Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 3, p. 379 - 380, (2005)
www.sbfisica.org.br

Sobre parâmetros dependentes do tempo em lagrangianas e seus invariantes adiabáticos

(On time dependent parameters in Lagrangians and their adiabatic invariants)

G.F. Leal Ferreira[1]

Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil

Recebido em 15/3/2005; Aceito em 13/4/2005

O emprego de lagrangianas com parâmetros dependentes do tempo é discutido. Enquanto que a justificativa de uso de 'constantes de força' dependentes do tempo é simples, a de massas dependentes do tempo se deve a um usualmente não notado fato de que as massas, nas equações de Lagrange para a energia cinética e força generalizada, não são necessariamente constantes. Os correspondentes invariantes adiabáticos são obtidos de forma muito simples, seguindo método sugerido em livro aparecido recentemente, para vários tipos de constante de força.

Palavras-chave: lagrangianas, parâmetros dependentes do tempo, invariantes adiabáticos.

The practice of employing time dependent mechanical parameters in Lagragian dynamics is dicussed. While time dependent 'force constants' are easy to justify, the fact that variable masses may be used derives from the generally unnoticed fact that in the Lagrange equation for the kinetic energy and generalized force the masses are not required to be constants. The corresponding adiabatic invariants are obtained according to method suggested in recently published book, for various kinds of force constants.

Keywords: Lagrangians, time dependent parameters, adiabatic invariants.

1. Introdução

Lagrangianas com parâmetros dependentes do tempo são facilmente concebidas: por exemplo, no oscilador harmônico podemos imaginar que a massa e, ou, a constante de força dependem do tempo. Mas a passagem das equações de Lagrange, escrita em termos da energia cinética e das forças generalizadas, para a lagrangiana exige que certas condições sejam preenchidas. No caso da constante de força dependente do tempo não há problema desde que se pode definir uma função potencial dependente do tempo [1,2]. É, porém, interessante notar que na 1ª edição de [1], em 1950, texto desde então padrão, tal possibilidade não é mencionada na sua p. 18. Mas o que dizer da massa dependente do tempo? Este assunto é discutido na próxima seção e o artigo termina com uma rápida incursão aos invariantes adiabáticos resultantes de variação de parâmetros, adotando procedimento proposto em [2], cap. 9, e aplicado a potenciais dependentes de potências do deslocamento.

2. O caso da massa variável

A equação de Lagrange na energia cinética T dependente de $\dot{q}$ e q é

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \tag{1}$$

sendo Q a força generalizada. Embora usualmente não mencionado, a massa em T pode ser dependente do tempo. Isto decorre da equação de partida para a demonstração, o Princípio de D 'Alembert que, em geral, é

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{ap} - \mathbf{p}_i).\delta\mathbf{r}_i = 0, \tag{2}$$

com $\mathbf{F}_i^{ap}$ a força aplicada à partícula i, sendo $\mathbf{p}_i$ o seu momento e $\delta\mathbf{r}_i$ seu deslocamento virtual, que é válida mesmo que as massas sejam dependentes do tempo. Uma repassada na demonstração levando à Eq. (1) confirma isto, por exemplo, em Goldstein [1] a Eq. (1.54)

[1]E-mail: guilherm@if.sc.usp.br.

e em Lemos [2] a Eq. (1.4.11).

$$\sum_i \{ \frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\frac{1}{2}m_i v_i^2)] - \frac{\partial}{\partial q_k}(\frac{1}{2}m_i v_i^2)\} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}) - \frac{\partial T}{\partial q_k}. \quad (3)$$

Note que a expressão não exige que m seja constante no tempo. Para exemplificar, tomemos o caso de um vagão movendo-se na horizontal sob chuva vertical à razão dm/dt, sob a ação de uma força F. As Eqs. (1) e (3) levam à solução

$$v = \frac{\int_0^t F(t)dt}{m(t)}. \quad (4)$$

Deve-se notar que se a chuva caisse inclinada sobre o vagão (vista do sistema Terra), a Eq. (3) não seria válida porque haveria aporte de momento ao sistema.

3. Invariante adiabático gerado na variação lenta de parâmetro

Em Lemos [2], cap. 9, encontramos a versão mais direta para obtenção do invariante adiabático do oscilador harmônico. A energia total E do oscilador é

$$E = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2, \quad (5)$$

em que a frequência angular ω é função do tempo. A derivada em relação ao tempo de E é

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{q}\ddot{q} + m\omega^2 q\dot{q} + m\omega q^2\frac{d\omega}{dt}, \quad (6)$$

para cuja média temporal, $\langle E\rangle$, no caso de variação lenta de ω, só o último termo do lado direito da Eq. (6) contribui. Adicionalmente, temos $\langle mq^2\rangle = \langle E\rangle/\omega^2$, resultando

$$\frac{d\langle E\rangle}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{\langle E\rangle}{\omega} = \text{constante}. \quad (7)$$

Se quisermos empregar essa demonstração muito simples para o caso em que a massa e, ou, a constante de força dependem do tempo, devemos proceder com mais cuidado. É que devemos nos lembrar que a variação no tempo da energia deve ser calculada da variação da hamiltoniana H escrita em função dos momentos, $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$, ou, alternativamente, do negativo de derivada temporal da lagrangiana, ou seja, no nosso caso,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t}. \quad (8)$$

Usando a lagrangeana

$$L = \frac{m(t)\dot{q}^2}{2} - \frac{k(t)q^2}{2}, \quad (9)$$

temos para a média temporal

$$\frac{d\langle E\rangle}{dt} = -\frac{\langle \dot{q}^2\rangle dm}{2dt} + \frac{\langle q^2\rangle dk}{2dt}. \quad (10)$$

Mas $\langle m\dot{q}^2/2\rangle = \langle kq^2/2\rangle = \langle E\rangle/2$ e a Eq. (10) se escreve

$$\frac{d\langle E\rangle}{dt} = \frac{\langle E\rangle}{2}(-\frac{dm}{mdt} + \frac{dk}{kdt}) = \langle E\rangle\frac{d}{dt}\ln\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (11)$$

retornando à Eq. (7), após integração. A demonstração pode ser estendida ao caso em que o potencial U é do tipo $c(t)q^{n+1}$ por meio do teorema do virial em que se mostra que para movimentos periódicos [1]

$$\langle T\rangle = \frac{n+1}{2}\langle U\rangle. \quad (12)$$

Assim temos, da Eq. (12) e da equação

$$\langle E\rangle = \langle T\rangle + \langle U\rangle, \quad (13)$$

os dois valores

$$\langle T\rangle = \frac{(n+1)\langle E\rangle}{n+3} \quad \text{e} \quad \langle U\rangle = \frac{2\langle E\rangle}{n+3}. \quad (14)$$

Temos então

$$\begin{aligned}\langle T\rangle &= \frac{m(t)}{2}\langle \dot{q}^2\rangle = \frac{n+1}{n+3}\langle E\rangle \quad \text{e} \\ \langle U\rangle &= c(t)\langle q^{n+1}\rangle = \frac{2\langle E\rangle}{n+3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Para a média temporal da energia temos

$$\frac{d\langle E\rangle}{dt} = -\frac{d\langle L\rangle}{dt} = -\frac{dm(t)}{2dt}\langle \dot{q}^2\rangle + \frac{dc(t)}{dt}\langle q^{n+1}\rangle, \quad (16)$$

na qual usamos as Eqs. (15) para obter

$$\langle E(t)\rangle[\frac{m^{n+1}(t)}{c^2(t)}]^{\frac{1}{n+3}} = \text{ constante}, \quad (17)$$

que para $n = 1$ reproduz o caso do oscilador harmônico.

Agradecimento

O autor agradece as sugestões propostas pelo árbitro, incorporadas ao texto.

Referências

[1] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1980), 2ªedição, cap. 1

[2] N.A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004), cap. 1.