Desenvolvimento de um aplicativo android para a análise do circuito de Chua-Matsumoto

Development of an android application for the analysis of the Chua-Matsumoto circuit

Tiago Carvalho Martins*

Faculdade de Física, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Marabá, PA, Brasil

Recebido em 27 de julho de 2015. Aceito em 28 de novembro de 2015

Um aplicativo Android para a análise do circuito de Chua-Matsumoto foi desenvolvido. Este aplicativo fornece a trajetória de solução para o sistema dinâmico do circuito com condição inicial (x_0, y_0, z_0) . O sistema de equações diferenciais não-lineares é resolvido pelo método de Runge-Kutta-Fehlberg. O aplicativo possui três telas de entrada de dados: uma para as condições iniciais (x_0, y_0, z_0) , uma para os parâmetros do sistema (α, β, a, b) , e uma para os parâmetros do método $(t_{max}, h_{max}, h_{min}, tol)$. Há uma tela utilizada para traçar as curvas das coordenadas x , y e z como funções do tempo. Também, há uma tela utilizada para traçar as projeções da trajetória nos planos xy , xz e yz e para exportar todos os dados para um arquivo txt. Além disso, há uma tela utilizada para exibir os expoentes de Lyapunov calculados pelo aplicativo.

Palavras-chave: circuito de Chua-Matsumoto, sistemas dinâmicos, atratores caóticos, aplicativos Android.

Abstract: An Android application for the analysis of the circuit of Chua-Matsumoto was developed. This application provides the solution trajectory to the dynamical system of the circuit with the initial condition (x_0, y_0, z_0) . The system of nonlinear differential equations is solved by Runge-Kutta-Fehlberg method. The application has three data entry screens: one for the initial conditions (x_0, y_0, z_0) , one for the parameters of the system (α, β, a, b) , and one for the parameters of the method $(t_{max}, h_{max}, h_{min}, tol)$. There is a screen used to plot the curves of the coordinates x , y and z as functions of the time. Also, there is a screen used to plot the projections of the trajectory into the xy , xz and yz planes and to export all data to a txt file. Furthermore, there is a screen used to display the Lyapunov exponents calculated by the application.

Keywords: circuit of Chua-Matsumoto, dynamical systems, chaotic attractors, Android applications.

1. Introdução

A ideia de caos relaciona-se à existência de respostas imprevisíveis para um sistema determinístico. Todavia, não existe uma definição única para o caos. Pode-se afirmar que um sistema que apresenta o mesmo comportamento dinâmico complexo do mapa de ferradura de Smale (apresentar uma infinidade contável de órbitas periódicas de período arbitrariamente grande, uma infinidade incontável de órbitas não-periódicas, órbita densa, e sensibilidade às condições iniciais) é caótico.

Durante muitos anos não se soube se o caos representava apenas um conceito matemático, materializado na forma de erros de aproximação nos

cálculos numéricos das equações que descrevem sistemas físicos. Na década de 1980, o circuito de Chua-Matsumoto possibilitou a visualização de um atrator caótico na tela do osciloscópio, corroborando experimentalmente que o caos representa o comportamento dinâmico de sistemas físicos reais [1]. A importância de estudar o circuito de Chua-Matsumoto está relacionada à maior variedade de fenômenos que ele apresenta, os quais têm sido verificados experimentalmente em laboratório, em comparação com outros sistemas comumente estudados, como Rössler ou Lorenz [2]. A criptografia baseada em caos é uma possível aplicação prática do circuito de Chua-Matsumoto [3].

O uso de dispositivos que utilizam a plataforma *Android* encontra-se disseminado entre os estudantes

*Endereço de correspondência: tiagocm@unifesspa.edu.br.

de todos os níveis, trazendo ao professor o desafio de incorporar tais dispositivos ao ensino, em vez de simplesmente condená-los. O presente trabalho foi desenvolvido nesse sentido. Nele apresenta-se o desenvolvimento de um aplicativo em plataforma *Android* (executável em um *Smartphone*) para simulações computacionais do circuito de Chua-Matsumoto. O aplicativo é gratuito e está disponível no endereço eletrônico <http://www.amazon.com.au/Circuit-of-Chua-Matsumoto-and-Chaos>.

O aplicativo soluciona o circuito de Chua-Matsumoto, para uma dada condição inicial (x_0, y_0, z_0) , através do método Runge-Kutta-Fehlberg. É possível escolher os valores das condições iniciais $(x_0, y_0$ e $z_0)$, dos parâmetros do circuito $(\alpha, \beta, a$ e $b)$, assim como, os parâmetros do método $(t_{max}, h_{max}, h_{min}, tol)$. É possível plotar os gráficos das coordenadas x, y e z em função do tempo. Também há a possibilidade de visualização das projeções da trajetória nos planos xy, xz e yz . É possível realizar o cálculo dos expoentes de Lyapunov. Além disso, pode-se exportar os dados para arquivos no formato *txt*, os quais são armazenados na pasta *Documents*.

Na seção 2, o objeto de estudo do aplicativo, o circuito de Chua-Matsumoto, é descrito. A seção 3 contém alguns conceitos da teoria de sistemas dinâmicos, os quais são necessários para que o usuário seja capaz de entender os resultados gerados pelo aplicativo. A seção 4 descreve o aplicativo e apresenta resultados obtidos com o aplicativo em um *Smartphone*, os quais são comparados com simulações computacionais executadas em um computador de mesa (*desktop*) rodando o *software* MATLAB. A seção 5 é a conclusão do trabalho.

2. Modelo do circuito de Chua-Matsumoto

O circuito mostrado na Fig. 1 é conhecido na literatura como *circuito de Chua-Matsumoto*, o qual é constituído de um indutor de indutância L , um

Figura 1: Circuito de Chua-Matsumoto.

resistor de condutância G , dois capacitores de capacitâncias C_1 e C_2 , e um resistor não-linear, N_R , conhecido como *diodo de Chua*. Os parâmetros dos componentes de circuito, C_1, C_2, G, L , são números reais positivos.

O *diodo de Chua* é um dispositivo não-linear, formado por três regiões lineares ($v_{NR} < -B_P$, $-B_P \leq v_{NR} \leq B_P$ e $v_{NR} > B_P$) de resistências negativas, cuja curva característica corrente-voltagem é dada por

$$i_{NR}(v_{NR}) = G_b v_{NR} + (G_a - G_b)(|v_{NR} + B_P| - |v_{NR} - B_P|), \quad (1)$$

em que B_P é a tensão de limiar. Se o valor absoluto da tensão nos terminais de N_R , v_{NR} , excede a tensão de limiar, a inclinação da curva característica é G_b ; caso contrário, a inclinação da curva característica é G_a (ver Fig. 2).

2.1. Modelo em coordenadas adimensionais

O circuito de Chua-Matsumoto é modelado matematicamente, em coordenadas adimensionais, através do sistema de equações diferenciais ordinárias tridimensional

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)) = h_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= x - y + z = h_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= -\beta y = h_3(x, y, z). \end{aligned} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

Em que a função $f(x)$ é dada por

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|) \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

As correntes i_{C_1} e i_{C_2} fluem, respectivamente, através dos capacitores C_1 e C_2 . As tensões nos

Figura 2: Curva característica corrente-voltagem do diodo de Chua.

terminais desses capacitores são v_{C_1} e v_{C_2} , como ilustrado na Fig. 1. Além disso, v^{C_1} é igual a v^{N_R} , pois C_1 e N_R possuem os mesmos terminais. A capacitância mede a capacidade de armazenamento de energia elétrica, assim como, a oposição à variação de tensão (inércia de tensão) nos terminais de um capacitor, quando atravessado por uma corrente elétrica; o que é expresso matematicamente como

$$i_{C_1} = C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = C_1 \frac{dv_{N_R}}{dt}, \quad i_{C_2} = C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt}. \quad (4)$$

A corrente i_G flui através do resistor de condutância G . Pela primeira Lei de Ohm, tem-se

$$i_G = G(v_{C_2} - v_{C_1}) = G(v_{C_2} - v_{N_R}). \quad (5)$$

Aplicando a lei de Kirchhoff das correntes (conservação de carga) respectivamente aos nós l_1 e l_2 , obtém-se

$$i_{C_1} = i_G - i_{N_R} \Rightarrow C_1 \frac{d}{dt} v_{N_R} = G(v_{C_2} - v_{N_R}) - i_{N_R}, \quad (6)$$

$$i_{C_2} = i_L - i_G \Rightarrow C_2 \frac{d}{dt} v_{C_2} = i_L - G(v_{C_2} - v_{N_R}). \quad (7)$$

Aplicando a Lei de Kirchhoff das tensões (conservação de energia) à malha constituída pelo indutor L e pelo capacitor C_2 , obtém-se a equação

$$L \frac{d}{dt} i_L = -v_{C_2}. \quad (8)$$

As variáveis v_{N_R} , i_{N_R} , v_{C_2} , i_L , t , presentes nas Eqs. (6), (7) e (8) podem ser trocadas por variáveis adimensionais x , y , z , τ , utilizando as fórmulas

$$v_{N_R} = x B_P, i_{N_R} = (G B_P) f(x), \quad (9)$$

$$v_{C_2} = y B_P, i_L = z B_P G, t = \frac{C_2}{G} \tau \Rightarrow \frac{d}{d\tau} = \frac{C_2}{G} \frac{d}{dt}. \quad (10)$$

Realizando essas mudanças de coordenadas, obtém-se o sistema tridimensional mostrado na Eq. (2), onde α e β são dados por

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{C_2}{L G^2}. \quad (11)$$

A seu turno, a Eq. (3) pode ser obtida substituindo a Eq. (9) na Eq. (1), onde

$$a = \frac{G a}{G}, \quad b = \frac{G b}{G}. \quad (12)$$

2.2. Implementação do diodo de Chua

O *diodo de Chua* não é vendido comercialmente, mas pode ser emulado com componentes convencionais [4–8]. Na Ref. [5], Matsumoto implementou um *diodo de Chua* com um amplificador operacional (UA741), um par de diodos, sete resistores e uma fonte de alimentação DC de ± 9 V, de acordo com o esquema de circuito mostrado na Fig. 3, resultando em um componente N_R com a curva característica da Eq. (1), com os seguintes valores: $G a \approx -0,8$ mA/V, $G b \approx -0,5$ mA/V e $\pm B p = \pm 1$ V.

O *diodo de Chua* também pode ser obtido através de componentes nanoeletrônicos denominados de memoristores [9–11]. Embora o conceito de memoristor tenha sido desenvolvido por Leon Chua no início da década de 1970, o primeiro memoristor foi construído por pesquisadores da HP Labs apenas em 2008, e ficou conhecido como memoristor da HP [13]. Em 2012, um circuito caótico baseado em memoristores HP foi publicado [14].

3. Sistemas dinâmicos

As variáveis $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, cujas derivadas temporais aparecem no lado esquerdo das equações diferenciais na Eq. (2), são as *variáveis de estado* do sistema. Como as variáveis de estado variam com o tempo, o sistema é designado como *sistema dinâmico*. As variáveis de estado formam o *vetor de estado* dado por

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \equiv (x, y, z). \quad (13)$$

Figura 3: Esquema do circuito do diodo de Chua implementado por Matsumoto [5].

As variáveis de um sistema dinâmico que não representam variáveis de estado; como α , β , a e b ; recebem a denominação de *parâmetros do sistema*. Se esses parâmetros não variam com o tempo t , o sistema é dito *a parâmetros fixos*.

Pode-se pensar no vetor de estado $\mathbf{r}(t)$ como o *vetor posição* de uma partícula, em que as variáveis x , y e z representam as coordenadas da posição. Uma trajetória é descrita pela partícula com o passar do tempo t .

O *espaço de fases* (ou espaço de estados) é o conjunto de todas as posições $\mathbf{r}(t)$ com $t \in \mathbb{R}$. Para a Eq. (2), o espaço de fases é o $\mathbb{R}^3$. A fim de solucionar o sistema, deve-se fornecer, em um certo instante de tempo t_0 , o vetor de estado $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$. Uma solução é uma trajetória no espaço de fases, iniciada em $\mathbf{r}_0$. Esse problema é conhecido como problema de valor inicial com condição inicial $\mathbf{r}_0$. Para garantir a existência e unicidade da solução de um problema de valor inicial, as funções h_i e $\partial h_i / \partial x_i$ ($i = 1, 2, 3$) devem ser contínuas.

Um sistema de equações diferenciais é dito *autônomo*, se a variável independente t não aparece explicitamente nas equações. Portanto, o sistema (2) é autônomo. Um sistema não-autônomo de ordem n , $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{r}(t), t)$, pode ser transformado em um sistema autônomo de ordem $n + 1$, $\dot{\mathbf{r}}'(t) = \mathbf{h}(\mathbf{r}'(t))$, substituindo o vetor de estado $\mathbf{r}(t)$ pelo vetor de estado $\mathbf{r}'(t) = (\mathbf{r}(t), t)$.

Para $x \geq 1$, $|x - 1| = x - 1$ e $|x + 1| = x + 1$; para $x \leq -1$, $|x - 1| = -x + 1$ e $|x + 1| = -x - 1$; para $|x| \leq 1$, $|x - 1| = -x + 1$ e $|x + 1| = x + 1$; portanto, a Eq. (3) pode ser reescrita como

$$f(x) = \begin{cases} bx + a - b, & x \geq 1 \\ ax, & |x| \leq 1 \\ bx - a + b, & x \leq -1 \end{cases}, \quad (14)$$

evidenciando a existência de três diferentes domínios para as soluções da Eq. (2), a saber, $D_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \leq -1\}$, $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 1\}$ e $D_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -1 \leq x \leq 1\}$. O plano $U_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = -1\}$ é a fronteira entre D_{-1} e D_0 , e o plano $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$ é a fronteira entre D_1 e D_0 .

No domínio D_{-1} , $f(x) = bx - a + b$, então $\dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) = (\alpha b - \alpha)x + \alpha y + \alpha(a - b)$, portanto, o sistema de equações pode ser escrito na

forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha\nu - \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

onde $p = \alpha(a - b)$ e $\nu = b$. Definindo a matriz $\overleftrightarrow{A}$ e o vetor coluna $\mathbf{B}$ dados por

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{bmatrix} -\alpha\nu - \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

é possível escrever a equação matricial (15) como

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \overleftrightarrow{A} \mathbf{r}(t) + \mathbf{B}, \quad (17)$$

em que o vetor $\mathbf{B}$ é chamado de entrada do sistema, o vetor $\mathbf{r}$ é chamado de saída do sistema e a matriz $\overleftrightarrow{A}$ é chamada de matriz do sistema.

No domínio D_1 , $f(x) = bx + a - b$, então $\dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) = (-\alpha b - \alpha)x + \alpha y + \alpha(-a + b)$, portanto, o sistema de equações pode ser escrito na forma matricial através da Eq. (15) com $p = -a + b$ e $\nu = b$.

No domínio D_0 , $f(x) = ax$, então $\dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) = (-\alpha a - \alpha)x + \alpha y$, portanto, o sistema de equações pode ser escrito na forma matricial através da Eq. (15) com $p = 0$ e $\nu = a$.

O sistema dinâmico (2) é contínuo, haja vista o vetor de estado $\mathbf{r}(t)$ variar continuamente com o tempo t . Um sistema é discreto quando há um conjunto de instantes de tempo $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_j, \dots\}$, com $j \in \mathbb{N}$, fora dos quais nunca ocorrem variações no vetor de estado.

O princípio da superposição estabelece que, se $\mathbf{r}_1(t)$ é a saída produzida pela entrada $\mathbf{B}_1(t)$ e $\mathbf{r}_2(t)$ é a saída produzida pela entrada $\mathbf{B}_2(t)$, então

$$\mathbf{B}_T = k_1 \mathbf{B}_1 + k_2 \mathbf{B}_2 \Rightarrow \mathbf{r}_T = k_1 \mathbf{r}_1 + k_2 \mathbf{r}_2, \quad (18)$$

onde k_1 e k_2 são constantes. Um sistema é dito linear quando obedece ao princípio da superposição, caso contrário, é dito não-linear. Malgrado o sistema (2) para o domínio $\mathbb{R}^3$ seja não-linear, ele assume a forma linear (17) para os domínios D_{-1} , D_0 e D_1 , o que pode ser demonstrado utilizando a expressão (18).

Diz-se que um sistema é dissipativo, quando o volume que ele ocupa no espaço de fase contrai-se

com o passar do tempo, o que pode ser expresso através da equação

$$\nabla \cdot \mathbf{h} < 0 \Rightarrow \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial h_3}{\partial z} < 0. \quad (19)$$

Portanto, $-\alpha(b+1) - 1 < 0$ e $-\alpha(a+1) - 1 < 0$ são as condições para que o circuito de Chua-Matsumoto seja dissipativo em $D_{-1} \cup D_1$ e D_0 , respectivamente.

3.1. Pontos de equilíbrio e estabilidade no sentido de Lyapunov

A análise do sistema nos seus *pontos de equilíbrio* (ou *pontos fixos*) é importante para estudar a estabilidade do sistema. Os pontos de equilíbrio são aqueles em que a partícula está parada, ou seja, se a partícula encontra-se no ponto de equilíbrio $\mathbf{r}^*$ em um certo instante de tempo t^* , então a partícula encontrar-se-á no mesmo ponto $\mathbf{r}^*$ para qualquer $t > t^*$. Matematicamente, pode-se dizer que pontos de equilíbrio $\mathbf{r}^*$ são aqueles para os quais

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}^*(t)) = \dot{\mathbf{r}}^*(t) = 0. \quad (20)$$

Para sistemas de equações diferenciais que descrevem um circuito elétrico, um ponto de equilíbrio corresponde a uma *solução DC* (*direct current*) do circuito.

Um ponto regular ou ordinário é todo ponto do espaço de fases que não é ponto de equilíbrio.

Um ponto de equilíbrio $\mathbf{r}^*$ é assintoticamente estável se todas as trajetórias com condições iniciais contidas numa esfera de raio δ centrada em $\mathbf{r}^*$ tendem a $\mathbf{r}^*$ com o passar do tempo. Quando δ é finito o ponto de equilíbrio é localmente assintoticamente estável. Quando δ é infinito o ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável. Ambos os pontos são atratores. O conjunto das condições iniciais que tendem a um mesmo atrator formam a *bacia de atração do atrator*.

Um ponto de equilíbrio $\mathbf{r}^*$ é marginalmente estável se todas as trajetórias com condições iniciais contidas numa esfera de raio δ centrada em $\mathbf{r}^*$ não tendem a $\mathbf{r}^*$ com o passar do tempo, mas continuam dentro de uma esfera de raio ϵ centrada em $\mathbf{r}^*$.

Um ponto de equilíbrio $\mathbf{r}^*$ é instável se pelo menos uma trajetória com condição inicial contida numa esfera de raio δ centrada em $\mathbf{r}^*$ escapa de uma esfera de raio ϵ centrada em $\mathbf{r}^*$ em um tempo finito.

Os pontos de equilíbrio do sistema da Eq. (2), obtidos quando $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, são: $P_- = (-\theta, 0, \theta)$,

em $x < -1$; $P_0 = O = (0, 0, 0)$, em $-1 < x < 1$; e $P_+ = (\theta, 0, -\theta)$ em $x > 1$; em que $\theta = (b-a)/(b+1) > 1$ e, portanto, a sentença $[(a < -1) \wedge (b > -1)] \vee [(a < -1) \wedge (b > -1)]$ deve ser verdadeira, para que existam os pontos de equilíbrio P_- e P_+ .

3.2. Linearização

Dado um ponto de equilíbrio P cuja posição é $\mathbf{r}_P$, as expansões em séries de Taylor das componentes do vetor $\mathbf{h} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ da Eq. (2) são

$$h_i(\mathbf{r}) \approx h_i(\mathbf{r}_P) + (x - x_P) \frac{\partial h_i(\mathbf{r}_P)}{\partial x} + (y - y_P) \frac{\partial h_i(\mathbf{r}_P)}{\partial y} + (z - z_P) \frac{\partial h_i(\mathbf{r}_P)}{\partial z}, \quad (21)$$

onde $i = 1, 2, 3$. Como $h_1(\mathbf{r}) = \dot{x}$, $h_1(\mathbf{r}_P) = \dot{x}_P$, $h_2(\mathbf{r}) = \dot{y}$, $h_2(\mathbf{r}_P) = \dot{y}_P$, $h_3(\mathbf{r}) = \dot{z}$ e $h_3(\mathbf{r}_P) = \dot{z}_P$, as três equações obtidas podem ser expressas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} - \dot{x}_P \\ \dot{y} - \dot{y}_P \\ \dot{z} - \dot{z}_P \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial z} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial z} \end{bmatrix}_P \begin{bmatrix} x - x_P \\ y - y_P \\ z - z_P \end{bmatrix}. \quad (22)$$

A Eq. (22) é uma versão linearizada do sistema (2), válida para pontos infinitesimalmente próximos do ponto P . A matriz do sistema linearizado é denominada de matriz jacobiana do sistema, a qual para o circuito de Chua-Matsumoto pode ser obtida a partir da Eq. (2), sendo expressa como

$$\overleftrightarrow{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial z} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha\nu - \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

onde $\nu = b$ para $|x| \geq 1$, e $\nu = a$ para $|x| \leq 1$. A Eq. (23) coincide com a Eq. (15), pois o circuito de Chua-Matsumoto é um sistema não-linear constituído por três regiões lineares. A Eq. (22) pode ser reescrita como

$$\dot{\mathbf{r}}' = \overleftrightarrow{\mathcal{J}} \mathbf{r}', \quad (24)$$

onde $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_P$.

Sabe-se que $r(t) = ke^{\lambda t}$ é solução da equação diferencial de primeira ordem $\dot{r}(t) = \lambda r(t)$. Por analogia, pode-se pensar em uma solução $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ para a Eq. (24), resultando em $\lambda \mathbf{v}e^{\lambda t} = \overleftrightarrow{\mathcal{J}} \mathbf{v}e^{\lambda t}$, logo

$$\overleftrightarrow{\mathcal{J}} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow (\lambda \overleftrightarrow{\mathcal{I}} - \overleftrightarrow{\mathcal{J}}) \mathbf{v} = 0, \quad (25)$$

onde $\overleftrightarrow{I}$ é a matriz identidade de ordem 3. Nessa equação, λ é um autovalor de $\overleftrightarrow{J}$, e $\mathbf{v}$ é o autovetor associado a λ . Como o circuito de Chua-Matsumoto é tridimensional, $\overleftrightarrow{J}$ possui três autovalores λ_1 , λ_2 e λ_3 , e três autovetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, respectivamente associados. Esses autovalores são obtidos como soluções da equação secular $\det(\lambda \overleftrightarrow{I} - \overleftrightarrow{J}) = 0$, a qual resulta em

$$\lambda^3 + ((\nu + 1)\alpha + 1)\lambda^2 + (\beta + \nu\alpha)\lambda + (\nu + 1)\alpha\beta = 0, \quad (26)$$

onde $\nu = b$ para a região $D_{-1} \cup D_1$, que contém os pontos de equilíbrio P_- e P_+ ; e $\nu = a$ para a região D_0 , que contém o ponto de equilíbrio $P_0 = O$.

Se o conjunto solução da Eq. (26) não é formado por três autovalores reais, então esse conjunto possui um autovalor real $\lambda_1 = \gamma$ e dois autovalores complexos conjugados $\lambda_2 = \sigma + i\omega$ e $\lambda_3 = \sigma - i\omega$. Nesse caso, se as soluções da Eq. (24) são linearmente independentes, a solução geral é a combinação linear delas, resultando na expressão

$$\mathbf{r}' = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\gamma t} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{(\sigma + i\omega)t} + C_3 \mathbf{v}_3 e^{(\sigma - i\omega)t}, \quad (27)$$

em que os autovetores $\mathbf{v}_2 \triangleq \boldsymbol{\eta}_R + i\boldsymbol{\eta}_I$ e $\mathbf{v}_3 \triangleq \boldsymbol{\eta}_R - i\boldsymbol{\eta}_I$ constituem um par complexo conjugado, com parte real $\boldsymbol{\eta}_R$ e parte imaginária $\boldsymbol{\eta}_I$. A matriz cujas colunas são os autovetores $\overleftrightarrow{P} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$ é denominada de *matriz modal*.

Definindo o vetor $\mathbf{w}(t)$, dado por

$$\mathbf{w}(t) \triangleq \begin{bmatrix} e^{\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(\sigma + i\omega)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(\sigma - i\omega)t} \end{bmatrix} [C_1 \ C_2 \ C_3]^T, \quad (28)$$

é possível reescrever a Eq. (27) como

$$\mathbf{r}'(t) = \overleftrightarrow{P} \mathbf{w}(t). \quad (29)$$

Derivando a Eq. (28), tem-se

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - i\omega \end{bmatrix} \mathbf{w}(t). \quad (30)$$

Como $\mathbf{w}(0) = [C_1 \ C_2 \ C_3]^T$, fazendo $t = 0$ na Eq. (29), obtém-se a expressão

$$\mathbf{r}'(0) = \overleftrightarrow{P} \mathbf{w}(0) \Rightarrow [C_1 \ C_2 \ C_3]^T = \overleftrightarrow{P}^{-1} \mathbf{r}'(0). \quad (31)$$

A partir da Eq. (31), são obtidos o coeficiente real C_1 e o par complexo conjugado $C_2 \triangleq c_C e^{\phi_C}$ e

$C_3 \triangleq c_C e^{-\phi_C}$. Reescrevendo a Eq. (27) em termos de c_C , ϕ_C , $\boldsymbol{\eta}_R$ e $\boldsymbol{\eta}_I$, resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= C_1 \mathbf{v}_1 e^{\gamma t} + \\ &2c_C e^{\sigma t} [\boldsymbol{\eta}_R \cos(\omega t + \phi_C) + \\ &\boldsymbol{\eta}_I \sin(\omega t + \phi_C)]. \end{aligned} \quad (32)$$

A trajetória $\mathbf{r}'(t)$, $t \in \mathbb{R}$, pode ser decomposta em duas componentes $\mathbf{r}'_R$ e $\mathbf{r}'_C$, dadas por

$$\mathbf{r}'_R = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\gamma t}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_C &= 2c_C e^{\sigma t} [\boldsymbol{\eta}_R \cos(\omega t + \phi_C) + \\ &\boldsymbol{\eta}_I \sin(\omega t + \phi_C)]. \end{aligned} \quad (34)$$

A trajetória descrita por $\mathbf{r}'_R$ é uma linha reta (pois o versor de $\mathbf{r}'_R$ não varia com o tempo). O conjunto dos pontos dessa trajetória forma o *autoespaço correspondente ao autovalor real γ no ponto fixo P* , representado por $E_R(P)$. Por outro lado, $\mathbf{r}'_C$ é um vetor tangente ao plano gerado pelos vetores de base $\boldsymbol{\eta}_R$ e $\boldsymbol{\eta}_I$. O conjunto dos pontos desse plano forma o *autoespaço correspondente aos autovalores complexos $\sigma \pm i\omega$ no ponto fixo P* , representado por $E_C(P)$. Nota-se que os vetores de base são mantidos quando realizadas as derivações da Eq. (33) ou da Eq. (34) com relação ao tempo t . Como consequência disso, se $\mathbf{r}' \in E^C(P)$ (ou $\mathbf{r}' \in E^R(P)$) em um instante $t = 0$, então $\mathbf{r}' \in E^C(P)$ (ou $\mathbf{r}' \in E^R(P)$) para qualquer $t > 0$; isto é, uma trajetória iniciada em um autoespaço, evolui nele.

A partir da Eq. (33) conclui-se que, se $\gamma < 0$, então $\mathbf{r}'_R \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, as trajetórias convergem assintoticamente para o ponto fixo P em $E_R(P)$. Todavia, se $\gamma > 0$, as trajetórias afastam-se de P .

Da Eq. (34), vê-se que, quando $\sigma < 0$ e $\omega \neq 0$, as trajetórias em $E_C(P)$ descrevem uma espiral que converge assintoticamente para o ponto fixo P (a Eq. (34) é uma elipse multiplicada por uma exponencial que decresce com o tempo), que nesse caso é um *foco espiral atrativo* (estável). Se $\sigma > 0$ e $\omega \neq 0$, a trajetória é uma espiral que se afasta do ponto fixo P , o qual representa um *foco espiral repulsivo* (instável).

Os autovetores $\mathbf{v}_1$ que geram $E_R(P)$ são obtidos a partir da equação $(\gamma \overleftrightarrow{I} - \overleftrightarrow{J}) \mathbf{v}_1 = 0$. Fazendo $\mathbf{v}_1 = (1, v_1^y, v_1^z)$ chega-se ao autovetor expresso como

$$\mathbf{v}_1 = (1, \frac{\gamma}{\alpha} + \nu + 1, -\frac{\beta\nu}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}). \quad (35)$$

Portanto, a equação da reta $E_R(P)$ é dada por

$$x = \frac{y}{\frac{\gamma}{\alpha} + \nu + 1} = \frac{z}{-\frac{\beta\nu}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}}. \quad (36)$$

Utilizando $[(\sigma \pm i\omega)\overleftrightarrow{I} - \overleftrightarrow{J}]\mathbf{v}_{2,3} = 0$ com $\mathbf{v}_{2,3} = (1, v_{2,3}^y, v_{2,3}^z)$, e calculando os autovetores $\boldsymbol{\eta}_R = (\eta_R^x, \eta_R^y, \eta_R^z) = (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)/2$ e $\boldsymbol{\eta}_I = (\eta_I^x, \eta_I^y, \eta_I^z) = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)/(2i)$, encontra-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_R &= (1, \frac{\sigma + \alpha\nu + \alpha}{\alpha}, -\frac{\beta\sigma^2 + (\alpha\beta\nu + \alpha\beta)\sigma + \beta\omega^2}{\alpha\sigma^2 + \alpha\omega^2}), \\ \boldsymbol{\eta}_I &= (0, \frac{\omega}{\alpha}, \frac{(\beta\nu + \beta)\omega}{\sigma^2 + \omega^2}). \end{aligned} \quad (37)$$

Da Eq. (26) conclui-se que

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{\gamma + \alpha\nu + \alpha + 1}{2}, \\ \omega^2 + \sigma^2 &= -2\sigma\gamma + \alpha\nu + \beta. \end{aligned} \quad (38)$$

Substituindo a Eq. (38) na Eq. (37), pode-se obter, a partir do produto vetorial $\boldsymbol{\eta}_R \times \boldsymbol{\eta}_I$, um vetor normal ao plano $E_C(P)$. Após algumas manipulações algébricas, com a utilização de Eq. (26) com $\lambda = \gamma$, chega-se à equação de $E_C(P)$ dada por

$$(\gamma^2 + \gamma + \beta)x + \alpha\gamma y + \alpha z = 0. \quad (39)$$

3.3. Forma de Jordan real

Da Eq. (29), tem-se

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) = \overleftrightarrow{P}^{-1}\mathbf{r}', \quad (40)$$

resultando na variável real w_1 e no par complexo conjugado $w_2 \triangleq w_R + iw_I$ e $w_3 \triangleq w_R - iw_I$. A matriz $\overleftrightarrow{P}$ é dada por

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2\eta_R^y & -2\eta_I^y & v_1^y \\ 2\eta_R^z & -2\eta_I^z & v_1^z \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Da Eq. (30), tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{w}_{2,3} &= (\sigma \pm i\omega)w_{2,3} \\ \therefore \dot{w}_R \pm i\dot{w}_I &= (\sigma \pm i\omega)(w_R \pm iw_I) \\ \therefore \dot{w}_R &= \sigma w_R - \omega w_I, \dot{w}_I = \omega w_R + \sigma w_I \\ \therefore \begin{bmatrix} \dot{w}_R \\ \dot{w}_I \\ \dot{w}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma & -\omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_R \\ w_I \\ w_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

A matriz do sistema (42) é a *forma de Jordan real* do circuito de Chua-Matsumoto da Eq. (2), cuja validade restringe-se a um dos domínios lineares (as

variáveis $w_R(t)$, $w_I(t)$, $w_1(t)$ obtidas em D_0 não são as mesmas obtidas em D_1).

Utilizando a Eq. (40), o vetor de base $\mathbf{v}_1$ do subespaço $E_R(O)$ transforma-se em $\tilde{\mathbf{v}}_1 = (w_R, w_I, w_1) = (0, 0, 1)$, e os vetores de base $\boldsymbol{\eta}_R$ e $\boldsymbol{\eta}_I$ do subespaço $E_C(O)$ transformam-se em $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_R = (w_R, w_I, w_1) = (1/2, 0, 0)$ e $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_I = (w_R, w_I, w_1) = (0, -1/2, 0)$. Portanto, o sistema (42) é obtido a partir de (2), através de uma transformação de coordenadas que coloca $E_R(O)$ sobre um dos eixos, no caso w_1 , e $E_C(O)$ sobre o plano perpendicular a esse eixo, no caso $w_1 = 0$.

3.4. Ponto fixo do tipo sela-foco e órbita homoclínica

A trajetória que passa por um ponto de equilíbrio P é referida como *órbita homoclínica* se tende a P quando $t \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow -\infty$. O ponto P é denominado de *ponto homoclínico*. Para facilitar a compreensão, utilizar-se-á o exemplo ilustrado na Fig. 4.

Se $\sigma\gamma < 0$ para um ponto de equilíbrio O com autovalores $\lambda_1 = \gamma$, $\lambda_2 = \sigma + i\omega$, $\lambda_3 = \sigma - i\omega$; então esse ponto é do tipo sela, pois dados os subespaços $E_R(O)$ e $E_C(O)$, se O é assintoticamente estável em um deles, será instável no outro. Além disso, se $\omega \neq 0$, então as trajetórias em $E_C(O)$ são focos espirais. Um ponto fixo do tipo sela-foco é um ponto fixo do tipo sela com $\omega \neq 0$.

Para o ponto fixo O , a posição dos pontos da trajetória é $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + O = \mathbf{r}'(t)$. Caso o ponto fixo fosse $P_{+/-}$, a posição dos pontos da trajetória seria $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + P_{+/-}$.

Figura 4: Órbita homoclínica no ponto fixo $O = (0,0,0)$, para os parâmetros $\alpha = 11.0917459$, $\beta = 14.2857143$, $a = -1.1428571$ e $b = -0.7142857$. A trajetória foi obtida através da Eq. (27).

Uma órbita homoclínica é obtida no ponto fixo $O = (0,0,0)$, para os parâmetros $\alpha = 11.0917459$, $\beta = 14.2857143$, $a = -1.1428571$ e $b = -0.7142857$. Os autovalores de O são $\lambda_1 = \gamma$, $\lambda_2 = \sigma + i\omega$, $\lambda_3 = \sigma - i\omega$ com $\gamma = 2.835$, $\sigma = -1.125$ e $\omega = 2.593$. Como $\sigma\gamma < 0$ e $\omega \neq 0$, O é um ponto fixo do tipo sela-foco. A trajetória mostrada na Fig. 4 foi obtida através da Eq. (27).

Na Fig. 4, a trajetória no subespaço instável $E_R(O)$ parte de O para M_1 . O ponto M_1 é a intersecção $E^R(O) \cap U_1$ (obtido fazendo $x = 1$ na Eq. (36)). Na região D_1 a trajetória é uma curva que parte de M_1 para M_2 . O ponto M_2 pertence à reta formada pela intersecção dos planos $E^C(O) \cap U_1$. Finalmente, partindo de M_2 , a trajetória descreve uma espiral que converge assintoticamente para O . Em síntese, a trajetória tende ao ponto fixo O quando $t \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow -\infty$, ou seja, a trajetória é uma órbita homoclínica.

Em 1986, Chua, Komuro e Matsumoto apresentaram uma prova rigorosa de que é possível encontrar órbitas homoclínicas para o circuito de Chua-Matsumoto através da escolha adequada dos parâmetros α , β , a e b [15].

3.5. Seção de Poincaré e mapa de primeiro retorno

Dado um sistema tridimensional, pode-se analisar os pontos de intersecção entre as trajetórias e uma seção transversal às mesmas (denominada de *seção de Poincaré*), em vez das próprias trajetórias. Vários pontos de intersecção entre uma trajetória e a seção de Poincaré são obtidos ao longo do tempo, dando origem a uma versão bidimensional discreta do sistema contínuo tridimensional. Um *mapa de primeiro retorno* (ou *mapa de Poincaré*) transforma os pontos de uma seção de Poincaré nos pontos obtidos quando a trajetória atravessa novamente a seção no mesmo sentido. Uma análise bastante completa do circuito de Chua-Matsumoto utilizando mapas de primeiro retorno é apresentada na Ref. [15].

Em Fig. 5, é mostrada uma seção de Poincaré, em $x = 1$, para $\alpha = 11.0917459$, $\beta = 14.2857143$, $a = -1.1428571$ e $b = -0.7142857$. No tempo t_0 , há 400 pontos distanciados de 0.0001, em torno do ponto M_1 . Em um tempo t_1 , posterior, os pontos evoluem para pontos próximos a M_2 . Nota-se que nesse caso, em que as trajetórias não passam pelo ponto homoclínico, a trajetória não apresenta sensibilidade às condições iniciais.

Figura 5: seção de Poincaré, em $x = 1$, para $\alpha = 11.0917459$, $\beta = 14.2857143$, $a = -1.1428571$ e $b = -0.7142857$. No tempo t_0 , há 400 pontos distanciados de 0.0001, em torno do ponto M_1 . Em um tempo t_1 , posterior, os pontos evoluem para pontos próximos a M_2 .

Na Fig. 6, é mostrada uma seção de Poincaré, em $x = 1$, para $\alpha = 11.0917459$, $\beta = 14.2857143$, $a = -1.1428571$ e $b = -0.7142857$. A seção mostra dois instantes consecutivos de um mapa de primeiro retorno. Em t_0 , há 400 pontos (20×20) distanciados entre si de 0.0001, em torno do ponto M_1 . Em t_1 , posterior, o sistema evoluiu para pontos distantes entre si. Nesse caso, em que a trajetória passa nas proximidades do ponto homoclínico O , a trajetória apresenta sensibilidade às condições iniciais.

Figura 6: Seção de Poincaré, em $x = 1$, para $\alpha = 11.0917459$, $\beta = 14.2857143$, $a = -1.1428571$ e $b = -0.7142857$. A seção mostra dois instantes consecutivos de um mapa de primeiro retorno. Em t_0 , há 400 pontos (20×20) distanciados entre si de 0.0001, em torno do ponto M_1 . Em t_1 , posterior, o sistema evoluiu para pontos distantes entre si.

3.6. Ferradura de Smale

O quadrado unitário D na Fig. 7 é transformado por f em um objeto em forma de ferradura (*ferradura de Smale*). A transformação f realiza a expansão, contração e dobra em três direções distintas, produzidas pela equação de evolução temporal dada por

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ em } H_0, \\ \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ em } H_1. \quad (43)$$

A transformação inversa f^{-1} é mostrada na Fig. 8.

A medida que ocorrem sucessivas iterações, a área de intersecção da ferradura com D reduz-se e divide-se em um maior número de regiões desconexas, como ilustrado na Fig. 9. Dá-se o mesmo quando sucessivas

Figura 7: Expansão, contração e dobra do quadrado unitário realizadas pela transformação f .

Figura 8: Expansão, contração e dobra do quadrado unitário realizadas pela transformação inversa f^{-1} .

Figura 9: Aplicação de f sobre $f(D)$, ou seja, $f^2(D)$.

iterações são retrocedidas no tempo, como ilustrado na Fig. 10.

Se todas as transformações f forem realizadas sobre D , obter-se-á infinitos segmentos de reta unitários verticais. Para transformações inversas f^{-1} , obter-se-á infinitos segmentos de reta unitários horizontais. O conjunto das órbitas que permanecem em D após todas as transformações é obtido pelos pontos de intersecção entre os segmentos unitários horizontais e verticais, e é dado por

$$\Lambda = \{ \dots f^{-1}(D) \cap D \cap f^1(D) \dots \} = \bigcap_{n=-\infty}^{n=+\infty} f^n(D). \quad (44)$$

Em vez de analisar a evolução das órbitas, é possível analisar a evolução dos itinerários que informam em qual região de D (H_0 ou H_1) a órbita encontra-se a cada iteração. Esses itinerários podem ser representados por sequências bi-infinitas $s = \{ \dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots \}$, com $s_k = 0$, se a órbita passa por H_0 , e $s_k = 1$, se órbita passa por H_1 .

Pode-se definir a transformação de desvio $\sigma(s) = \{ \dots s_0 s_1 s_2 s_3 \dots \}$ em Σ (conjunto de todas as sequências bi-infinitas). A transformação σ faz cada termo s_n da sequência avançar para s_{n+1} , representando a lei de evolução temporal em Σ , que corresponde a f em Λ . É possível provar que as conclusões obtidas para a dinâmica de σ em Σ também são válidas para f em Λ .

Figura 10: Aplicação de f^{-1} sobre $f^{-1}(D)$, ou seja, $f^{-2}(D)$.

Uma sequência bi-infinita $s = \{\dots s_{-1}.s_0s_2\dots\}$ possui uma *órbita periódica*, se existe $T \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^T(s) = s$, onde T é o período. Por exemplo, $s = \{\dots 101101.101101\dots\} = \{\overline{101.101}\}$ é uma órbita periódica de período 3. Para qualquer número natural escrito na forma binária χ , é possível obter uma órbita periódica $s = \{\overline{\chi.\chi}\}$. Portanto, há uma infinidade contável de órbitas periódicas de período arbitrariamente grande.

A cada sequência bi-infinita $s = \{\dots s_{-1}.s_0s_2\dots\}$ corresponde uma sequência infinita $\bar{s} = \{0.s_0s_{-1}s_2s_{-2}\dots\}$. Se s é não-periódica, $0.s_0s_{-1}s_2s_{-2}\dots$ é um número irracional; portanto, há uma infinidade incontável de órbitas não-periódicas.

A distância entre duas sequências bi-infinitas $s = \{\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots\}$ e $s' = \{\dots s'_{-2}s'_{-1}.s'_0s'_1s'_2\dots\}$ é dada por $d(s, s') = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k/2^{|k|}$, onde $\delta_k = 0$, se $s_k = s'_k$, ou $\delta_k = 1$, se $s_k \neq s'_k$. Afirmar que s e s' estão próximos (dado um $\varepsilon > 0$, $d(s, s') < \varepsilon$), equivale a dizer: dado um $N \in \mathbb{N}$, $s_k = s'_k$ para $|k| < N$, onde $N = N(\varepsilon)$.

Uma sequência s possui órbita densa quando, dados $s' \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$, existe um número de iterações T tal que $d(\sigma^T(s), s') < \varepsilon$. A sequência $\bar{s} = \{\dots \{11\}\{01\}\{1\}.\{0\}\{00\}\{10\}\dots\}$ (formada por todas as sequências finitas com 0's e 1's) possui órbita densa, pois, após um certo número T de iterações, tem-se $s_k = s'_k$ para $|k| < N$, onde $s = \sigma^T(\bar{s})$ e $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.

A transformação σ em Σ possui sensibilidade às condições iniciais. Dados $s, \bar{s} \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$, tais que $d(s, \bar{s}) < \varepsilon$, ou seja, $s_k = \bar{s}_k$ para $|k| < N$; após N iterações, não será mais possível afirmar que $d(\sigma^N(s), \sigma^N(\bar{s})) < \varepsilon$, pois $|k| > N$, e não será possível garantir que $s_k = \bar{s}_k$.

Como a dinâmica de f em Λ pode ser descrita em termos da dinâmica de σ em Σ , a transformação da ferradura de Smale possui:

- Uma infinidade contável de órbitas periódicas de período arbitrariamente grande;
- Uma infinidade incontável de órbitas não-periódicas;
- Órbita densa;
- Sensibilidade às condições iniciais.

3.7. Teorema de Shilnikov

O teorema de Shilnikov foi publicado em 1965 [16]. Segundo esse teorema [15], dado um sistema tridimensional $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h}(\mathbf{r})$ contínuo e linear por partes

que possui um ponto fixo do tipo sela-foco na origem com um autovalor real γ e um par complexo conjugado de autovalores $\sigma \pm i\omega$, com $\sigma\gamma < 0$ e $\omega \neq 0$; se $|\sigma| < |\gamma|$ (*condição de Shilnikov*) e existe uma órbita homoclínica através da origem, então existe uma ferradura de Smale próxima a essa órbita homoclínica.

É possível encontrar um sistema de coordenadas em que uma órbita homoclínica, como aquela mostrada na Fig. 4, tenha o subespaço instável $E_R(0)$ sobre o eixo z e o subespaço estável $E_C(0)$ sobre o plano xy , como ilustrado na Fig. 11. Isso pode ser feito utilizando o conjunto dos autovetores como base, como em (42).

Um conjunto de pontos de uma seção de Poincaré tende a contrair-se para um único ponto, quando a seção é tomada cada vez mais próxima a um ponto fixo assintoticamente estável. Se em vez disso, o ponto fixo for instável, os pontos da seção afastar-se-ão. Se o ponto fixo for homoclínico, a seção será contraída na direção do subespaço estável e será expandida na direção do subespaço instável. Além disso, se o sistema for dissipativo, a seção terá de ser dobrada para que caiba no espaço de fases. Portanto, o retângulo (que é um conjunto de condições iniciais de várias trajetórias) na Fig. 4 transforma-se com as mesmas propriedades da ferradura de Smale. Nesse caso, o circuito de Chua-Matsumoto possuirá: uma infinidade contável de órbitas periódicas de período arbitrariamente grande, uma infinidade incontável de órbitas não-periódicas, órbita densa, e sensibilidade às condições iniciais.

Figura 11: Ferradura de Smale próxima a uma trajetória homoclínica.

3.8. Expoentes de Lyapunov

Pode-se pensar em um cubo centrado em um ponto de uma órbita homoclínica, que seja formado por pontos que representam condições iniciais. A medida que o tempo passa, os pontos desse cubo evoluem de uma forma que, a dimensão do cubo na direção da órbita deve ser mantida constante, pois caso diminuísse, convergiria para um ponto, e caso aumentasse, os pontos afastar-se-iam uns dos outros e da órbita, com o passar do tempo.

Considerando que as dimensões do cubo são $d_j(t) = d_j(t_0)e^{\Lambda_j(t-t_0)}$, onde $j = 1, 2, 3$ e Λ_1, Λ_2 e Λ_3 são os expoentes de Lyapunov. Por exemplo, se $d_2(t)$ é a dimensão na direção de uma órbita homoclínica, então $\Lambda_2 = 0$, e $d_2(t) = d_2(t_0)$ não varia com o tempo (o expoente na direção da trajetória deve ser nulo, pois as trajetórias nunca se afastam do atrator caótico, nem tendem a um ponto fixo). Se $d_1(t)$ é a dimensão na direção do subespaço instável, então $\Lambda_1 > 0$, e $d_1(t) = d_1(t_0)e^{\Lambda_1(t-t_0)}$ cresce exponencialmente com o tempo. Se $d_3(t)$ é a dimensão na direção do subespaço estável, então $\Lambda_3 < 0$, e $d_3(t) = d_3(t_0)e^{\Lambda_3(t-t_0)}$ diminui exponencialmente com o tempo. O volume do cubo é

$$V(t) = d_1(t)d_2(t)d_3(t) = V(t_0)e^{(t-t_0)\sum_{j=1}^3 \Lambda_j}. \quad (45)$$

Um sistema caótico é dissipativo, pois as trajetórias não se afastam do atrator caótico, portanto,

$$\sum_{j=1}^3 \Lambda_j = \frac{1}{t-t_0} \ln \left(\frac{V(t)}{V(t_0)} \right) < 0. \quad (46)$$

4. Aplicativo *Circuit of Chua and Chaos*

Nessa seção serão descritos os métodos numéricos implementados no aplicativo. Além disso, serão apresentados alguns resultados obtidos através de simulações com o programa *Circuit of Chua and Chaos*, realizadas em um *Smartphone*. Esses resultados serão comparados aos obtidos com simulações utilizando o programa *MATDS* (para MATLAB),¹ realizadas em um computador de mesa. As linguagens utilizadas no desenvolvimento do aplicativo foram *XML* e *Java*. Todas as telas do aplicativo

¹ver <http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/matds/>.

foram desenvolvidas em *XML*, e toda a lógica de programação foi implementada em *Java*, inclusive os algoritmos do método Runge-Kutta-Fehlberg e da técnica empregada no cálculo dos expoentes de Lyapunov.

É possível fazer simulações sem realizar a entrada de dados, pois os valores $\alpha = 15.0$, $\beta = 25.58$, $a = -1.14$, $b = -0.71$, $x_0 = 1.6$, $y_0 = 0.0$, $z_0 = -1.5$ e $t_{max} = 45.0$, $h_{max} = 0.01$, $h_{min} = 1.0E-16$ e $tol = 1.0E-15$ estão previamente selecionados. A escolha de outros valores podem ser realizadas nas telas de entradas de dados. Na Fig. 12 é mostrada a tela de entrada de dados para os parâmetros do circuito de Chua. Há outras telas para escolher a condição inicial e os parâmetros do método Runge-Kutta-Fehlberg.

4.1. Simulação computacional

O método de Runge-Kutta-Fehlberg foi realizado a partir da generalização para o caso tridimensional de um algoritmo (para o caso unidimensional) apresentado na Ref. [17] (algoritmo 5.3 da p. 275). O cálculo dos expoentes de Lyapunov foi realizado com base no algoritmo apresentado na Ref. [18]. Ambos os algoritmos tiveram de ser adaptados ao caso do circuito de Chua-Matsumoto.

Figura 12: Tela para entrada de dados em que os parâmetros do circuito de Chua-Matsumoto (α , β , a e b) podem ser escolhidos.

O exemplo de simulação apresentado aqui utiliza os valores previamente selecionados no aplicativo, isto é

$$\begin{aligned}\alpha &= 15.0, \beta = 25.58, a = -1.14, b = -0.71, \\ x_0 &= 1.6, y_0 = 0.0, z_0 = -1.5, \\ t_{max} &= 45, h_{max} = 0.01, \\ h_{min} &= 1E - 16, tol = 1E - 15.\end{aligned}\quad (47)$$

Os parâmetros do método Runge-Kutta-Fehlberg t_{max} , h_{max} , h_{min} e tol representam, respectivamente, o tempo máximo de simulação, o passo temporal máximo, o passo temporal mínimo e a tolerância do método.

A tela utilizada para plotar os gráfico da projeção da trajetória no plano xy está mostrada na Fig. 13, para os parâmetros mostrados na Eq. (47). Pode-se escolher também o plano yz ou xz . A tela utilizada para plotar os gráficos das curvas $x(t)$ está mostrada na Fig. 14. Pode-se plotar também $y(t)$ e $z(t)$ em função do tempo.

Figura 13: Tela de plotagem das projeções da trajetória. Foi plotada a projeção da trajetória no plano xy , para os parâmetros mostrados na Eq. (47).

Figura 14: Tela de plotagem das curvas em função de t . Foi plotado o gráfico da curva $x(t)$, para os parâmetros mostrados na Eq. (47).

Na Fig. 15 é mostrada a tela de cálculo dos expoentes de Lyapunov, a qual apresenta os valores $\Lambda_1 = 0.36$, $\Lambda_2 = 0.00$, e $\Lambda_3 = -4.15$, para os parâmetros mostrados na Eq. (47). A soma dos expoentes é negativa, indicando que o sistema é dissipativo. Como visto anteriormente, esses valores correspondem a uma solução caótica. Utilizando o aplicativo *MATDS*, foram obtidos os valores $\Lambda_1 = 0.39$, $\Lambda_2 = 0.00$, e $\Lambda_3 = -4.12$. Vê-se que esses resultados estão de acordo.

Os pontos de equilíbrio, para os parâmetros da Eq. (47), são $P_+ = (1.48, 0, -1.48)$, $P_0 = (0, 0, 0)$ e $P_- = (-1.48, 0, 1.48)$. Os autovalores de P_0 são $\lambda_1 = -1.1259 + 3.8418i$, $\lambda_2 = -1.1259 - 3.8418i$ e $\lambda_3 = 3.3517$. Os autovalores de P_+ e P_- são $\lambda_1 = 0.31038 + 4.30581i$, $\lambda_2 = 0.31038 - 4.30581i$ e $\lambda_3 = -5.9708$. Nota-se que todos os pontos de equilíbrio são do tipo sela-foco e obedecem à *condição de Shilnikov*.

Figura 15: Tela de cálculo dos expoentes de Lyapunov, para os parâmetros mostrados na Eq. 47.

Na Fig. 16 é mostrada a trajetória do atrator de rolo duplo (*double-scroll*) para o circuito de Chua-Matsumoto com os parâmetros mostrados na Eq. (47). Os resultados obtidos com o aplicativo *Circuit of Chua and Chaos* foram comparados aos obtidos com o programa *MATDS*. Os resultados são coincidentes.

Figura 16: Atrator de rolo duplo (*double-scroll*) para o circuito de Chua-Matsumoto com os parâmetros mostrados na Eq. (47). Os resultados obtidos com o aplicativo *Circuit of Chua and Chaos* são comparados aos obtidos com o programa *MATDS*. Os resultados são coincidentes.

Nas Figs. 17, 18 e 19 são mostrados, respectivamente, os gráficos das curvas de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ em função de t . Todos os resultados estão em concordância.

5. Conclusão

Realizar simulações com o circuito de Chua-Matsumoto é uma forma eficiente de tornar mais atrativo o estudo de sistemas dinâmicos (uma disciplina que em geral é ofertada tanto para os cursos de engenharia quanto para os cursos de física e matemática), auxiliando no aprendizado de conceitos relacionados à disciplina. O uso da plataforma *Android* possui algumas vantagens em termos da realização de simulações com relação às outras tec-

Figura 17: Curvas de x em função de t obtidos com o aplicativo *Circuit of Chua and Chaos* (linhas) comparadas às curvas obtidas com o programa *MATDS* (pontos na forma de x), os parâmetros mostrados na Eq. (47). Os resultados são coincidentes.

Figura 18: Curvas de y em função de t obtidos com o aplicativo *Circuit of Chua and Chaos* (linhas) comparadas às curvas obtidas com o programa *MATDS* (pontos na forma de $+$), os parâmetros mostrados na Eq. (47). Os resultados são coincidentes.

Figura 19: Curvas de z em função de t obtidos com o aplicativo *Circuit of Chua and Chaos* (linhas) comparadas às curvas obtidas com o programa *MATDS* (pontos na forma de x), os parâmetros mostrados na Eq. (47). Os resultados são coincidentes.

nologias, tais como: o número de usuários ativos do *Android* ultrapassou a quantidade de um bilhão de usuários em 2014;² o custo dos dispositivos é menor; os dispositivos possuem tela sensível ao toque; os dispositivos apresentam maior comodidade de manuseio (ocupam pouco espaço, não apresentam superaquecimento, apresentam um menor consumo de energia elétrica).

O aplicativo *Circuit of Chua and Chaos* foi desenvolvido para o estudo de um sistema que apresenta um certo grau de complexidade, uma vez que as soluções podem ser caóticas. O aplicativo mostrou-se eficiente na obtenção de expoentes de Lyapunov; projeções das trajetórias nos planos xy , xz e yz ; e gráficos de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. Os resultados do aplicativo foram exportados para arquivos *txt* e comparados com os resultados obtidos com o programa *MATDS*, utilizado por muitos dos pesquisadores que investigam o circuito de Chua-Matsumoto, inclusive o próprio Leon Chua, que dá nome ao circuito, como pode ser visto na Ref. [9]. A partir da comparação, verificou-se que os resultados obtidos com o aplicativo coadunam com os obtidos com o *MATDS*.

Pretende-se desenvolver outros programas de simulação para plataforma *Android*, de forma a cobrir o conteúdo da disciplina de sistemas dinâmicos que normalmente é ministrado em um curso regular de graduação.

Referências

- [1] Luiz Henrique Alves Monteiro, *Sistemas Dinâmicos* (Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2011), 3ª ed.
- [2] Stephen Lynch, *Dynamical Systems with Applications using MATLAB®* (Birkhäuser, Basileia, 2014).
- [3] Ahmed G. Radwan and Mohammed E. Fouda, *On the Mathematical Modeling of Memristor, Memcapacitor, and Meminductor* (Springer International Publishing, Suíça 2015).
- [4] T. Matsumoto, IEEE Trans. on Circ. & Syst. **31**, 1055 (1984).
- [5] T. Matsumoto, L.O. Chua and M. Komuro, IEEE Trans. on Circ. & Syst. **32**, 797 (1985).
- [6] T. Matsumoto, L.O. Chua and M. Komuro, Journal Circuit Theory and Appl. **14**, 117 (1986).
- [7] M.P. Kennedy, Frequenz **46**, 66 (1992).
- [8] J.M. Cruz and L.O. Chua, IEEE Trans. on Circ. & Syst. **46**, 985 (1992).
- [9] M. Itoh and L.O. Chua, Int. J. Bif. and Chaos **18**, 3183 (2008).
- [10] B. Muthuswamy, Int. J. Bif. and Chaos **453**, 1335 (2010).
- [11] B. Muthuswamy and L.O. Chua, Int. J. Bif. and Chaos **20**, 1567 (2009).
- [12] L.O. Chua, IEEE Trans. on Circ. Theory **5**, 507 (1971).
- [13] D.B. Strukov, G.S. Snider, D.R. Stewart and S.R. Williams, Nature **453**, 80 (2008).
- [14] A. Buscarino, L. Fortuna, M. Frasca and L.V. Gambuzza, Chaos: Interdiscip. J. Nonlinear Sci. **22**, 023136 (2012).
- [15] L.O. Chua, M. Komuro and T. Matsumoto, IEEE Trans. on Circ. and Systems **33**, 1072 (1986).
- [16] L.P. Shil'nikov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **160**, 558 (1965).
- [17] Richard L. Burden e J. Douglas Faires, *Análise Numérica* (CENGAGE Learning, São Paulo, 2008) 8ª ed.
- [18] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney and J.A. Vastano, Physica D **16**, 285 (1985).

²ver <http://www.techspot.com/news/>