Solução do problema da difração na abertura circular

(Solution of the circular aperture diffraction problem)

Mauro Lucio Lobão Iannini¹

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Divinópolis, MG, Brasil

Recebido em 19/10/2010; Aceito em 30/4/2012; Publicado em 21/11/2012

O propósito do presente artigo consiste em apresentar uma formulação alternativa para o problema de encontrar a intensidade das franjas de difração numa fenda simples e estendê-la para a difração na abertura circular. Em seguida, estudamos algumas propriedades das funções de Bessel com o objetivo de compreender a solução da equação para o caso circular.

Palavras-chave: óptica física, difração, abertura circular.

The purpose of this article is to present an alternative formulation for find the intensity equation in the single-slit diffraction problem and extend this formulation for circular aperture diffraction. Following, we study some Bessel functions propriety with the intention of understand the circular case solution.

Keywords: physical optics, diffraction, circular aperture.

1. Introdução

Na difração de Fraunhofer, a fonte que gera o feixe de luz, bem como o anteparo onde a onda difratada atinge estão bem distantes da fenda. Nesses casos a onda difratada pode ser trabalhada como uma onda harmônica plana e os feixes de luz difratados podem ser considerados praticamente paralelos, o que simplifica bastante as equações envolvidas no processo da difração. Já na difração de Fresnel,² devido à proximidade tanto da fonte quanto do anteparo à fenda, a curvatura da onda propagada não pode ser negligenciada o que tornam mais complexas as equações quando comparadas às da difração de Fraunhofer.

Os livros-textos de física geral utilizados na graduação [1–3], trabalham principalmente a difração de Fraunhofer da fenda simples e circular. No estudo da fenda simples as literaturas citadas apresentam deduções semelhantes para a equação da intensidade das franjas de difração.

A abordagem apresentada por esses autores utiliza o método dos fasores para somar as ondas harmônicas provenientes de cada faixa da fenda. Apesar de simples, a abordagem não permite ao estudante equacionar o fenômeno em fendas com configurações geométricas distintas, como a abertura retangular e circular. A maioria das publicações não trabalha, de modo quantitativo, a

abertura circular [1–3] e algumas delas [1] chegam a comentar sua complexa solução. Dos livros-textos consultados apenas o livro de Nussenzveig³ [4], trabalha o problema da difração na fenda circular. O propósito do presente artigo consiste em apresentar, na seção 2, a solução do problema da interferência de múltiplas fendas e utilizá-la na solução da difração na fenda simples. Em seguida, seções 3 e 4, através da integração das funções das ondas harmônicas na distribuição contínua de fontes, obteremos a solução da difração na fenda simples e circular. Além disso, procura-se detalhar a solução matemática da fenda circular e demonstrar, na seção 5, as propriedades utilizadas.

As principais dificuldades apresentadas por um aluno na graduação, ou mesmo na pós-graduação, em solucionar o problema da fenda circular seriam, conforme já comentado, a carência de procedimentos metodológicos adequados e a falta de um estudo, em uma forma não convencional, das funções de Bessel. O problema é que, de modo geral, só as conhecemos nos livros-textos de equações diferenciais [6, 7], onde são apresentadas como tópicos especiais da solução em série das equações diferenciais. A solução da equação diferencial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (1)$$

nos conduz as funções de Bessel de ordem ν , ($J_\nu(x)$),

¹E-mail: lobao@div.cefetmg.br.

²Também conhecida como difração de campo próximo.

³Este livro-texto aborda o assunto de um modo diferente do que será apresentado neste artigo.

mas na literatura tradicional não existe nenhuma referência às representações por integrais das funções de Bessel, tão essenciais e comuns em muitos problemas físicos.

Na próxima seção desenvolve-se um método simples para solucionar o problema da interferência de N fendas e, com base nesse resultado, resolver o problema da difração da fenda simples.

2. Fenda simples (método dos fasores)

Na difração de Fraunhofer a luz pode ser tratada como uma onda harmônica plana cujo campo elétrico varia com a posição e o tempo conforme a função

$$E(x, t) = E \sin(kx \pm \omega t + \phi). \quad (2)$$

A essência do método dos fasores consiste em substituir a Eq. (2), em um ponto específico x_i , por um vetor com módulo E e cujo ângulo em relação ao eixo das abscissas, no tempo $t = 0$, seja $kx_i + \phi$. Dessa forma a projeção vertical desse vetor, neste instante, corresponde ao valor $E \sin(kx_i + \phi)$ e a variação temporal da onda harmônica, representada pela função (2), fica caracterizada pela rotação do vetor com a mesma frequência angular, no sentido horário ($-\omega$) e no anti-horário ($+\omega$).

Para adicionar uma segunda onda harmônica, defasada em relação a primeira, basta adicionar um segundo fasor com o mesmo deslocamento angular da segunda onda. Como os dois fasores giram na mesma frequência angular, a soma vetorial, no referencial dos fasores, permanece constante. Esse procedimento permite a adição dos demais fasores por iteração, bastando acrescentar à resultante anterior o novo fasor a ser anexado. Esse processo é ilustrado na Fig. 1, onde o módulo dos fasores, $E_1, E_2 \dots E_n$, representa a amplitude do campo elétrico das ondas em cada fenda, E_t a amplitude da onda resultante da soma vetorial e ψ a diferença angular entre duas ondas harmônicas consecutivas. No problema da interferência com múltiplas fendas as fontes estão igualmente espaçadas, ψ constante, e a amplitude do campo elétrico do feixe de luz em cada fenda é igual ($E_1 = E_2 \dots = E_n = E$).

Na Fig. 1 nota-se que a superposição dos fasores, em defasagem angular constante, produz uma seção de um polígono constituída por N triângulos isósceles. Cada um desses triângulos possui comprimento A , para os lados iguais, e E , para a base. O ângulo oposto à base é ψ e $\sin(\psi/2) = E/2A$, dessa forma o lado A do triângulo é

$$A = \frac{E}{2 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}.$$

Figura 1 - Configuração dos fasores.

Para encontrar E_t usamos o segundo triângulo isósceles da figura constituído pelos lados iguais de comprimento A , a base de comprimento E_t e o ângulo oposto à base $N\psi$. Desse modo temos

$$\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right) = \frac{E_t}{2} = \frac{2E_t \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}{2E},$$

o que nos leva a

$$E_t = \frac{E \sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}. \quad (3)$$

Como a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude da onda temos

$$I(\psi) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right]^2,$$

onde I_0 representa a intensidade máxima de uma única fonte. Os livros-textos analisados neste artigo utilizam os diagramas de fasores para se estudar a interferência de duas fendas e a difração na fenda simples. Nesses casos o propósito é obter as respectivas equações da intensidade. Já no caso da interferência de múltiplas fendas, o método dos fasores é empregado para se estudar as mudanças nas figuras de interferência à medida que se aumenta o número de fendas.⁴ A dedução da equação da intensidade na interferência de múltiplas fendas não é apresentada nesses livros, apenas o livro de Nussenzveig [4] trabalha com sua solução substituindo as funções trigonométricas das ondas harmônicas pelas funções exponenciais complexas.

⁴As principais mudanças são: o aumento no número de mínimos entre dois máximos principais consecutivos e a existência de máximos secundários entre dois mínimos consecutivos.

Além da simplicidade do método empregado existe a possibilidade de encontrar a solução do problema da difração, bastando dividir a largura da fenda em um número de fendas cada vez maior de fontes puntiformes idênticas de amplitude de campo E . Deve-se lembrar que na equação da interferência o ângulo ψ representa a diferença angular entre duas fontes consecutivas e ϕ , na equação da difração, a diferença entre os extremos na fenda (Fig. 1). Na expressão (3) basta substituir $N\psi$ por $\phi + \psi$ e aplicar o limite com $N \rightarrow \infty$,

$$E_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E \sin\left(\frac{\phi + \psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi + \psi}{2N}\right)},$$

fazendo a expansão em série da função seno no denominador e lembrando que $\psi \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$, temos

$$E_t = \frac{NE \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\frac{\phi}{2}\right)}.$$

Lembrando que o produto NE representa o campo elétrico total que atravessa a fenda e I_0 a respectiva intensidade temos

$$I(\phi) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\frac{\phi}{2}\right)} \right]^2.$$

A dedução apresentada, mesmo tendo simplificado o problema, está restrita apenas à fenda simples e não permite sua extensão às regiões superficiais. Na próxima seção, o mesmo problema é resolvido, mas dessa vez, fazendo uso de recursos trigonométricos.

3. Distribuição discreta e contínua de fontes

Na seção anterior utilizamos o método dos fasores para somar as funções trigonométricas associadas às ondas, nesta seção, a soma das ondas defasadas será realizada através de propriedades trigonométricas.⁵

Considere a Fig. 2, onde temos n fontes iguais e cuja distância da i -ésima fonte em relação ao ponto P, localizado no anteparo, é $d + b_i$. A amplitude da onda no ponto P devido a essa fonte é

$$E(d + b_i) = E_0 \sin(k(d + b_i) - \omega t),$$

onde $b_0 = 0$.

⁵O que a princípio pode parecer complexo, uma vez que a maioria dos livros avançados utilizam as exponenciais complexas no lugar das funções trigonométricas, mais tarde se revelará como um procedimento prático e simples

Figura 2 - Disposição das fontes e suas respectivas ondas.

Ao somar a contribuição das demais fontes, temos

$$E = E_0 \left[\sum_{i=0}^n \sin(k(d + b_i) - \omega t) \right], \quad (4)$$

lembrando que

$$\begin{aligned} \sin(kd - \omega t + kb_i) &= \\ \cos(kb_i) \sin(kd - \omega t) &+ \\ \sin(kb_i) \cos(kd - \omega t), \end{aligned}$$

a expressão (4) fica

$$\begin{aligned} E &= E_0 \left[\sum_{i=0}^n \cos(kb_i) \right] \sin(kd - \omega t) + \\ &E_0 \left[\sum_{i=0}^n \sin(kb_i) \right] \cos(kd - \omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

O resultado encontrado refere-se a uma distribuição discreta de fontes. Se quisermos estender essa ideia para uma distribuição contínua devemos dividir o feixe de luz em diversas fontes com espessura e amplitude E_n definidas por

$$\Delta y = \frac{a}{n} \quad \text{e} \quad E_n = \frac{E}{n} = \frac{E}{a} \Delta y,$$

onde a representa a largura da fenda, n o número de faixas, y_i a posição média da i -ésima faixa e E a amplitude total que atravessa a fenda, conforme Fig. 3.

Figura 3 - Configuração das fontes na distribuição contínua.

O deslocamento b_i da onda associada a essa faixa é $b_i = y_i \sin \theta$, com isso $E(n, \theta)$ fica

$$E(n, \theta) = \frac{E}{a} \left[\sum_{i=0}^n \cos[ky_i \sin \theta] \Delta y \right] \sin(kd - \omega t) + \frac{E}{a} \left[\sum_{i=0}^n \sin[ky_i \sin \theta] \Delta y \right] \cos(kd - \omega t),$$

ao aplicar o $\lim_{n \rightarrow \infty}$ temos

$$E(\theta) = \frac{E}{a} \left[\int_0^a \cos[ky \sin \theta] dy \right] \sin(kd - \omega t) + \frac{E}{a} \left[\int_0^a \sin[ky \sin \theta] dy \right] \cos(kd - \omega t) \quad (6)$$

Para que possamos simplificar a Eq. (6) e aplicá-la no problema da fenda simples devemos modificar a origem do nosso sistema conforme Fig. 4.

Figura 4 - Sistema de coordenadas para a fenda simples.

O feixe central localiza-se a uma distância d em relação ao ponto P , neste caso E_θ é definido por

$$E(\theta) = \frac{E}{a} \left[\int_{-a}^a \cos[ky \sin \theta] dy \right] \sin(kd - \omega t) + \frac{E}{a} \left[\int_{-a}^a \sin[ky \sin \theta] dy \right] \cos(kd - \omega t),$$

como $\int_{-a}^a \sin[ky \sin \theta] dy = 0$, a amplitude da onda fica

$$E(\theta) = \frac{E}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \cos[ky \sin \theta] dy, \quad (7)$$

cuja solução nos leva a

$$E(\theta) = \frac{E \sin\left(\frac{ka \sin \theta}{2}\right)}{\left(\frac{ka \sin \theta}{2}\right)}.$$

A simetria apresentada pela Rq. (7) não ocorre apenas na fenda simples, mas em outras configurações como a fenda retangular e circular. A razão dessa simetria será melhor compreendida ao estender o modelo para regiões superficiais.

4. Fendas superficiais

4.1. Extensão do modelo para fendas superficiais

A Fig. 5 representa duas regiões, tratadas como fontes de luz, localizadas na superfície S e separadas espacialmente pelo vetor $\mathbf{r}$, seja $\mathbf{U}$ o vetor que parte da fonte em direção ao ponto no anteparo e $\mathbf{u}$ seu versor. Considere ainda que o feixe de luz seja representado por uma onda harmônica com número de ondas k . Neste caso a defasagem angular provocada pela posição relativa entre as fontes fica generalizada pelo produto escalar $k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})$.

Figura 5 - Diferença de fase provocada pela separação espacial entre duas regiões.

Supondo uma distribuição uniforme, a amplitude de cada fonte fica estabelecida por

$$E = \frac{E_t}{a} da,$$

sendo E_t a amplitude total do feixe de luz que atravessa a região, a a área da superfície e da o elemento infinitesimal de área.

Ao inserir, na Eq. (6), as devidas modificações obtêm-se a expressão

$$E_{(\vec{U})} = \frac{E}{a} \left[\int \int_S \cos[k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})] da \right] \sin(kd - \omega t) + \frac{E}{a} \left[\int \int_S \sin[k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})] da \right] \cos(kd - \omega t). \quad (8)$$

Ao analisar a Eq. (8), observa-se que superfícies dotadas de simetria em relação aos eixos ordenados, ou seja, para todo vetor $\mathbf{r} \in S$ existe seu simétrico $-\mathbf{r} \in S$, simplificam a Eq. (8) fazendo com que a amplitude de $E_{(\mathbf{U})}$ seja

$$\frac{E}{a} \left[\int \int_S \cos[k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})] da \right]. \quad (9)$$

4.2. Fenda circular

A Fig. 6 nos apresenta a configuração e as variáveis envolvidas no problema, a origem do nosso sistema de coordenadas é o centro do círculo localizado no plano $r\phi$ e θ o ângulo formado entre o eixo z e o versor $\mathbf{u}$. Os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{u}$ ficam caracterizados pelas coordenadas

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r \cos \phi, r \sin \phi, 0) \quad \text{e} \\ \mathbf{u} &= (0, \sin \theta, \cos \theta). \end{aligned}$$

Figura 6 - Sistema de coordenadas para a fenda circular.

Usando a Eq. (9) e lembrando que a função cosseno é par,

$$E_{(\theta)} = \frac{2E}{\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^a r \cos(kr \sin \phi \sin \theta) dr d\phi. \quad (10)$$

A maior dificuldade em resolver a integral (10), está na variável ϕ . A função Bessel de ordem 0 é definida pela integral⁶

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \phi) d\phi. \quad (11)$$

⁶A representação das funções de Bessel na forma integral são estudadas com mais detalhes na seção funções de Bessel. Na presente seção o objetivo consiste na utilização desses resultados no intuito apenas de solucionar o problema da fenda circular.

⁷Para demonstrar essa propriedade basta expandir em série de Taylor a função $J_0(x)$ e integrar termo a termo.

⁸Para maiores detalhes sobre essa perspectiva histórica, buscar nos capítulos iniciais das Refs. [8], p. 1-11 e [9], p. 1-6.

Ordenando a Eq. (10),

$$E_{(\theta)} = \frac{2E}{\pi a^2} \int_0^a r dr \int_0^\pi \cos(kr \sin \theta \sin \phi) d\phi, \quad (12)$$

e relacionando a expressão $kr \sin \theta$ da Eq. (12) com a variável x da Eq. (11)

$$E_{(\theta)} = \frac{2E}{a^2} \int_0^a r J_0(kr \sin \theta) dr.$$

Usando a propriedade⁷

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$$

e as substituições

$$x = kr \sin \theta \quad \text{e} \quad dx = k \sin \theta dr,$$

temos a expressão

$$E_{(\theta)} = \frac{2E}{a^2 k^2 \sin^2 \theta} x J_1(x) \Big|_0^{k a \sin \theta}.$$

Simplificando a equação e relacionando a amplitude com a intensidade

$$I_{(\theta)} = 4I^2 \left| \frac{J_1(k a \sin \theta)}{(k a \sin \theta)} \right|^2.$$

5. Funções de Bessel

5.1. Pequena nota histórica

Apesar das funções de Bessel serem nomeadas e reconhecidas após F.W. Bessel(1784-1846) sabe-se que foi D.Bernoulli um dos pioneiros a trabalhar com a função de Bessel de ordem zero ao solucionar o problema da oscilação da corda suspensa. Este trabalho foi apresentado na obra *Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catense verticaliter suspensae* publicada em 1738. Posteriormente Euler (1764) trabalhou com as funções de Bessel de ordem N , sendo N um número inteiro, na análise da vibração da membrana esticada e finalmente em 1822 na obra intitulada *La Théorie Analytique de la Chaleur*, Fourier estudou o movimento simétrico do calor em um cilindro circular reto, onde a função de Bessel de ordem zero aparece como solução.⁸

A origem das funções de Bessel por Bessel deve-se ao estudo do movimento elíptico representado na Fig. 7.

Figura 7 - Configuração elíptica para o estudo das funções de Bessel.

O ponto E pertence a elipse com semi-eixo maior AB , foco D e centro C , o ponto F é construído pela interseção do segmento GE com o círculo de raio CA . A anomalia excêntrica é definida pelo arco ACF representado pelo ângulo ϕ e a anomalia média, arco ADF , por μ . Os ângulos são matematicamente definidos pelas expressões

$$\phi = \pi \frac{\text{área do setor } \widehat{ACF}}{\text{área do semicírculo } \widehat{AFB}} e$$

$$\mu = \pi \frac{\text{área do setor elíptico } \widehat{ADE}}{\text{área da semi-elipse } \widehat{ADB}}.$$

Pela projeção ortogonal temos a seguinte igualdade entre as áreas dos setores

$$\frac{\widehat{ADE}}{\widehat{AEB}} = \frac{\widehat{ADF}}{\widehat{AFB}}$$

$$\frac{\mu}{\pi} = \frac{\widehat{ACF} - \widehat{CDF}}{\widehat{AFB}}$$

$$\frac{\mu}{\pi} = \frac{\frac{1}{2}r^2\phi - \frac{1}{2}er^2\sin\phi}{\frac{1}{2}\pi r^2}$$

$$\mu = \phi - e\sin\phi.$$

A função $\phi - \mu$ é bem definida em termos de e (excentricidade da elipse) e ϕ , mas para escrevê-la em termos de μ temos que fazer uma expansão em série de senos, uma vez que $\phi - \mu$ é nula nos pontos A e B .

$$\phi - \mu = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\mu.$$

Derivando em relação a μ têm-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos n\mu = \frac{d\phi}{d\mu} - 1,$$

multiplicando ambos os lados da equação por $\cos r\mu$ e integrando no intervalo de 0 a π

$$\frac{1}{2}\pi r A_r = \int_0^{\pi} \left(\frac{d\phi}{d\mu} - 1 \right) \cos r\mu d\mu$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{d\mu} \cos r\mu d\mu.$$

Trocando a variável independente μ por ϕ e lembrando que $\phi = 0$ quando $\mu = 0$ e $\phi = \pi$ quando $\mu = \pi$ obtêm-se

$$\frac{1}{2}\pi r A_r = \int_0^{\pi} \cos r\mu d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \cos r(\phi - e\sin\phi) d\phi.$$

Finalmente os coeficientes A_r ficam definidos pela integral

$$A_r = \frac{2}{r\pi} \int_0^{\pi} \cos r(\phi - e\sin\phi) d\phi \quad (r \geq 1). \quad (13)$$

Apesar que, modernamente, as funções especiais são definidas em termos de suas respectivas equações diferenciais, a integral da Eq. (13) é uma das primeiras representações das funções de Bessel de ordem r .

5.2. Propriedades da integral de Bessel de ordem 0

O objetivo dessa subseção consiste inicialmente em mostrar que a solução da integral apresentada na Eq. (11) nos conduz a função de Bessel de ordem 0, ($J_0(x)$), em seguida demonstrar que essa função, escrita em sua forma integral, satisfaz a equação diferencial⁹

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0. \quad (14)$$

Para que se possa demonstrar a primeira parte deve-se expandir, em série de Taylor, a função $\cos(x\sin\theta)$ e integrar termo a termo obtendo a expressão

$$\pi - \frac{x^2}{2!} \int_0^{\pi} \sin^2\phi d\theta + \frac{x^4}{4!} \int_0^{\pi} \sin^4\phi d\phi \dots, \quad (15)$$

lembrando que

$$\int_0^{\pi} \sin^n\phi d\phi = \frac{\sin^{n-1}\pi \cos\pi}{n}$$

$$+ \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi} \sin^{n-2}\phi d\phi$$

e $\sin\pi = 0$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{4}$$

$$\vdots$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x dx = \frac{(n-1)(n-3)\dots 1}{n(n-2)\dots 2}\pi.$$

⁹Fazendo $\nu = 0$ na Eq. (1).

Substituindo esses valores na Eq. (15) e dividindo por π têm-se

$$1 - \frac{x^2}{2!} \frac{1}{2} + \frac{x^4}{4!} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} \frac{(2n-1)}{2n} \frac{(2n-3)}{(2n-2)} \dots \frac{1}{2},$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$. Substituindo $n!$ por $n(n-1)(n-2) \dots$, a série obtida

$$1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{4^2 2^2} \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^2 (2n-2)^2 \dots 1^2}$$

representa a função de Bessel $J_0(x)$.

Para demonstrar que a integral (11) satisfaz a equação diferencial (14) basta encontrar, em relação a x , as derivadas parciais

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \phi) d\phi, \\ y' &= \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi \sin \phi \sin(x \sin \phi) d\phi \quad \text{e} \\ y'' &= \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \phi \cos(x \sin \phi) d\phi. \end{aligned}$$

Se integrarmos por partes a função y' propondo as substituições

$$u = \sin(x \sin \phi) \quad \text{e} \quad dv = \sin \phi d\phi,$$

pode-se reescrevê-la como

$$y' = \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi x \cos^2 \phi \cos(x \sin \phi) d\phi.$$

Ao substituir as derivadas na equação diferencial (14)

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi x^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \cos(x \sin \phi) d\phi \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(x \sin \phi) d\phi = 0. \end{aligned}$$

6. Resumo e comentários

Nos textos clássicos de ótica, as ondas harmônicas não são representadas pelas funções trigonométricas, mas sim pelas exponenciais complexas. Uma das razões dessa escolha está na facilidade algébrica em manipulá-las, a soma, por exemplo, de N funções trigonométricas defasadas entre si de modo uniforme torna-se mais simples se utilizarmos as exponenciais complexas, pois a série resultante é uma progressão geométrica cuja soma dos termos é bem conhecida. Algumas obras analisadas¹⁰ utilizam esse recurso, as demais obras, [1, 2], por não fazerem uso das exponenciais, resolvem o problema

para um número restrito de fendas.¹¹ No presente artigo, o uso das exponenciais complexas na interferência de N fendas foi contornado através da construção dos polígonos regulares e o problema da difração na fenda simples resolvido aproximando, através do limite, a seção poligonal de fasores em um setor circular.

ntes de trabalhar com a fenda circular foi necessário desenvolver uma concepção alternativa ao método dos fasores. A ideia baseou-se em construir uma função, Eq. (5), que associa, para cada fonte discreta, sua contribuição ao campo elétrico total da onda resultante. Em seguida, foi incorporada ao modelo a distribuição contínua e aplicada no problema da fenda simples (Eq. (7)).

O último passo foi estender o modelo para regiões superficiais, Eq. (8), e aplicá-lo no problema da fenda circular onde se deparou com a função de Bessel de ordem zero. Devido a sua importância em diversos problemas físicos foi feita uma pequena nota histórica e a apresentação, na concepção original, das funções de Bessel desenvolvidas no estudo das órbitas elípticas. Apesar dos autores modernos trabalharem essas funções como solução da equação diferencial Eq. (1), sua apresentação inicial foi feita na forma integral, uma vez que tais funções são coeficientes de uma série de Fourier e, portanto, obtidas através da ortogonalidade das funções trigonométricas. Na parte final do artigo demonstrase duas propriedades da função J_0 com o propósito de construir uma ponte entre sua representação diferencial e integral.

Referências

- [1] D. Halliday, E. Resnick e J. Walker, *Fundamentos de Física* (Editora LTC, Rio de Janeiro, 2009), v. 4.
- [2] Paul A. Tipler e Gene Mosca, *Física para Cientistas e Engenheiros* (Editora LTC, Rio de Janeiro, 2006), v. 2.
- [3] H.D. Young, R.A. Freedman, W. Sears e M.W. Zemansky, *Física IV - Ótica e Física Moderna* (Editora Addison Wesley, São Paulo, 2008).
- [4] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica* (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1998), v. 4.
- [5] Murray R. Spiegel, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, Coleção Schöum (Editora McGraw-Hill, 1973).
- [6] William E. Boyce e Richard C. Prima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* (Editora LTC, Rio de Janeiro, 2006).
- [7] Dennis G. Zill, *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem* (Cengage Learning, São Paulo, 2009).
- [8] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1966).
- [9] A. Gray and G.B. Mathews, *A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics* (Bibliophile, Charleston, 2010).

¹⁰Esse problema é resolvido na Ref. [4], p. 116 e proposto como exercício na Ref. [3], p. 140, Exerc. 74.

¹¹O problema da interferência de 5 fendas é resolvido em [2] Pag.453, o de 3 fendas proposto como exercício na Ref. [1], p. 142, Exerc. 56.