Transição de fase no sistema de Hénon-Heiles

(Phase transition in the Hénon-Heiles system)

Hércules A. Oliveira¹

Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, PR, Brasil

Recebido em 30/6/2014; Aceito em 2/9/2014; Publicado em 28/10/2014

O sistema de Hénon-Heiles foi proposto inicialmente para descrever o comportamento dinâmico de galáxias, mas tem sido amplamente aplicado em sistemas dinâmicos por exibir riqueza de detalhes no espaço de fases. O formalismo e a dinâmica do sistema de Hénon Heiles são investigados neste trabalho, visando uma abordagem qualitativa. Através das Seções de Poincaré, observa-se o crescimento da região caótica no espaço de fases do sistema, quando a energia total aumenta. Ilhas de regularidade permanecem em torno dos pontos estáveis e aparecem fenômenos importantes para a dinâmica, como os “sticky”.

Palavras-chave: sistemas hamiltonianos, sistema de Hénon-Heiles, órbitas periódicas.

The Hénon-Heiles system was originally proposed to describe the dynamical behavior of galaxies, but this system has been widely applied in dynamical systems as it displays many details in phase space. This work presents the formalism to describe the Hénon-Heiles system and a qualitative approach to the dynamical behavior. The growth of the chaotic region in phase space is observed by Poincaré Surface Sections, as the total energy increases. Islands of regularity remain around stable points and there are relevant sticky phenomena.

Keywords: Hamiltonian systems, Hénon-Heiles system, periodic orbits.

1. Introdução

Em 1964, Michel Hénon e Carl Heiles [1] investigaram a existência de integrais de movimento para um sistema Hamiltoniano particular, que hoje é conhecido como sistema de Hénon-Heiles. Este sistema havia sido proposto para descrever o movimento de galáxias interagindo via força gravitacional. Hénon e Heiles mostraram que a energia total e o momento angular do sistema são constantes de movimento, ou seja, que estas grandezas permanecem inalteradas ao longo da evolução temporal do sistema.

O sistema de Hénon-Heiles tem sido amplamente estudado e revela importantes características dos sistemas Hamiltonianos, como o comportamento misto do espaço de fases, no qual apresenta simultaneamente ilhas de regularidade e regiões caóticas. Esse tipo de sistema pode favorecer o fenômeno de transporte [2,3] e mostrar pistas importantes para o estudo de órbitas periódicas estáveis e instáveis.

Baseados no trabalho de Hénon e Heiles, analisaremos em detalhe a dinâmica desse sistema. Busca-se descrever o sistema analiticamente através do formalismo Hamiltoniano. As características e o comportamento dinâmico do sistema no espaço de fases são estudados através das seções de Poincaré.

Na seção 2. é feita uma breve introdução ao formalismo Hamiltoniano. Na seção 3. encontra-se a descrição analítica do sistema de Hénon-Heiles, bem como as suas equações de movimento. Na seção 4. faz-se a análise das transições de fase do sistema. Na seção 5. as conclusões do trabalho e os agradecimentos.

2. Sistemas hamiltonianos

Os sistemas dinâmicos podem ser divididos em conservativos e dissipativos. Os sistemas conservativos mantêm sua energia constante a medida que o tempo evolui e são chamados de Hamiltonianos. Os sistemas dissipativos não conservam sua energia ao longo do tempo.

Um sistema Hamiltoniano pode ser descrito, em termos das coordenadas generalizadas de posição q e momentos p , por uma função escalar chamada de *Hamiltoniana*, na forma

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (1)$$

onde $L(q, \dot{q}, t) = T - V$ é uma função chamada de *Lagrangiana* [4, 5], dada pela energia cinética das partículas ($T = \frac{1}{2}mv^2$) e pela energia potencial ao qual

¹E-mail: haoj02@gmail.com.

estão submetidas (V) (potencial gravitacional, potencial de uma mola, etc).

Se a hamiltoniana não depender explicitamente do tempo $H(q, p)$ e o potencial for conservativo, a hamiltoniana será igual a energia total do sistema, da forma

$$H = T + V = E. \quad (2)$$

Um sistema simples, que nos serve de exemplo é o composto por um corpo de massa m ligado a uma parede através de uma mola com constante elástica k , sobre uma superfície sem atrito, como ilustrado na Fig. 1.

A hamiltoniana deste sistema é escrita como

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2, \quad (3)$$

onde q representa a coordenada x generalizada e k pode ser escrito em termos da frequência angular $k = m\omega^2$. A energia cinética do corpo está expresso em $T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2$ e a energia potencial da mola é $V = \frac{1}{2}kq^2$.

As equações que regem o movimento dos sistemas hamiltonianos são descritas por [4, 5]

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (4)$$

onde $\dot{q} = dq/dt$ (o ponto significa derivada temporal). Estas equações são as mesmas descritas pela lei de Newton onde, $\dot{q} = v$ e $\dot{p} = F$, correspondem à velocidade do corpo e à força a qual está submetido.

Para o sistema massa-mola as equações de movimento possuem a forma

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq. \quad (5)$$

Da Eq. (5) pode-se notar que as equações de movimento resultam no momento linear do corpo ($p = mv$) e da força restauradora da mola ($F = -kq = -kx$), o que era de se esperar.

Pode-se ainda, determinar analiticamente se um sistema é dissipativo ou conservativo. Adotando um sistema de dimensão n , podemos considerar que as n variáveis formam um volume no espaço de fases. Se esse volume permanece constante ou inalterado com o passar do tempo, o sistema é dito conservativo. Se o volume do espaço de fases contrair-se, o sistema é dissipativo.

Figura 1 - Representação de um sistema massa-mola.

Para verificar isso tomaremos uma superfície fechada arbitrária $S(t)$ de volume $V(t)$ no espaço de fases. Após um tempo infinitesimal dt , $S(t)$ evolui para $S(t + dt)$. O novo volume é dado pelo volume antigo mais a evolução infinitesimal da superfície em todas as n direções [6]

$$V(t + dt) = V(t) + \int [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{f})dt]dS \quad (6)$$

Multiplicando os dois lados da Eq. (6) por $(1/dt)$, considerando que a evolução do volume também é infinitesimal, que a superfície é fechada e que $V(t + dt) - V(t)$ é a variação do volume, temos

$$\frac{dV}{dt} = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f})dS. \quad (7)$$

Utilizando o teorema do divergente

$$\oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f})dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{f})dV, \quad (8)$$

obtemos

$$\frac{dV}{dt} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{f})dV. \quad (9)$$

O sistema é conservativo quando $\frac{dV}{dt} = 0$, ou seja, quando o divergente do campo $\mathbf{f}$ for nulo

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial q_n} = 0. \quad (10)$$

Dessa forma a integral em (9) é nula. Para um sistema dissipativo $\frac{dV}{dt} < 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$. Se $\nabla \cdot \mathbf{f} > 0$ ele é expansivo.

Para exemplificar esse conceito, pode-se escrever um sistema dinâmico na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(q_i, p_i), \quad (11)$$

onde o campo vetorial $\mathbf{f}(q_i, p_i)$ é representado pelas equações de movimento, no caso de sistemas Hamiltonianos. Dessa forma, o campo de vetores para o sistema massa-mola é descrito como

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{\partial f_2}{\partial p} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0. \quad (12)$$

Então

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial q} + \frac{\partial f_2}{\partial p} = 0. \quad (13)$$

3. O sistema de Hénon-Heiles

O sistema generalizado de Hénon-Heiles é descrito pela hamiltoniana

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \lambda(x^2y - \frac{1}{3}y^3), \quad (14)$$

onde k e λ são coeficiente constantes. Quando usamos unidades adimensionais ($m = 1, k = 1, \lambda = 1$), temos

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (15)$$

A hamiltoniana (15) descreve a energia total de uma partícula com energia cinética $T = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2}$ sujeita a um potencial [7]

$$V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3, \quad (16)$$

que pode ser visto na Fig. 2 em forma de curvas de níveis. Nesta figura, o eixo z representa a energia do potencial para a região selecionada em x e y . As trajetórias da partícula estão contidas num plano (xy) e sua energia total é conservada ($H = E$), como pode ser visto nas Figs. 2 e 3. A Fig. 2 nos mostra uma transição de potencial de forma contínua, enquanto a Fig. 3 tem potenciais discretos, com valores específicos. A Fig. 3 mostra claramente o formato do potencial para diferentes valores de energia potencial. Nesta figura, pode ser visto os potenciais para $E = 1/24$, $E = 1/10$, $E = 1/8$ e $E = 1/6$, do potencial mais interno para o mais externo, respectivamente.

Figura 2 - Potencial de Henón-Heiles. Plot da Eq. (16) do potencial (no eixo z) pelas coordenadas x e y .

Figura 3 - Potencial referente a Eq. (16) em duas dimensões com transição discreta, apresentando os valores de energia $E = 1/24$, $E = 1/10$, $E = 1/8$ e $E = 1/6$, do potencial mais interno para o mais externo, respectivamente (considere E o valor da energia potencial, ou seja, $V = E$ apenas para esta figura.).

Nota-se que a partícula se movimenta num plano xy em formato triangular. Esse tipo de sistema, onde partículas são confinadas em determinadas regiões do espaço, também é conhecido por bilhar [8].

As equações de movimento, da Eq. (4), para o sistema de Henón-Heiles, são

$$\dot{x} = p_x, \quad (17)$$

$$\dot{y} = p_y, \quad (18)$$

$$\dot{p}_x = -x - 2xy, \quad (19)$$

e

$$\dot{p}_y = -y - x^2 + y^2. \quad (20)$$

As duas primeiras Eqs. (17) e (18) são as velocidades, em x e em y da partícula, pois p é o momento linear dado por $p = mv$. Como estamos usando unidades adimensionais $p = v$. As Eqs. (19) e (20) são as forças nas quais a partícula está submetida em x e y , pois da segunda lei de Newton, $F = dp/dt$.

Através das equações de movimento (17), (18), (19) e (20) podemos mostrar que o sistema é conservativo, ou seja, mantém sua energia constante no tempo.

Fazendo

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial p_x} + \frac{\partial f_4}{\partial p_y} \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0. \quad (22)$$

Ou até mesmo

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial p_x} + \frac{\partial f_2}{\partial p_y} + \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_4}{\partial y} \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = 1 + 1 - 1 - 2y - 1 + 2y = 0. \quad (24)$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$, diz-se que o volume no espaço de fases do sistema permanece constante conforme o tempo evolui. Isso nos indica que a energia total do sistema é a mesma ao longo do tempo, portanto, o sistema é conservativo.

4. Caos no espaço de fases

Nesta seção mostraremos como o sistema de Hénon-Heiles se comporta no espaço de fases. Estamos interessados em observar a transição de fase neste espaço, de regular a caótico, através da técnica, inicialmente empregada por Henri Poincaré [9], da Seção de Poincaré. Esta técnica mostra o retrato de fases do sistema em duas dimensões com a limitação de algumas coordenadas.

Na Fig. 4 podemos observar a Seção de Poincaré (retrato de fases) para o sistema de Hénon-Heiles. Esta figura foi construída através da evolução temporal do sistema com 100 trajetórias e tempo computacional de 3000. Através do Fortran 77 realizamos a integração numérica do sistema com o método de Runge-Kutta de quarta ordem e gerador numérico de condições iniciais aleatórias.

Figura 4 - Seção de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles, com energia total igual a $1/24 = 0,041666667$, 100 trajetórias e um tempo de evolução de 3000.

A energia total do sistema, na Fig. 4, é de $E = 1/24$. A seção de Poincaré é escrita em termos das variáveis dinâmicas p_y (momento linear no eixo y) e y (coordenada), quando temos $x = 0$ e $p_x > 0$. O sistema pode ser visto como sendo constituído por uma partícula confinada num potencial quase triangular (ver Fig. 3). A seção de Poincaré é construída toda vez que esta partícula passa por $x = 0$, com velocidade positiva em x , e então marcamos a sua posição e velocidade em y .

Para esta energia o sistema é dito *integrável* [4, 5]. Isto significa que, num sistema Hamiltoniano conservativo com n graus de liberdade, este é dito integrável se existem n constantes de movimento (F_i), ou integrais de movimento como em [1], independentes em involução, ou seja:

$$\begin{aligned} \{F_i, H\} &= 0, & i &= 1, \dots, n; \\ \{F_i, F_j\} &= 0, & i, j &= 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (25)$$

onde

$$\{F_i, H\} = \sum_i^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (26)$$

é o Parênteses de Poisson. O sistema de Hénon-Heiles possui 4 graus de liberdade, e no caso integrável, o mesmo número de constantes de movimento, identificadas, apenas duas até o momento, analiticamente como a energia total (E), o momento angular ($\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$) [1, 4]. As outras duas integrais de movimento são combinações das coordenadas e momentos.

Voltando a Fig. 4, pode-se ver quatro aglomerados de ilhas. Estas ilhas circundam pontos de equilíbrio estáveis, chamados de pontos elípticos [7, 10]. As linhas fechadas (ilhas) no retrato de fases são órbitas periódicas e representam a evolução de trajetórias

quase-regulares. Este tipo de trajetória pode ser visto na Fig. 5 com mais detalhes.

A regularidade de um sistema é medida pela regularidade de suas trajetórias. Uma trajetória regular evolui temporalmente a partir de determinadas coordenadas no espaço de fases e retorna a elas após um certo tempo. Uma trajetória quase-regular procede da mesma forma, mas nunca retorna ao mesmo ponto, limitando-se a passar muito próxima das coordenadas iniciais. Uma trajetória caótica não expressa nenhuma regularidade. Esta pode nunca mais se aproximar ou retornar de suas coordenadas iniciais. A trajetória caótica pode ser vista na Fig. 6.

Figura 5 - Trajetória quase-regular do sistema de Hénon-Heiles, com energia total igual a $1/6$.

Figura 6 - Trajetória caótica do sistema de Hénon-Heiles, com energia total igual a $1/6$.

As duas trajetórias, Figs. 5 e 6, foram retiradas do sistema com energia $E = 1/6$. Estas figuras mostram o espaço de configuração do sistema de Hénon-Heiles.

Observamos claramente, na Fig. 6, que a trajetória caótica não retornará a uma mesma posição (x, y) , enquanto a trajetória quase-regular, Fig. 5, se aproxima bastante da mesma região do plano (x, y) . Apesar de parecer que a trajetória quase-regular se fecha na Fig. 5, esta nunca retorna ao mesmo lugar.

Na Fig. 7, temos a seção de Poincaré para o sistema com energia $E = 1/10$. Nesta figura, pode-se observar a transição de fase do sistema, de integrável para misto, ou seja, o espaço de fases deixa de ter apenas ilhas fechadas para apresentar a coexistência das fases regulares e caóticas. As trajetórias regulares e quase-regulares do sistema são representadas pelas “ilhas” ou linhas fechadas, enquanto os pontos representam o “mar” caótico.

Visualiza-se, mais claramente, o mar caótico na Fig. 8, que é uma ampliação da Fig. 7 para a região $-0,26 < y < 0,355$ e $-0,44 < p_y < 0,00$. Nesta figura pode-se observar alguns pontos elípticos (pontos de equilíbrio estável) nas coordenadas $(y, p_y) = (0, -0,224)$, em $(0,085, -0,424)$, entre outros.

Nota-se que uma trajetória caótica (os pontos no retrato de fases) varrem todo o espaço de fases, enquanto que a trajetória regular limita-se a determinadas regiões do espaço de forma compacta.

A Fig. 9 apresenta uma ampliação da Fig. 7, com 50 trajetórias, energia $E = 1/10$ e tempo de evolução de 4000, com coordenadas $-0,21 < y < -0,06$ e $-0,16 < p_y < 0,16$. Esta e a próxima figura apresentam duas cores distintas no mesmo retrato de fases, preto e vermelho, para representar as trajetórias caóticas e regulares, respectivamente. Pode-se observar que uma trajetória com coordenadas dentro do mar caótico, percorre quase todo o espaço de fases, enquanto uma trajetória regular ou quase-regular limita-se as regiões onde estão as ilhas. Algumas trajetórias caóticas também apresentam pontos em vermelho.

Figura 7 - Seção de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles, com energia total igual a $1/10$ ou $E = 0,1$, 10 trajetórias e tempo de evolução de 4000.

Dentro do mar caótico, na Fig. 9, observa-se uma densidade maior de pontos (região mais escura em preto) na região $-0,16 < y < -0,06$ e $\pm 0,10 < p_y < \pm 0,05$, no entorno de ilhas. Esses pontos são chamados de *Sticky*, ou *Grude* (tradução literal). Esse nome vem do comportamento que esses pontos apresentam no espaço de fases. Observa-se que eles ficam mais próximos às ilhas, representando um *grudamento* (*stickiness*) nas órbitas regulares. Para que o leitor se familiarize com o conceito e possa pesquisar posteriormente, utilizaremos os termos em Inglês.

Figura 8 - Ampliação da Seção de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles com energia total igual a $1/10$. Ampliação para o intervalo $-0,26 < y < 0,355$ e $-0,44 < p_y < 0,00$.

Figura 9 - Seção de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles, com energia total igual a $1/10$, 50 trajetórias e um tempo de evolução de 4000. As ilhas de regularidade estão em vermelho e as trajetórias caóticas estão em preto, bem como os *stickiness*. A figura também apresenta alguns pontos em vermelho representando as trajetórias caóticas.

O fenômeno de *stickiness* acontece quando algumas trajetórias se aproximam de ilhas de regularidades [11] (também chamadas de armadilhas dinâmicas [12]) e passam um tempo considerável da sua evolução nessas regiões. Isso faz com que o sistema fique mais próximo da regularidade nessas trajetórias. Um indicativo disto é o fato de que o expoente de Lyapunov (esta ferramenta serve para quantificar o grau de caoticidade do sistema) dessas trajetórias diminui [8].

Na Fig. 10 temos uma ampliação da Fig. 7, com as mesmas características da figura anterior, para as coordenadas $0,10 < y < 0,27$ e $-0,32 < p_y < -0,16$. Nesta figura são evoluídas 50 trajetórias num tempo de 4000 quando o sistema tem energia $1/10$. Pode-se observar que existem regiões caóticas e regulares na mesma seção de Poincaré e também o fenômeno de *stickiness* próximos às ilhas.

Figura 10 - Seção de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles, com energia total igual a $1/10$, 50 trajetórias e um tempo de evolução de 4000. As ilhas de regularidade estão em vermelho e as trajetórias caóticas estão em preto, bem como os *stickiness*.

Quando a energia do sistema cresce, mesmo que ele seja pequeno, o mar caótico aumenta, como pode ser visto na Fig. 11 (resultado semelhante à Ref. [13]). Esta figura mostra a seção de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles para 110 trajetórias, com condições iniciais aleatórias, tempo de evolução computacional de 3000 e energia total $E = 1/8 = 0,125$. A região caótica aumentou, mas ainda existem pontos de estabilidade no sistema, representados através das ilhas. Isso significa que, dependendo da condição inicial que tomamos nas coordenadas (x, y, p_x, p_y) , o sistema pode exibir um comportamento regular ou caótico. Uma partícula que se move sobre o plano descrito pela Fig. 3, pode se encontrar num ponto sobre este plano em que poderá permanecer em repouso, nas coordenadas (x, y) e $p_x = 0$, $p_y = 0$, ou poderá mover-se pelo plano numa trajetória fechada, como na Fig. 5, esta ainda pode descrever

uma trajetória irregular, sem retornar a mesma região inicial, percorrendo todo o triângulo como na Fig. 6.

Figura 11 - Seção de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles, com energia total igual a $1/8$, 110 trajetórias e um tempo de evolução de 3000.

Aumentando a energia do sistema para $E = 1/6 = 0,1667$ e utilizando apenas 10 condições iniciais aleatórias para evolução temporal obtemos a seção de Poincaré da Fig. 12. Esta figura apresenta uma expansão da região caótica e apenas duas ilhas de regularidade menores, uma no centro do espaço de fases e outra no canto esquerdo. A ilha central mostra que existem duas ilhas menores circundando dois pontos de equilíbrio [13]. A ilha da esquerda está distribuída em $-0,5 < p_y < 0,5$, no entorno de um único ponto de equilíbrio centrado em $p_y = 0$.

Figura 12 - Seção de Poincaré para o sistema de Hénon-Heiles, com energia total igual a $1/6$, 10 trajetórias e um tempo de evolução de 4000.

O sistema tende a ficar totalmente caótico quando aumentamos mais a sua energia. Quando o espaço de fases é tomado por pontos que representam o comportamento caótico o sistema é dito *ergódico*.

5. Conclusões

Na última década, investigações em sistemas Hamiltonianos tem apresentado grande interesse de pesquisadores da área de sistemas dinâmicos. A coexistência do comportamento regular e caótico no mesmo espaço de fases, o aparecimento de pontos elípticos e a presença de *stickiness* afetam o fenômeno de transporte em diferentes sistemas e podem explicar o comportamento de átomos confinados ou de dispositivos eletrônicos, como os chips feitos de semicondutores. Neste trabalho, analisamos o sistema de Hénon-Heiles em detalhes quanto ao seu comportamento dinâmico. Descrevemos a Hamiltoniana do sistema e as equações de movimento, através do formalismo Hamiltoniano. Verifica-se analiticamente que o sistema é conservativo, com energia e momento angular constantes ao longo do tempo.

Observa-se que o potencial de Hénon-Heiles apresenta formato triangular no plano e que esse sistema pode ser considerado um bilhar bidimensional. Com diferentes condições iniciais e valores de energia observamos a transição das fases, de regulares à caóticas, no espaço de fases, quando a energia do sistema cresce. Para energia $E = 1/24$ o sistema é integrável (regular). Quando $E = 1/10$ ou energias maiores o sistema apresenta comportamento caótico e regular para diferentes condições iniciais. No plano (x, y) são analisadas dois tipos de trajetórias: as regulares (que formam ilhas no espaço de fases), e as caóticas (que formam pontos dispersos no espaço de fases). Observa-se o aparecimento dos grudes (ou sticky) na região caótica do espaço de fases próximos às ilhas de regularidade quando a energia

do sistema aumenta.

Agradecimentos

O autor agradece a Fundação Araucária pelo suporte financeiro do projeto 20.029 do PPP/FA-14/2011.

Referências

- [1] M. Hénon and C. Heiles, *Astron. J.* **69**, 73 (1964).
- [2] J.D. Szezech, I.L. Caldas, S.R. Lopes, R.L. Viana and P.J. Morrison, *Chaos* **19**, 043108 (2009).
- [3] J.D. Szezech, I.L. Caldas, S.R. Lopes, P.J. Morrison and R.L. Viana, *Phys. Rev. E* **86**, 036206 (2012).
- [4] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, San Francisco, 2002), 3^a ed.
- [5] N.A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2000).
- [6] L.H.A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos* (Livraria da Física, São Paulo, 2006), 2^a ed.
- [7] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer, New York, 1992), 2^a ed.
- [8] H.A. Oliveira, C. Manchein and M.W. Beims, *Phys. Rev. E* **78**, 046208 (2008).
- [9] H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste* (Gauthier-Vilars, Paris, 1899).
- [10] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Springer-Verlag, New York, 2003), 2^a ed.
- [11] E.G. Altmann, A.E. Motter and H. Kantz, *Chaos* **15**, 033105 (2005).
- [12] G.M. Zaslavsky, *Physica D* **168**, 292 (2002).
- [13] C.H. Skiadas and C. Skiadas, *Chaotic Modelling and Simulation: Analysis of Chaotic Models Attractors and Forms* (CRC Press, New York, 2009).