a fórmula acima num exemplo numérico, dado pela tabela inicialmente apresentada. Neste caso:

$$T(t_0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix}; \; C(t_0) = \begin{pmatrix} 1{,}55 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}; \; X(t_0) = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 2{,}25 & 0{,}2 \\ 2{,}0 & 6{,}0 & 1{,}0 \\ 0{,}2 & 3{,}0 & 1{,}8 \end{pmatrix}$$

e sendo $K = (x_{ki}/T_i)$

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}09 & 0{,}01 \\ 0{,}40 & 0{,}24 & 0{,}05 \\ 0{,}04 & 0{,}12 & 0{,}09 \end{pmatrix}$$

Vamos prever o valor de $T(t)$ no caso do consumo agrícola sofrer um aumento de 0,5 bilhão de dólares, isto é, quando

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0{,}5 + 1{,}55 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}05 \\ 16 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Da expressão (III):

$$\begin{pmatrix} 2{,}05 \\ 16{,}00 \\ 15{,}00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}2 & -0{,}09 & -0{,}01 \\ -0{,}4 & 1 - 0{,}24 & -0{,}05 \\ -0{,}04 & -0{,}12 & 1 - 0{,}09 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

ou
$$\begin{cases} 0{,}8\, T_1 - 0{,}09\, T_2 - 0{,}01\, T_3 = 2{,}05 \\ -0{,}4\, T_1 + 0{,}76\, T_2 - 0{,}05\, T_3 = 16 \\ -0{,}04\, T_1 - 0{,}12\, T_2 + 0{,}91\, T_3 = 15 \end{cases}$$

Resolvendo êsse sistema, obtemos:

$$\begin{cases} T_1 = 5{,}6659 \\ T_2 = 25{,}3555 \\ T_3 = 20{,}0762 \end{cases}$$

que são os valôres de $T(t)$ procurados.

Notemos, aqui, que um aumento do consumo agrícola influi também na produção industrial e de serviços, pois todo o sistema se acha inter-relacionado; êste fato importante poderia passar despercebido numa análise empírica. No govêrno holandês, por exemplo, quando da publicação dos dados de insumo-produto, nota-se que variações no consumo de produtos têxteis implicam em variações na produção de tabaco, dois setores produtivos aparentemente não relacionados.

Observação: no caso acima, a relação (III) poderia ser escrita

$$T(t) = (I - K)^{-1} \cdot C(t)$$

4. Comentários Finais

A forma de abordagem global é patente nessa análise de **entrada/saída.** Ela permite prever inclusive **engarrafamentos (bottlenecks)** de produção.

Suponhamos, por exemplo, que um aumento de 5% no consumo de produtos agrícolas (econômicamente razoável) implicasse num aumento de 50% na produção industrial. Como 50% é um valor não encontrado na prática, concluiríamos que o aumento de 5% não é viável, isto é, a produção industrial sofreria um processo de saturação (não é linear).

Bibliografia

CHENERY, H. B. & CLARK, P. G. *Interindustry Economics.* Nova Iorque, John Wiley & Sons, 1959.

HATANAKA, M. *The Workability of Input-Output Analysis.* Ludwigshafen am Rhein, Fachverlag für Wirtschafstheorie und Ökonometrie, 1960.

LEONTIEF, W. W. *The Structure of American Economy, 1919-1939.* 2ª edição. Fair Lawn, N. J. Oxford University Press, 1951.

LEONTIEF, W. W. et al. *Studies in the Structure of the American Economy.* Fair Lawn, N. J., Oxford University Press, 1953.

THEIL, Henri, BOOT, John G. G. & KLOEK, Teun. *Operations Research and Quantitative Economics.* Intern. St. Ed., Nova Iorque, McGraw-Hill, 1965.