Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 26, n. 4, p. 359 - 363, (2004)
www.sbfisica.org.br

Como o potencial vetor deve ser interpretado para revelar analogias entre grandezas magnéticas e elétricas

(How the vector potential is to be interpreted in order to reveal analogies between magnetic and electric quantities)

G.F. Leal Ferreira[1]

Instituto de Física de São Carlos, São Carlos, SP

Recebido em 07/08/2004; Revisado em 17/11/2004; Aceito em 18/11/2004

Mostra-se a partir dos potenciais de Liénard-Wiechert que o potencial vetor pode, em geral, ser expresso como produto do potencial escalar e da velocidade da carga que o cria, constituindo-se como se fosse uma espécie de vento de potencial. Mostra-se daí como uma certa analogia existente entre grandezas magnéticas e elétricas pode ser entendida.

Palavras-chave: potencial vetor, potencial escalar, potenciais de Liénard-Wiechert, relação entre potenciais elétricos.

Starting from the Liénard-Wiechert potentials, it is shown that the vector potential can always be expressed as a product of the scalar potential and the velocity of the charge creating it, looking like a kind of potential wind. From that, it is shown how a certain existing similarity between magnetic and electric quantities may be understood.

Keywords: vector potential, scalar potential, Liénard-Wiechert potentials, relation between electrical potentials.

1. Introdução

Embora a Eletrostática se inicie pelo estudo da carga pontual, as distribuições de carga são logo popularizadas afim de se ter acesso a várias situações de interesse. E quando os fenômenos não estacionários são depois abordados, as expressões dos potenciais de distribuições volumétricas são tomadas como ponto de partida, convenientemente generalizadas para incluir o efeito de retardo, gerando os potenciais retardados nos quais se toma em conta o tempo de propagação da ação do elemento de carga ao ponto considerado, com a velocidade da luz. Dos potenciais retardados, por um processo limite, chega-se aos potenciais de uma carga pontual em movimento -os potenciais de Liénard-Wiechert (L-W) -, que não são simplismente os potenciais contados a partir da posição retardada da carga, pois devem ser corrigidos por uma fator bem conhecido, que chamamos de paralaxe cinética, [1-4] (ver seção 3).

Propuzemos há pouco [5] obter os potenciais de L-W diretamente da consideração da carga em movimento. Os potenciais desta seriam naturalmente os potenciais devido à posição retardada da carga, justificando o fator de paralaxe cinética acima mencionado por setem os potenciais grandezas propagadas e, como tais, sujeitas a efeito do tipo Doppler, devido ao movimento da carga em relação ao ponto do espaço em consideração.

Aquí, propomos voltar a considerar, como elemento básico de análise de um sistema dinâmico de cargas, as cargas pontuais em movimento (e não as densidades de carga e corrente). Acontecerá então algo bastante interessante nesta descrição a partir das cargas. Enquanto que na linguagem dos potenciais retardados o potencial vetor parace ter um papel primordial via a chamada condição de Lorentz, o oposto ocorrerá aquí, na qual o potencial vetor será visto como uma grandeza satélite do potencial escalar - como

[1]Enviar correspondência para G.F. Leal Ferreira. E-mail: guilherm@if.sc.usp.br.

uma espécie de vento do potencial escalar -, e permitirá mostrar a velada semelhança entre as grandezas elétricas e magnéticas, o que é muito relevante didaticamente.

2. A condição de Lorentz

É bem conhecido [1-4,6] que os potenciais retardados, escalar $\Phi(\vec{x},t)$ e vetorial $\vec{A}(\vec{x},t)$, estão relacionados pela condição de Lorentz, sendo c a velocidade da luz,

$$\nabla.\vec{A}(\vec{x},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi(\vec{x},t)}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

relação essa cuja origem pode ser traçada à equação da continuidade existente entre suas fontes, as densidades de corrente e de carga [2]. Como curiosidade histórica, mencionamos que B. Riemann deduziu, no contexto de sua teoria, uma equação como a Eq. 1, interpretando-a com os conceitos da época da seguinte maneira [7]: como uma equação de continuidade, em que Φ representaria a densidade de éter e $c\vec{A}$ sua densidade de corrente.

3. Os potenciais de Liénard-Wiechert

Os potenciais $\Phi(\vec{x},t)$ e $\vec{A}(\vec{x},t)$ de uma carga pontual q, com velocidade $\vec{v}$,os potenciais de Liénard-Wiechert, são

$$\Phi(\vec{x},t)=q\left[\frac{1}{r(1-\frac{\vec{r}.\vec{v}}{cr})}\right]_{ret} \qquad (2)$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{q}{c}\left[\frac{\vec{v}}{r(1-\frac{\vec{r}.\vec{v}}{cr})}\right]_{ret} \qquad (3)$$

ou seja, podemos escrever

$$\vec{A}(\vec{x},t)=q\phi(\vec{x},t)\left[\frac{\vec{v}}{c}\right]_{ret} \qquad (4)$$

em que $\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'$, sendo $\vec{x}'$ a posição da carga q, e $[\ ]_{ret}$ indicando que as grandezas no interior do colchete devem ser calculadas na posição e tempo retardados. $\phi(\vec{x},t)$ na Eq. 4 é o potencial por unidade de carga,

$$\Phi(\vec{x},t)=q\phi(\vec{x},t) \qquad (5)$$

A Eq. 4 mostra claramente haver uma relação direta entre Φ = qϕ e $\vec{A}$, o potencial vetor sendo uma espécie de vento de potencial escalar, com sua velocidade medida em termos da velocidade da luz. Isto exploraremos no que segue. Note-se que $\phi(\vec{x},t)$ na Eq. 4 inclui no retardo o termo de paralaxe, isto é, não é puramente do tipo coulombiano.Como já foi dito, propusemos em [5] atribuir os potenciais L-W, Eqs. 2 e 3, diretamente à posição retardada da carga, corrigida por efeito do tipo Doppler, e paralaxe cinética, devido ao movimento da carga em relação ao ponto do espaço em questão, mas o que fazemos a seguir depende somente da aceitação das Eqs. 2-4 .

É bastante trabalhoso mostrar diretamente que os potenciais nas Eqs. 2 e 3 satisfazem a Eq. 1, devido em especial à dependência de $\vec{x}'$ em $\vec{x}$ e t. Embora as expressões desenvolvidas em [8] ajudem nessa tarefa, preferimos evitá-la e para isto preparamos o terreno na próxima e na seção 5 voltaremos a esse ponto

4. Os potenciais instantâneos e a condição de Lorentz

Tomemos agora os potenciais instantâneos, $\Phi_i(\vec{x},t)$ que definimos das Eqs. 2 e 3 desprovendo-as do retardo (mas mantendo o termo de paralaxe),

$$\Phi_i(\vec{x},t)=q\phi_i(\vec{x},t)=q\frac{1}{r(1-\frac{\vec{r}.\vec{v}}{cr})} \qquad (6)$$

$$\vec{A}_i(\vec{x},t)=\frac{q}{c}\frac{\vec{v}}{r(1-\frac{\vec{r}.\vec{v}}{cr})} \qquad (7)$$

Mostraremos que a condição de Lorentz, Eq. 1, se torna uma identidade para este caso. Para os potenciais instantâneos, $\Phi_i(\vec{x},t)$ e $\vec{A}_i(\vec{x},t)$, sendo Φ_i, e naturalmente ϕ_i, funções de $(\vec{x}-\vec{x}'(t))$, podemos escrever a Eq. 4 como

$$\vec{A}_i(\vec{x},t)=\frac{q\phi_i(\vec{x},t)\vec{v}(t)}{c} \qquad (8)$$

ou definindo $\vec{A}'_i(\vec{x},t)$

$$\vec{A}'_i(\vec{x},t)=c\vec{A}_i(\vec{x},t)=q\phi_i(\vec{x},t)\vec{v}(t) \qquad (9)$$

Em primeiro lugar achemos a divergência de $\vec{A}'_i(\vec{x},t)=q\phi_i(\vec{x},t)\vec{v}(t)$. Ela é

$$\nabla.(\phi_i(\vec{x},t)\vec{v}(t))=\nabla\phi_i(\vec{x},t).\vec{v}(t) \qquad (10)$$

Por outro lado a derivada parcial em relação ao tempo de $\phi_i(\vec{x},t)$ é

$$\frac{\partial\phi_i(\vec{x},t)}{\partial t}=\frac{\partial\phi_i(\vec{x}-\vec{x}'(t))}{\partial t}=-\nabla\phi_i(\vec{x},t).\vec{v}(t) \qquad (11)$$

tornando a condição de Lorentz uma identidade para os potenciais instantâneos, válida para todos os pontos $\vec{x}$ e todos os tempos t. Note-se que nos potenciais instantâneos, o retardo foi desprezado mas o efeito de paralaxe foi mantido. Pode-se obter uma aproximação em que ambos os efeitos são considerados e válida até a ordem de v^2/c^2 e de ar/c^2, sendo $\vec{a}$ a aceleração da carga e r a distância à carga, [8-10] (ver seção 8).

5. A validade da condição de Lorentz para os potenciais L-W no tempo atual

Retomemos o caso da validade da Eq. 1 para o tempo atual dos potenciais L-W, Eqs. 2 e 3. Na Fig. 1, $\vec{x}'(t_{ret})$ é a posição retardada em relação ao ponto *P*, de posição $\vec{x}$. Os potenciais instantâneos que seriam criados pela carga q quando situada em $\vec{x}'(t_{ret})$ satisfariam as Eqs. 10 e 11 para todos os pontos do espaço no tempo t_{ret} , inclusive no ponto *P*. Isto nos permite concluir que os potenciais L-W também satisfazem a Eq. 1 no tempo t, embora cada posição $\vec{x}$ requera uma posição retardada $\vec{x}'(t_{ret})$ diferente. Na maioria dos casos práticos o retardo também pode ser desprezado, e a Eq. 5 se simplifica para

$$\vec{A}_i(\vec{x},t) = \frac{q\phi_c(\vec{x},t)}{c}\vec{v}(t) \tag{12}$$

em que ϕ_c é do tipo coulombiano.

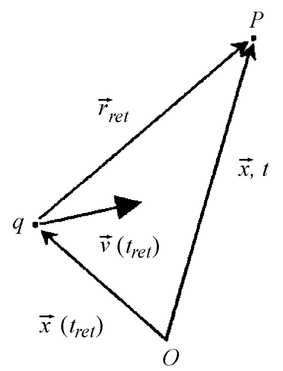

Figura 1 - $\vec{x}'(t_{ret})$ é a posição retardada da carga q, com velocidade $\vec{v}(t_{ret})$, em relação ao ponto *P* em $\vec{x}$, no tempo t

6. Sistema de cargas e correntes

Se várias cargas q$_j$ com diferentes velocidades $\vec{v}_j$ agem no ponto $\vec{x}$,com potenciais unitários ϕ_j, o potencial vetor total será a soma dos potenciais vetores de cada carga,

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\sum_j q_j\phi_j\,[\vec{v}_j]_{ret} \tag{13}$$

omitindo-se por brevidade a dependência em $\vec{x}$ e t. No caso de distribuições estacionárias de corrente, em que uma carga é a todo instante substituida por outra de igual velocidade em cada ponto, pode-se prescindir de acompanhar seu movimento em relação ao ponto considerado, e os potenciais ϕ_j serão os potenciais unitários de pontos da distribuição em relação àquele ponto. Usualmente o retardo e a paralaxe podem ser ignorados, Eq. 12, e a Eq. 13 vai na expressão usual do potencial vetor

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int \rho(x')\vec{v}(\vec{x'})\phi(\vec{x}-\vec{x}')dV' = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{x}')dV'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \tag{14}$$

em que ρ e $\vec{j}$ são a densidade carga móvel e de corrente. Note-se que a relação entre o potencial escalar e vetorial de cada carga móvel continua valendo, como indica a passagem intermediária, mas esta identificação detalhada perde visibilidde na expressão usual à direita na Eq. 14. Note-se também que no caso de distribuição de correntes neutras, o potencial escalar se cancela pela presença de cargas positivas imóveis neutralizando as negativas móveis, deixando como única ação a do vento de potencial.

Como é sabido, a Eq. 14 gera a Lei de Biot-Savart e a velada semelhança entre ela e a Lei de Coulomb é compreendida.

7. O campo de indução magnética

Voltemos à carga em movimento e calculemos primeiramente a induçã o magnética instantânea, $\vec{B}_i(\vec{x},t)$. Ela, pela Eq. 8, será

$$\vec{B}_i(\vec{x},t) = \nabla\wedge\vec{A}_i(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\nabla\wedge(\Phi_i(\vec{x},t)\vec{v}) = \frac{1}{c}(\nabla\Phi_i(\vec{x},t))\wedge\vec{v}(t)) \tag{15}$$

em que $\wedge$ simboliza o produto vetorial. Se agora o retardo é considerado, teremos, por argumento semelhante ao usado na seção V, justificando a validade da condição de Lorentz para os potenciais L-W, o seguinte. Pode-se ver, Fig. 1, que com a carga em $\vec{x}'(t_{ret})$, a Eq. 15 valeria para todos os pontos do espaço em torno de $\vec{x}'(t_{ret})$ no tempo retardado t_{ret}, inclusive no ponto *P*.

Concluimos então que podemos escrever para o valor atual da indução, $B(\vec{x},t)$, de uma carga em movimento, em geral,

$$B(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\left[(\nabla\Phi(\vec{x},t)) \wedge \vec{v}(t)\right]_{ret} \qquad (16)$$

Na aproximação usual em que o retardo e a paralaxe são desprezados valerá

$$B(\vec{x},t) = \frac{1}{c}(\nabla\Phi(\vec{x},t)) \wedge \vec{v}(t) \qquad (17)$$

com generalização imediata para o caso de circuitos, na lei de Biot-Savart.

8. A indução eletromagnética

Para se ter acesso ao estudo da indução eletromagnética é necessário usar a aproximação mencionada no fim da seção IV, na qual resulta o potencial vetor ser ainda dado pela Eq. 12 [8-10]. Concluimos então que a indução eletromagnética, $\sim -\partial\vec{A}/\partial t$, criada por um circuito no qual a corrente é variável, é causada pela aceleração de suas cargas móveis [11].

9. Considerações finais

Muitos consideram o Eletromagnetismo Clássico como obra terminada. Isto seria literalmente verdadeiro se nada restasse para ser entendido. Mas esse não é caso, na nossa opinião. Há em primeiro lugar o problema da precedência entre os campos de força, elétrico e magnético, e seus potenciais [10]. Acontece que estes últimos obedecem a leis causais de propagação o que os torna mais confiáveis fisicamente. Mas por que o calibre de Coulomb [11] funciona às vezes tão bem? Há também a questão de o sistema gaussiano de unidades parecer ser o sistema mais apropriado para expressar as relações eletromagnéticas, evitando o uso das permitividades elétrica e magnética do vácuo, que não se sabe exatamente o que significam (apesar da popularidade do sistema MKS). Mas o papel que c, velocidade da luz, joga no sistema gaussiano também não é claro. Às vezes se diz que a Teoria da Relatividade explica a sua presença, mas note-se que o fator c aparece em cada sistema de coordenadas. Na formulação do Eletromagnetismo pela Álgebra Geométrica [12,13], formulação esta extremamente compacta, aparece o operador $(\vec{\nabla} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t})$, indicando uma correlação fundamental entre o espaço e o tempo no interior de um único sistema de coordenadas.

No século XIX chegou-se a pensar que para se compreender realmente a Natureza, as teorias físicas destinadas a explicá-la deviam ser susceptíveis de uma interpretação mecânica, garantidora de sua inteligibilidade. Com o advento da Teoria da Relatividade, quando as tensões do éter desapareceram, houve um movimento em sentido oposto, procurando-se evitar qualquer traço de explicação mecanicista. Quanto à relação entre os potenciais vetorial e escalar explicitada aquí, -aquele uma espécie de 'vento' deste-, esperamos que, embora 'the limits to allowable heterodoxy in science are soon reached' (talvez mais em Física), [14], não se considere que a estreita zona tenha sido ultrapassada aqui. Afinal, com ela, conseguiu-se diminuir o número de grandezas eletromagnéticas independentes e revelar semelhanças entre grandezas magnéticas e elétricas.

O autor agradece à colega, Profa. Mariangela T. de Figueiredo, o suporte na preparação deste e ao árbitro convidado pela RBEF pela crítica de que a versão original não realçava o avanço didático que o texto permite fazer.

Referências

[1] R.P. Feynman, R.B. Leighton e M. Sands, *The Feynman Lectures* (Addison-Wesley, 1966), v. II, cap. 1.

[2] E.V. Bohn, *Introduction to Electromagnetic Fields and Waves* (Addison-Wesley, 1968), cap. 11.

[3] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, 1962), cap. 14.

[4] J. Marion, *Classical Electromagnetic Radiation* (Academic Press, 1967), cap. 8.

[5] G.F. Leal Ferreira, Rev. Bras. Ens. Fis. **26**, 287 (2004).

[6] É interessante mencionar que o texto dos famosos autores, L. Landau e E. Lifchitz, *Théorie du Champ* (Éditions MIR, 1966), não deduz a condição de Lorentz, antes a infere por generalizaçã o não convincente, cap. VIII, Eq. 62.3.

[7] Sir Edmund Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity* (Humanities Press, 1973), cap. VIII.

[8] A. O'Rahilly, *Electromagnetic Theory, A Critical Examination of Fundamentals* (Dover, 1965), cap. VI.

[9] Referência [6], seção 64.

[10] G.F. Leal Ferreira, Rev. Bras. Ens. Fis. **26**, 27 (2004).

[11] G.F. Leal Ferreira, Rev. Bras. Ens. Fis. **23**, 395 (2001). Neste trabalho usou-se o calibre de Coulomb.

[12] Jayme Vaz Jr., Rev. Bras. Ens. Fis. **19**, 234 (1997), seção IV.

[13] B. Jancewicz, *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics* (World Scientific, 1989).

[14] Em [8], p. 500, faz-se referência à frase de Sir A. Schuster da qual retiramos o trecho citado.