Diagramas de Carter-Penrose em Relatividade Geral: buracos negros e outros exemplos explícitos

Carter-Penrose diagrams in general relativity: black holes and other explicit examples

C. H. Coimbra-Araújo^{*1}

¹Departamento de Engenharias e Exatas, Universidade Federal do Paraná, Palotina, PR, Brazil

Recebido em 1 de março de 2016. Revisado em 29 de março de 2016. Aceito em 3 de abril de 2016

No presente artigo é introduzido, de forma didática e simplificada, evitando-se grandes perdas de conteúdo, um dos formalismos mais utilizados de representação geométrica de horizontes de eventos e singularidades, conhecido como ‘diagrama de Carter-Penrose’. São diagramas que simplificam e agilizam a percepção do espaço-tempo ao redor e no interior de horizontes de evento. Para chegar à descrição físico-geométrica desses diagramas, inicialmente se explicará o formalismo de remoção de singularidades de coordenada em horizontes de eventos para uma determinada métrica e, em seguida, as coordenadas de Finkelstein e de Kruskal-Szekeres. Exemplos de diagramas de Penrose para alguns tipos de buracos negros serão apresentados (Schwarzschild, Reissner-Nordström e Kerr-Newman), além das possibilidades referentes a buracos brancos e buracos de minhoca.

Palavras-chave: buracos negros, gravitação, buracos de minhoca, diagramas de Penrose.

In the present article it is introduced in a didactic and simplified manner, avoiding major content losses, one of the most used formalisms of geometric representation of event horizons and singularities, known as ‘Carter-Penrose diagram’. Those are diagrams that simplify and streamline the perception of the spacetime around event horizons and also inside black holes. Before present the physical and geometrical description of such diagrams, initially it will be explained the formalism for removal of coordinate singularities of event horizons for a particular metric; after it will be introduced the coordinates of Finkelstein and Kruskal-Szekeres. Examples of Penrose diagrams for some types of black holes will be presented (Schwarzschild, Reissner-Nordström and Kerr-Newman), beyond the possibilities regarding white holes and also wormholes.

Keywords: black holes, gravitation, wormholes, Penrose diagrams.

1. Introdução

O universo possui muitas classes de objetos astronômicos, tais quais os planetas e seus satélites, asteroides, cometas, estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias ou mesmo o conglomerado de gases provenientes da morte de estrelas, os quais podem formar desde nebulosas à composição difusa do próprio meio interestelar. Outra classe de objeto astronômico cuja descoberta é ainda recente é a de buracos negros, que tem este nome por, embora possuir um grande campo gravitacional, não apresentar brilho próprio. É um jargão publicamente conhecido o de que “nem

mesmo a luz escapa dos buracos negros”. Além disso, esta é uma classe de objeto astronômico que nos últimos tempos tem inflamado o imaginário popular e tem aparecido com certa frequência em filmes de ficção científica na figura de portais intergalácticos, máquinas do tempo ou mesmo “máquinas do juízo final”.

Os buracos negros nunca foram observados diretamente por um telescópio. No entanto, efeitos indiretos como órbitas profundamente excêntricas de estrelas no centro da Galáxia [1, 2], jatos energéticos provindos de galáxias de núcleo ativo [3, 4] e grandes emissões de raios-X em sistemas estelares binários [5, 6] são algumas das principais pistas observaci-

^{*}Endereço de correspondência: carlos.coimbra@ufpr.br.

onais que apontam a real existência dos buracos negros.

Após algumas décadas de estudos sobre o assunto, físicos e astrônomos conseguiram classificar e matematizar algumas das principais características e comportamentos desses enigmáticos objetos. Por exemplo, do ponto de vista astronômico, existem buracos negros estelares (formados a partir do colapso de estrelas) e buracos negros supermaciços (com bilhões ou mesmo trilhões de massas solares e presentes no centro das galáxias). Do ponto de vista da teorização física da gravitação clássica ou quântica, existem buracos negros estáticos (ou de Schwarzschild), buracos negros estáticos e com carga elétrica (buracos negros de Reissner-Nordström), buracos negros neutros e girantes (buracos negros de Kerr) e buracos negros girantes que possuem carga elétrica (buracos negros de Kerr-Newman). Ainda há teorizações como aquelas em que alguns tipos de buracos negros produzem a formação de “túneis” que ligam dois pontos distintos do espaço-tempo (pontes de Einstein-Rosen ou “buracos de minhoca”). Também há possibilidades teóricas como as dos mini buracos negros, cuja termodinâmica permite a emissão de radiação (radiação Hawking), ou ainda os sistemas binários de buracos negros que podem produzir a emissão de ondas gravitacionais (recentemente descobertas, vide por exemplo [7]).

Logicamente o presente artigo não tem o intuito de esgotar o assunto nem do ponto de vista astronômico, nem do ponto de vista da teoria física gravitacional. No entanto, para que se compreenda minimamente o significado físico do que é um buraco negro pode-se apresentar aspectos simplificados da estratégia heurística histórica que levou ao seu conceito. A partir daí, será possível abordar o tema principal do trabalho que é a descrição didática de algumas soluções e formas de representação geométrica dos objetos em questão.

Nesse sentido, para atender fisicamente ao apelo do “o que ele é?”, torna-se válido notar que quando um sistema, como uma estrela ou um planeta, é confinado em volumes cada vez menores, há um aumento de atração gravitacional e portanto um aumento na velocidade de escape do sistema, isto é, maiores densidades implicam em maior dificuldade de escapar gravitacionalmente do sistema. Heuristicamente há como fazer a densidade do sistema crescer a níveis críticos de tal modo que nenhuma forma de matéria e nem mesmo a luz, que tem uma velocidade da

ordem de 300 mil km/s, consiga escapar do campo gravitacional presente no sistema. Conceitualmente, o sistema se transformou no já nominado “buraco negro”. O planeta Terra por exemplo se transformaria num buraco negro caso fosse capaz de colapsar até uma área transversal de 1 hectare (chamado de raio de Schwarzschild do planeta Terra).

Do ponto de vista geométrico, um buraco negro seria uma deformação crítica do espaço-tempo de tal maneira que as geodésicas (ou o caminho mais curto) seguidas pelas partículas de luz (os fótons) caíam na deformação crítica sem retornar, o que explica por que não se pode observar um buraco negro diretamente.

Há algumas décadas tem-se aventado a existência de objetos ainda mais burlescos, como é o caso dos denominados “buracos brancos”. Buracos brancos produziriam um efeito contrário ao dos buracos negros: eles estariam jogando fora matéria e luz. Por causa dessa hipótese, nos anos 1960 alguns astrônomos chegaram a especular que os buracos brancos seriam os responsáveis pela energização dos recém-descobertos quasares. Os quasares são objetos de origem extragaláctica que possuem um brilho muito intenso (equivalente a bilhões de sóis). Atualmente se sabe, no entanto, que no centro dos quasares existem de fato um buraco negro e o brilho dos quasares provém de matéria que, ao cair neste buraco negro, sofre grandes fricções, emitindo radiação eletromagnética de altas energias. Dessa forma, na atualidade não existem evidências astronômicas que apontem para a existência de buracos brancos. Do ponto de vista físico, os buracos brancos também podem criar problemáticos paradoxos que violam as leis da termodinâmica.

Buracos de minhoca também não têm qualquer evidência observacional, embora sejam objetos fascinantes por criarem a possibilidade das já citadas passagens ao longo de pontos distintos do espaço-tempo, como por exemplo duas galáxias separadas a milhões de anos-luz. Outro problema a ser considerado é que muitas das soluções conhecidas da relatividade geral que permitiriam buracos de minhoca transponíveis exigem a existência de matéria exótica (matéria que possui massa/energia “negativa”).

Os objetos acima citados (buracos negros, buracos brancos e buracos de minhoca) são todos obtidos como solução das equações de Einstein da relatividade geral. Dessa forma, o presente traba-

lho abordará algumas destas soluções e maneiras de representá-las por meio de gráficos intuitivos do espaço-tempo, tais quais a representação em coordenadas de Finkelstein e Kruskal-Szekeres e os diagramas de Carter-Penrose.

Há uma extensa bibliografia sobre o assunto. Uma boa referência para entender os buracos negros, buracos brancos e buracos de minhoca de maneira mais informal é o livro de Jean-Pierre Luminet (1992) [8], que também introduz de forma simplificada os diagramas de Penrose, objeto de estudo do presente trabalho. Infelizmente, este livro ainda não tem uma versão em português. Stephen Hawking possui três livros, com versões em português, também de cunho de divulgação científica, que aborda o tema [9–11]. Em particular, o livro de Hawking “Uma breve história do tempo” [9] é um *best-seller* literário mundial. Em português há ainda os livros de Jorge Horvath e Paulo Custodio [12] e o livro de Daniel Vanzella e George Matsas [13]. Alguns aspectos importantes desta última obra citada podem ser vistos, por exemplo, em três artigos de divulgação publicados na revista *Scientific American Brasil* [14–16]. Como referências mais específicas e aprofundadas há o livro de Chandrasekhar (1998) [17] que trata de buracos negros de um ponto de vista mais físico-matemático; o livro de Shapiro e Teukolsky (1983), sobre buracos negros e outros objetos compactos em geral, este com um ponto de vista mais astrofísico [18]; e o livro de Novikov e Frolov (1998) [19], sobre a física geral de buracos negros, com destaque especial para buracos brancos, buracos de minhoca e máquinas do tempo. Há ainda o excelente livro de Robert Wald sobre o tema [20]. Aulas da Universidade de São Paulo sobre o assunto podem ser acessadas em português no canal da UnivespTV [21] ou, em inglês, uma excelente palestra de Kip Thorne, dada em cerimônia oficial do Instituto de Tecnologia da Califórnia, sobre buracos negros e dobras do tempo [22]. Demais referências, principalmente artigos, serão apresentadas ao longo das próximas seções.

O presente trabalho está assim dividido: na Seção 2 serão introduzidos os aspectos mais simplificados e intuitivos da teoria da relatividade geral e das equações de Einstein. A Seção 3 abordará uma das primeiras soluções para as equações de campo de Einstein, a solução de Schwarzschild, relacionando-a à descrição física de buracos negros estáticos. O horizonte de eventos desta solução apresenta uma

aparente singularidade matemática. A Seção 4 mostrará que tal singularidade não é real e pode ser interpretada como uma singularidade de coordenada, dando origem à representação em coordenadas de Finkelstein. Os diagramas de Kruskal-Szekeres serão introduzidos na Seção 5. A Seção 6 apresentará outras soluções que descrevem buracos negros, tais quais as soluções de Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman e a Seção 7 abordará representações gráficas destas soluções a partir de diagramas de Carter-Penrose e como algumas delas também representam buracos brancos e buracos de minhoca. A Seção 8 será dedicada a algumas colocações finais.

2. Relatividade geral e equações de Einstein

As equações de Einstein que descrevem o campo gravitacional foram desenvolvidas por Albert Einstein entre os anos de 1914 e 1916 [23, 24], e são o fundamento da chamada relatividade geral. Elas são um conjunto de 16 equações escritas compactamente como

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \quad (1)$$

onde $G_{ab} = R_{ab} - 1/2 g_{ab} R$ é denominado tensor de Einstein e pode ser descrito como o elemento que representa a geometria do espaço-tempo em termos do tensor de curvatura de Ricci $R_{ab} = G_{ab} - 1/2 g_{ab} R$ e do escalar de Ricci $R = g^{ab} R_{ab} = R^b{}_b$, isto é, por meio de diferenciações de segunda ordem do tensor métrico g_{ab} que descreve um elemento de linha do espaço-tempo. T_{ab} é o tensor de energia-momento, que representa o conteúdo material do espaço-tempo. O primeiro termo dessa equação representa portanto o conteúdo geométrico de um certo ponto do espaço-tempo e que é equivalente ao segundo termo da equação, o conteúdo material presente neste mesmo ponto do espaço-tempo. G e c são respectivamente a constante gravitacional de Newton e a velocidade da luz. Muitas vezes costuma-se usar na literatura relativista e de campos unidades naturais, em que $c = G = 1$. Não será o caso no presente artigo, a não ser quando expressamente especificado. No espaço-tempo de três coordenadas espaciais e uma temporal, os índices a e b podem assumir os valores $a, b = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Geralmente assume-se que $a = 0$ ou $b = 0$ é usado para representar a coordenada temporal. Aqui será assumido que o elemento da métrica

de coordenada temporal tem sinal negativo e elementos de coordenadas espaciais tem sinal positivo. Uma observação importante é que na cosmologia, i.e., quando o objeto de estudo é o universo como um todo, costuma-se escrever as equações de campo de Einstein como $G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$, onde Λ é chamada de constante cosmológica. No entanto, para o estudo de objetos autogravitantes, como estrelas ou buracos negros, costuma-se usar diretamente a equação (1), pois assume-se *a priori* que tais objetos não são influenciados por campos presentes no estudo do universo em larga escala (como é o caso do campo de expansão acelerada provocado pela “energia escura”).

Uma definição interessante que representa o curso temporal de eventos no espaço é a chamada “linha de mundo” (no alemão *Weltlinie* e no inglês *worldline*). O uso do conceito de linha de mundo na física foi implementado por Herman Minkowski em 1908 [25] e visa compreender matematicamente a sequência de eventos no espaço-tempo. Nesse sentido, cada evento pode ser especificado por quatro números, i.e., suas coordenadas: o tempo e mais três coordenadas espaciais. Dessa forma, o espaço-tempo pode ser representado geometricamente como uma variedade matemática quadridimensional e um elemento de linha ds desse espaço-tempo pode ser compreendido a partir de vetores infinitesimais dx^a e dx^b tangentes a esse espaço-tempo. O produto escalar desses vetores definem a chamada “métrica” $g(dx^a, dx^b) = g_{ab} dx^a dx^b$ sobre a variedade, onde g_{ab} são os elementos da métrica. O quadrado do elemento de linha no espaço-tempo é então definido como

$$ds^2 = \sum_{a,b=0}^3 g_{ab} dx^a dx^b. \quad (2)$$

A distribuição de densidade no espaço-tempo determinará, a partir da solução das equações (1) de Einstein, quais devem ser os elementos da métrica. A métrica cujos elementos são $g_{00} = -1$, $g_{ii} = 1$, $g_{0i} = g_{i0} = 0$, $g_{ij} = 0$ (com i e j representando valores de 1 a 3 e $i \neq j$) descreve o caso particular do espaço-tempo plano (ou de Minkowski). Para este caso os referenciais são inerciais e os eventos que ocorram em tal espaço-tempo são devidamente explicados pela relatividade especial (restrita). O caso geral ocorre quando os elementos g_{ab} descrevem um espaço-tempo curvo e nesse caso as linhas de mundo serão tratadas pela relatividade geral.

Para maiores desenvolvimentos pedagógicos sobre a Teoria da Relatividade Geral, vide por exemplo [26–30]. Maiores aprofundamentos podem ser encontrados em [31–34].

3. Solução de Schwarzschild, buracos negros estáticos e horizonte de eventos

A primeira solução das equações (1) no vácuo (i.e., quando $T_{ab} = 0$ e portanto $R_{ab} = 0$) foram obtidas por Karl Schwarzschild em 1916 [35]. Esta solução descreve o campo gravitacional externo a uma certa massa M que possui simetria esférica, carga elétrica neutra e momento angular nulo (i.e., uma distribuição de massa esférica neutra e estática). De acordo com o teorema de Birkhoff [36], a solução de Schwarzschild é a solução mais geral das equações de Einstein para a simetria esférica no vácuo, o que é análogo ao fato de que a solução de Coulomb é a única solução esfericamente simétrica das equações de Maxwell no vácuo. E com isso pode-se interpretar que tanto na gravitação quanto no eletromagnetismo não existe radiação a partir de monopólos.

Os elementos da métrica, conforme observado por Schwarzschild, formam uma matriz diagonal 4×4 (i.e., os termos não-nulos são g_{00} , g_{11} , g_{22} e g_{33}) e o elemento de linha $ds^2 = \sum g_{ab} dx^a dx^b$ é escrito de forma geral como

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3)$$

onde r , θ e ϕ são as coordenadas esféricas do espaço tridimensional e $f(r)$ e $h(r)$ são funções a se determinar a partir do cálculo dos tensores de Ricci R_{ab} e das equações de Einstein no vácuo $R_{ab} = 0$. Como já dito, calcular os valores de R_{ab} significa em última instância calcular diferenciações de segunda ordem do tensor métrico g_{ab} . Detalhes dessa tarefa podem ser vistos em [32] e as seguintes equações diferenciais são obtidas:

$$-\frac{df}{dr} + \frac{1-f}{r} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dr} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} = 0. \quad (5)$$

A eq. (4) pode ser reescrita como $\frac{d}{dr}(rf) = 1$, o que implica em

$$f = 1 + C/r, \quad (6)$$

onde C é uma constante. A eq. (5) implica que $f = Kh^{-1}$, onde K é uma constante. Fazendo $K = 1$, chega-se à solução geral

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (7)$$

com $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

A primeira observação a se fazer sobre a solução de Schwarzschild é que ela é assintoticamente plana, já que quando $r \rightarrow \infty$, os termos da métrica se aproximam do espaço-tempo de Minkowski descrito na Seção 2 (neste caso em coordenadas esféricas), o que permite a interpretação física de que a métrica (7) descreve o campo gravitacional no exterior de um corpo isolado. Um segundo ponto a destacar é que quando r é muito grande, o comportamento de um corpo de teste na solução de Schwarzschild coincide com o potencial Newtoniano com massa de teste M , de tal forma que $C/2 = -GM/c^2$, i.e., $-\frac{Cc^2}{2G}$ pode ser interpretado como a massa total do campo de Schwarzschild. A forma final da métrica de Schwarzschild é então escrita como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (8)$$

onde $r_S = 2GM/c^2$ é o termo comumente denominado de “raio de Schwarzschild”. Uma observação interessante é que no limite newtoniano, i.e., quando sob campos fracos é possível linearizar a gravitação de Einstein (vide, p.ex., [32,37]), a métrica do espaço-tempo descrito em termos de coordenadas esféricas tem componente g_{00} escrita como $g_{00} = -(1 + 2\Phi/c^2)$, onde Φ é o potencial gravitacional newtoniano para uma certa distribuição. Como se sabe, o potencial gravitacional newtoniano fora de uma distribuição esférica, medido a uma distância r do centro da distribuição é derivado como $\Phi = -\frac{GM}{r}$. Nota-se, portanto, que na solução de Schwarzschild o termo g_{00} da métrica coincide com o mesmo termo presente no limite newtoniano e, quando r é muito grande, tem relação com o potencial newtoniano Φ fora de uma distribuição esférica homogênea. De fato, à época, a solução de Schwarzschild descrevia com maior completeza, em relação ao campo newtoniano, o campo gravitacional próximo a uma distribuição de massa que produz campos fortes, como uma estrela. Einstein percebeu isso após receber em 1916

uma carta de Schwarzschild descrevendo a solução. Einstein respondeu à carta da seguinte maneira [38]:

Li o seu artigo com o maior interesse. Eu não esperava que se podia formular a solução exata do problema de uma forma tão simples. Gostei muito do seu tratamento matemático para o assunto. Próxima quinta-feira vou apresentar o trabalho para a Academia com algumas explicações.

Infelizmente, Karl Schwarzschild faleceu pouco tempo depois desse contato com Einstein, vítima de uma doença de pele autoimune adquirida durante sua atuação como militar na 1ª Guerra Mundial [39]. Ele recebeu homenagens póstumas de alguns cientistas, como a de S. Chandrasekhar [40] em 1986, em comemoração ao 70º aniversário de sua morte, e do próprio Albert Einstein [41], em seu artigo de 1916 intitulado “Palestra em Memória de Karl Schwarzschild”.

Um ponto crucial da solução (8) de Schwarzschild é que o componente g_{11} da métrica se torna singular (portanto sem existência matemática) tanto para $r = 0$ quanto para $r = r_S = \frac{2GM}{c^2}$. Escrevendo g_{11} por extenso,

$$g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}}, \quad (9)$$

claramente é possível verificar que se $r \rightarrow r_S$, o denominador de g_{11} vai a zero, portanto um ponto do espaço-tempo em que não existe solução matemática ($g_{11} \rightarrow \infty$). Isso intrigou alguns pesquisadores da área à época em que a solução veio à tona. O próprio Schwarzschild ficou perplexo com a possibilidade de $r = r_S$ ser uma singularidade, pois não havia um significado físico pertinente para explicar a falta de solução para esse valor específico de r . Foram cogitadas duas prováveis explicações para isso: (a) Em $r = r_S$ haveria de fato uma singularidade na estrutura do espaço-tempo; (b) a geometria descrita pela solução não teria singularidade alguma em $r = r_S$, no entanto, as coordenadas escolhidas para descrever a métrica poderiam, sim, ter uma falha em cobrir apropriadamente certas regiões do espaço-tempo.

Primeiramente, Schwarzschild percebeu que a provável “singularidade” em $r = r_S$ ocorre para um valor numérico específico na coordenada radial dado por

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km}, \quad (10)$$

onde $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}$ kg é a massa do Sol. Isso significaria, por exemplo, que um objeto com a massa do Sol teria uma “singularidade” no raio de tamanho $r = 3$ km. Como hoje se sabe, o Sol não possui qualquer singularidade física no seu interior. Outra observação importante, é que a solução (8) descreve apenas o campo no exterior de um objeto e por isso é denominada de “solução de Schwarzschild no vácuo”. A solução interior também foi calculada por Schwarzschild e nela não há o surgimento de singularidades. Portanto, o que significaria $r_S = 3$ km para um objeto com a massa do Sol?

Essa pergunta coincide com uma pergunta feita, séculos atrás, pelo filósofo natural John Michell e pelo matemático Pierre-Simon de Laplace [42]. Michell percebera em 1783 [43] que um objeto com a mesma densidade que o Sol, mas com raio 500 vezes maior que o do Sol, seria uma espécie de “estrela escura”, pois sua gravidade seria tão grande que, segundo Michell, uma partícula de luz não conseguiria escapar da estrela e portanto tal estrela seria “invisível”. Usando a expressão $M_\star = \rho_\odot V_\star$, onde $\rho_\odot$ é a densidade do Sol, é possível calcular a massa $M_\star$ dessa estrela imaginada por Michell: se ela tem 500 vezes o raio do Sol, dado que o volume $V_\star$ dessa estrela é proporcional ao cubo de seu raio, é possível calcular a massa dessa estrela como $M_\star \approx 1,25 \times 10^8 M_\odot$. Por curiosidade, pode-se tomar essa massa e a substituir na eq. (10):

$$3 \frac{M_\star}{M_\odot} \text{ km} = 3,75 \times 10^8 \text{ km}.$$

Como o Sol tem um raio de $6,96 \times 10^5$ km, verifica-se que o número acima calculado é de fato 500 vezes maior que o raio do Sol! Portanto, o raio r_S tem relação com a concepção de Michell de que haveria uma classe de objetos no universo que teria um campo gravitacional tão forte que nem a luz poderia escapar dali.

Dessa forma, a pergunta “o que significa $r_S = 3$ km para um objeto com a massa do Sol?” tem como provável resposta a concepção de Michell de que tal objeto seria simplesmente uma estrela que, dado o seu campo gravitacional extremamente forte, não emite luz, uma “estrela escura”, objeto hoje comumente conhecido como “buraco negro”. Atualmente, a quantidade r_S é denominada “raio de Schwarzschild” ou “horizonte de eventos” de um buraco negro

estático. O horizonte de eventos é portanto o ponto de não-retorno, a fronteira teórica ao redor de um buraco negro a partir da qual a força da gravidade é tão forte que nada, nem mesmo a luz pode escapar, pois a sua velocidade é inferior à velocidade de escape do buraco negro.

Uma outra maneira (mais simplista) de encontrar o raio de Schwarzschild de um sistema com simetria esférica é fazer a energia cinética final de uma partícula de teste $K = 1/2mv^2$ em queda sobre o sistema esférico de massa M se igualar ao módulo da energia potencial $|W| = GmM/r$ a uma distância r do sistema. Fazendo a velocidade máxima da partícula ser a própria velocidade da luz, o raio r onde isso ocorre é $r = 2GM/c^2 = r_S$.

4. Mas o horizonte de Schwarzschild é uma singularidade? Diagramas de Finkelstein

Geralmente assume-se que, na métrica de Schwarzschild, o ponto $r = 0$ implica de fato em uma singularidade física real. E a posição $r = r_S$? Além do fato de indicar o conceito de horizonte de eventos, seria $r = r_S$ uma singularidade real? Intrigado com o assunto, o próprio Schwarzschild, pouco tempo antes de seu falecimento, decidiu evitar o incômodo e substituiu a coordenada radial r por outra que ele considerou “melhor”, definida como $\tilde{r} = [r^3 - r_S^3]^{1/3}$ (vide [35]). A razão para a substituição é que o elemento de volume do espaço tempo, dado por $\det(g_{ab}) = -1$, permanece inalterado, embora o volume da região em torno do ponto r seja subtraído de uma quantidade r_S^3 , o que causa um *shift* de coordenada tal que a única singularidade ocorre apenas em $\tilde{r} = 0$. Dessa forma, verifica-se que dependendo da coordenada escolhida sempre é possível deslocar a singularidade para a origem. Assim, o horizonte de Schwarzschild não é uma singularidade física, mas uma singularidade de coordenada, passível de ser removida por meio de uma transformação matemática contínua e diferenciável (difeomorfismo da variedade espaço-temporal). De fato, um observador em queda livre pode passar pelo horizonte $r = r_S$ sem notar qualquer peculiaridade que denote uma singularidade.

Uma forma mais elegante de remover a singularidade do horizonte de Schwarzschild é por meio da chamada coordenada do tipo *tortoise*, descrita em 1958 por Finkelstein [44]. Uma observação inte-

ressante é que, naquela mesma época, Finkelstein também propôs a concepção mais moderna do significado de horizonte de eventos em buracos negros. Por facilidade e conveniência, no que se segue, $c = 1$. Para entender mais facilmente a transformação a seguir, será usada uma versão 2-dimensional da métrica de Schwarzschild, sem perda de generalidade, graças à simetria esférica da solução (8):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (11)$$

As geodésicas nulas são descritas por meio de $ds^2/d\tau^2 = 0$, já que o elemento de linha ds^2 é um invariante. A variável τ é o parâmetro afim (vide [31, 32] para melhores explicações). Dessa forma, obtém-se

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \frac{dt^2}{d\tau^2} - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} \frac{dr^2}{d\tau^2} = 0, \quad (12)$$

ou ainda

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-2}. \quad (13)$$

Esta última relação denota como devem se inclinar os cones de luz em um sistema de coordenadas de Schwarzschild t, r . Quando $r \rightarrow \infty$, a taxa $dt/dr \rightarrow 1$ e portanto os cones de luz, como esperado, têm uma inclinação de 45° . No entanto, quando r vai se aproximando de r_S , a inclinação do cone de luz vai diminuindo. Integrando (13), chega-se às condições que satisfazem às geodésicas nulas de Schwarzschild:

$$t = \pm r^* + K, \quad (14)$$

onde

$$r^* = r + r_S \ln \left(\frac{r}{r_S} - 1\right), \quad (15)$$

e K é uma constante. Pode-se notar que

$$\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1}. \quad (16)$$

Um conjunto de coordenadas u, v que têm a direção de geodésicas nulas pode ser obtido a partir de

$$u = t - r^* \quad \text{e} \quad v = t + r^*, \quad (17)$$

de tal sorte que

$$dt = \frac{1}{2}(dv + du), \quad (18)$$

$$dr^* = \frac{1}{2}(dv - du). \quad (19)$$

Usando a eqs. (16) e (19), obtém-se que

$$dr = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dr^* = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) (dv - du). \quad (20)$$

Portanto, substituindo (18) e (20) em (11), obtém-se o elemento de linha em termos das coordenadas de geodésicas nulas

$$ds^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) (dudv), \quad (21)$$

que claramente remove a singularidade de coordenada presente em (11).

5. Diagramas de Kruskal-Szekeres

Outra transformação comumente reconhecida utilizada como forma de remover singularidades de horizontes dá origem às chamadas coordenadas de Kruskal-Szekeres, introduzidas em 1960 por Martin Kruskal e György Szekeres [45, 46]. As coordenadas citadas são obtidas, inicialmente, a partir das eqs. (15) e (19), em que se chega a

$$\frac{r}{r_S} + \ln \left(\frac{r}{r_S} - 1\right) = \frac{1}{2r_S}(v - u). \quad (22)$$

Usando o fato de que a equação acima pode ser reescrita como $\left(\frac{r}{r_S} - 1\right) = \frac{r}{r_S} \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) = \exp\left[-\frac{r}{r_S} + \frac{1}{2r_S}(v - u)\right]$, pode-se reescrever o elemento de linha (21) como

$$ds^2 = \frac{r_S}{r} e^{-r/r_S} \left[e^{(v-u)/2r_S} dudv\right]. \quad (23)$$

Um novo conjunto de coordenadas pode ser definido tal que

$$U = -e^{-u/2r_S} \quad \text{e} \quad V = e^{v/2r_S}, \quad (24)$$

de tal forma que o elemento de linha é reescrito como

$$ds^2 = -\frac{4r_S^3}{r} e^{-r/r_S} dU dV. \quad (25)$$

Uma última transformação pode ser feita

$$X = \frac{1}{2}(V + U) \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2}(V - U), \quad (26)$$

que leva (25) a

$$ds^2 = -\frac{2r_S^3}{r} e^{-r/r_S} (dT^2 - dX^2), \quad (27)$$

conhecida como métrica de Kruskal-Szekeres. A relação entre as antigas coordenadas t, r e as novas T, X pode ser assim resumida:

$$\left(\frac{r}{r_S} - 1\right) e^{r/r_S} = T^2 - X^2, \quad (28)$$

$$\frac{t}{r_S} = 2 \operatorname{arctgh} \left(\frac{T}{X} \right). \quad (29)$$

A métrica de Kruskal-Szekeres é inicialmente definida para $T < 0$ e $X > 0$, mas pode ser estendida também para $T > 0$ e $X < 0$ (via continuidade analítica). A antiga singularidade de coordenada $r = r_S$ agora corresponde a $T = 0$ e $X = 0$ (que corresponde a $U = 0$ e $V = 0$ nas coordenadas U, V). A singularidade física em $r = 0$ agora corresponde a $X^2 - T^2 = -1$ (ou $UV = -1$), que no sistema de coordenadas T, X corresponde às hipérboles nas regiões **II** e **III** do gráfico da Fig. 1.

Algumas observações importantes sobre as coordenadas de Kruskal, representadas na Fig. 1:

- De fato, não há mais o polo em $r = r_S$ e a função $r(U, V)$ é analítica em toda a região $UV > -1$. A região **I** é o espaço-tempo original de Schwarzschild, observável por instrumentos físicos. Na região **I**, a coordenada radial $r(U, V)$ é representada pelo conjunto de

Figura 1: Coordenadas de Kruskal-Szekeres. Aqui o horizonte $r = r_S$ está localizado em $T = +X$ ou $T = -X$ (ou equivalentemente em $V = 0$ ou $U = 0$). A singularidade física é denotada pelas hipérboles $UV = -1$. As coordenadas descritas no gráfico representam uma extensão analítica do espaço-tempo de Schwarzschild e aparentemente não há singularidade física em $r = r_S$.

hipérboles que assintotam os eixos positivos de U e V e a coordenada temporal $t(U, V)$ é descrita por retas tanto em U, V quanto em T, X (em T, X as retas, para um certo t fixo, são dadas por $T = [\operatorname{tgh}(t/2r_S)]X$). Um objeto material em queda livre na região **I** cruza as hipérboles $r(U, V)$ e finalmente se defronta com a reta $T = +X$ onde cruza o horizonte de eventos. Nesse caso, o objeto adentra a região **II** e cai na singularidade em $r = 0$. Qualquer sinal de luz emitido na região **II** permanecerá ali e cairá na singularidade. Dessa forma, a região **II** descreve o que comumente se denomina **buraco negro**.

- Enquanto U e V tiverem os mesmos sinais, p.ex., na região **I**, o tempo t terá valores reais. No entanto, quando $UV < 0$, como ocorre na região **II**, a coordenada t adquire uma parte imaginária. Isso significa que a região **II**, de fato, é não observável. Note que quando $r \rightarrow r_S$, i.e., na fronteira entre **I** e **II**, $T \rightarrow X$ e, da eq. (29), $t \rightarrow +\infty$. Em **I**, no limite da fronteira, $UV \rightarrow +0$. Após se cruzar a fronteira, quando $UV \rightarrow -0$, o que realmente ocorre é que t não se comporta mais como coordenada temporal, mas como coordenada espacial. A coordenada r passa a se comportar como coordenada temporal.
- A região **III** tem a mesma estrutura que a região **II**, mas com a coordenada T invertida. Isso significa que qualquer observador que se apresente em **III** se originou da singularidade e deixará a região **III** em direção à região **I**. A região **III** descreve o que é comumente denominado um **buraco branco**.
- A região **IV** tem o mesmo comportamento que a região **I**. De fato, o ponto (r, t) em uma região física do espaço-tempo é mapeado em dois pontos do plano (V, U) : os pontos (V, U) [região **I**] e $(-V, -U)$ [região **IV**]. Assim, haveria uma interpretação em que a região **II** conectaria dois universos, o universo **I** e o universo **IV**. Dessa forma o buraco negro em **II** poderia ser denominado de **buraco de minhoca** (*wormhole*). No entanto, buracos negros estáticos (de Schwarzschild) não têm trajetórias do tipo tempo que conectem os dois universos e esse *wormhole* seria puramente do tipo espaço.

- A singularidade em $r = 0$ não pode ser removida e se constitui como uma singularidade física real e é comparável a singularidades em equações da física, quando alguns parâmetros como o parâmetro temporal se torna um número complexo. Esta singularidade está de fato escondida a qualquer observação. O que lá ocorre é fisicamente irrelevante, já que nenhuma informação consegue enviar raios de luz para o exterior da região II.
- Efeitos quânticos ocorrerão nas bordas do horizonte de eventos. Alguns deles, mais conhecidos, são o efeito Unruh e a radiação Hawking. Estes não serão abordados no presente artigo.

6. Outros tipos de buracos negros: Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman

Até o momento foi estudado, por simplicidade, o caso de um buraco negro de Schwarzschild, um buraco negro estático. No entanto, existem outros casos possíveis, como a solução de Reissner-Nordström, a de Kerr e a de Kerr-Newman.

6.1. Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström foi obtida entre 1916 e 1918 por Reissner e Nordström para descrever o espaço exterior a uma configuração de matéria esfericamente simétrica, estática e carregada eletricamente. Neste caso deve-se usar uma combinação das equações de Einstein (campo gravitacional) e Maxwell (campo eletromagnético). As equações de Maxwell em espaços curvos devem utilizar, no lugar de diferenciações convencionais, as chamadas derivadas covariantes, que agregam a informação de geodésicas que se propagam em espaços curvos. A solução de Reissner-Nordström pode ser assim apresentada (aqui ainda será considerado que $c = 1$):

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (30)$$

com $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ e

$$A(r) = 1 - \frac{r_S}{r} + \frac{Q^2}{4\pi r^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{A}, \quad (31)$$

onde Q é identificada com a carga elétrica total da configuração e $r_S = 2GM$ é o raio de Schwarzschild. Se escolhido que $Q^2/4\pi < (GM)^2$ haverá duas

espécies de “horizontes”, representados pelas raízes da equação $A(r) = 0$:

$$r = r_{\pm} = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - Q^2/4\pi}. \quad (32)$$

Aqui novamente o que há são singularidades de coordenadas passíveis de remoção por meio de generalizações das coordenadas de Kruskal-Szekeres. O primeiro zero de $A(r)$, i.e.

$$r = GM + \sqrt{(GM)^2 - Q^2/4\pi}, \quad (33)$$

coincide com o horizonte de Schwarzschild no limite $Q \rightarrow 0$ e terá as mesmas propriedades que o horizonte de Schwarzschild. O segundo horizonte ocorre em

$$r = GM - \sqrt{(GM)^2 - Q^2/4\pi}, \quad (34)$$

e tende à singularidade física $r = 0$ no limite $Q \rightarrow 0$.

6.2. Soluções de Kerr e Kerr-Newman

O campo gravitacional de uma estrutura (como um planeta ou uma estrela, p.ex.) com alta rotação possui simetria não necessariamente esférica, mas possui simetria ao redor do eixo vertical z (i.e., simetria axial) no espaço 3-dimensional. A solução das equações de Einstein para esse caso foram obtidas por Roy Kerr em 1963 e para o caso mais completo com carga elétrica por Newman et al em 1965. Este último caso é mais conhecido como solução de Kerr-Newman, que é a solução estacionária mais geral para um buraco negro eletricamente carregado sem a presença de matéria. Em especial, a solução de Kerr-Newman é escrita da seguinte forma:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{Y}(dt - a\sin^2\theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{Y}[adt - (r^2 + a^2)d\phi]^2 + \frac{Y}{\Delta}dr^2 + Yd\theta^2, \quad (35)$$

com

$$Y = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad (36)$$

$$\Delta = r^2 - 2GMr + Q^2/4\pi + a^2, \quad (37)$$

onde a é um parâmetro livre que pode ser identificado com o momento angular J da estrutura como $a = J/GM$. Assim como na solução de Reissner-Nordström, os zeros da função $\Delta(r)$ não são singularidades verdadeiras, mas somente singularidades

de coordenada. A única singularidade física genuína ocorre quando $Y(r, \theta) = 0$, que assume este valor somente quando $r = \theta = 0$, i.e., a singularidade está localizada ao longo do equador da estrutura e em $r = 0$.

7. Diagramas de Penrose

É interessante encontrar sistemas de coordenadas que recubram todo o espaço-tempo de forma contínua e conexa, sem que haja a presença de singularidades de coordenada. Foram mostradas nas seções 4 e 5 formas de se obter tais sistemas de coordenadas para o caso do buraco negro de Schwarzschild. Em especial, as coordenadas de Kruskal-Szekeres é um bom exemplo disso. No entanto, será exemplificada aqui uma outra forma de obter coordenadas que evitem singularidades de coordenada. Essa forma é denominada “diagramas de Penrose”. Tal alternativa é na verdade a mais utilizada na literatura para lidar com problemas de relatividade geral para uma certa métrica específica. A estrutura causal dessa métrica pode ser verificada em uma diagrama de Penrose de forma bastante compacta. O que é feito em um diagrama de Penrose é basicamente mapear as coordenadas de Kruskal em funções que cresçam monotonamente e que sejam diferenciáveis. Um primeiro passo na construção de um diagrama de Penrose será entender o diagrama referente à métrica de Minkowski (para $c = 1$)

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 = (dr + dt)(dr - dt) + r^2 d\Omega^2. \quad (38)$$

A transformação a ser encontrada deve preservar os cones de luz e mapear todo o espaço infinito em uma porção finita de um diagrama plano de duas dimensões. Em primeiro lugar, as expressões que descrevem a propagação de informação em um cone de luz são dadas por

$$dt \pm dr = 0. \quad (39)$$

Assim, o cone de luz futuro pode ser descrito por uma transformação do tipo

$$Y^+ = F(r + t), \quad (40)$$

e o cone de luz passado por

$$Y^- = F(r - t). \quad (41)$$

É necessário mapear os pontos $r = +\infty$ ou $t = +\infty$ em uma função que resulte em uma quantidade finita para esses pontos. As funções do tipo tangente ou tangente hiperbólica tem essa propriedade. Dessa forma, pode-se escrever

$$Y^+ = \tanh(r + t) \quad \text{e} \quad Y^- = \tanh(r - t), \quad (42)$$

tal que o espaço-tempo inteiro é mapeado em um triângulo cujas bordas equivalem a $Y^+ = 1$ (sempre que $r + t \rightarrow \infty$) e a $Y^- = -1$ (sempre que $[r - t] \rightarrow -\infty$). A Fig. 2 apresenta esse mapeamento, denominado genericamente de mapa de Carter-Penrose ou diagrama de Carter-Penrose.

Não é tão trivial enxergar como o triângulo se forma. O que ocorre é que cada ponto de $Y^\pm = \tanh(r \pm t)$ é mapeado (projetado) em um plano (r, t) com os valores atribuídos a $Y^\pm$ para cada t e para cada r . Como exemplo, pode-se mostrar explicitamente como encontrar (a) as três pontas do triângulo, (b) uma curva com t variando de $-\infty < t < +\infty$ para um dado r fixo em $r = 1$ e (c) uma curva com r variando de $0 \leq r < +\infty$ para um t fixo em $t = 1$. Note que o espaço de Minkowski está em coordenadas polares e portanto r representa o raio de uma esfera e não tem valores negativos. Os valores de t podem assumir valores negativos somente porque também se está avaliando o cone de luz do passado. Nesse caso, pode-se assumir somente a função $Y = \tanh(r + t)$ e dizer que t pode variar com valores negativos a positivos ou então assumir Y^+ (cone positivo) e Y^- (cone negativo) com valores sempre positivos de t . A resolução do mapeamento proposto é então:

- Caso (a): Quando $t \rightarrow +\infty$ e $r = 0$, tem-se que $Y = Y^+ = +1$. Portanto, no eixo vertical positivo (positivo de t), marca-se o ponto +1. Quando $t \rightarrow -\infty$ e $r = 0$, tem-se que $Y = Y^- = -1$. Portanto, no eixo vertical negativo (negativo de t), marca-se o ponto -1. Quando $t = 0$ e $r \rightarrow +\infty$, tem-se que $Y = Y^+ = +1$ e portanto marca-se o ponto +1 no eixo horizontal positivo (positivo de r). Têm-se, portanto, as três pontas do triângulo como indicado na Fig. 2.
- Caso (b): Quando $r = 1$, haverá uma hipérbole saindo do ponto equivalente a $(r = 1, t = -\infty)$, que praticamente é o mesmo ponto $(r = 0, t = -\infty)$ (a ponta inferior do triângulo

Figura 2: Diagrama de Carter-Penrose para o caso do espaço de Minkowski em coordenadas polares. Os raios de luz são paralelos a $Y^+ = 1$. Note que as pontas do diagrama equivalem ao futuro distante (ponta de cima), ao passado distante (ponta de baixo) e espaço distante (ponta da direita). A reta que liga o futuro (passado) distante ao espaço distante correspondem a uma região do “tipo luz infinita”.

já calculada), passando pelo eixo horizontal no ponto fixo equivalente a $(r = 1, t = 0)$, até chegar à ponta superior do triângulo em $(r = 1, t = +\infty)$. A curva é também mostrada na Fig. 2.

- Caso (c): Quando $t = 1$, haverá uma semi-hipérbole saindo do ponto equivalente a $(r = 0, t = 1)$, que está localizado no eixo vertical positivo, até chegar ao ponto $(r = +\infty, t = 1)$ que praticamente é o mesmo ponto $(r = +\infty, t = 0)$ (i.e., a ponta direita do triângulo, já calculada no caso (a)). O mesmo ocorre quando se fixa $t = -1$; aqui, no entanto, a

semi-hipérbole parte do ponto $(r = 0, t = -1)$. A curva é também mostrada na Fig. 2.

As retas que ligam cada ponta do triângulo equivalem a valores em que r e t tendem simultaneamente ao infinito, o que equivale a dizer $Y^+ = +1$ ou $Y^- = -1$.

Para representar a solução de Schwarzschild em um diagrama de Penrose, basta utilizar as coordenadas T e X de Kruskal definidas na seção 5 e realizar a transformação descrita em (42). Os raios de luz (geodésicas nulas) viajam sempre paralelos a Y^+ e Y^- . Os infinitos do diagrama de Kruskal ($T \rightarrow \pm\infty$ ou $X \rightarrow \infty$) aparecem na Fig. 3 como pontos finitos, formando os vértices superior e inferior do diagrama. A hipérbole da singularidade física em $r = 0$ é comprimida a uma reta horizontal. Vimos que quando $r = r_s$, $T = \pm X$. Dessa forma, o horizonte é uma propriedade global que forma uma superfície do tipo luz que separa o espaço-tempo em duas regiões distintas (uma interior e outra exterior). Todos os eventos na região exterior (a região **I**) podem mandar sinais de luz na direção de $Y^+ = 1$, i.e., na direção futura assintoticamente infinita ($T = \infty$). Por outro lado, qualquer raio de luz que seja emitido na região interior (a região **II**) nunca alcançará nem a região **I** e nem a direção futura assintoticamente infinita ($T = \infty$). Em **II**, o destino de qualquer objeto que ali permaneça é a singularidade em $r = 0$. Ainda há duas outras regiões: a região **III** é o domínio que não pode ser acessado do infinito, mas pode escapar para o infinito e a região **IV** que é conectada à região **I** apenas por geodésicas do tipo espaço. Assim, o diagrama da Fig. 3 mostra quatro regiões do espaço-tempo, separadas por horizontes.

Por completeza, além dos diagramas que indicam a solução de Schwarzschild, também pode-se representar diagramas de Penrose para a solução de Reissner-Nordström e para a solução de Kerr. A Fig. 4 mostra o diagrama de Penrose para o buraco negro de Reissner-Nordström, que, como visto na seção 6.1, é um buraco negro estático carregado. Não há uma concordância definitiva entre relativistas sobre a interpretação do diagrama desses buracos negros. Observando a equação (32), chame $r_{\pm} = 1/2(r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2})$, onde $r_Q^2 = Q^2/4\pi$. Sabe-se que de fato eles possuem dois horizontes (r_+ e r_-) e sua condição extrema ocorre quando $2r_Q = r_s$, o que corresponde a um buraco negro extremo (i.e., um buraco prestes a perder o seu horizonte). Sabe-se também que quando $2r_Q > r_s$

Figura 3: Diagrama de Carter-Penrose para o caso da solução de Schwarzschild. São mostrados explicitamente os cones de luz (i.e., a direção dos raios de luz, com um ângulo de abertura de 45°) em cada uma das regiões do diagrama. Todos eles são paralelos a Y^+ (futuros) e Y^- (passados).

Figura 4: Diagrama de Carter-Penrose para o caso da solução de Reissner-Nordström, segundo a interpretação de [48]. A linha direcionada representa a queda do observador para cruzar o horizonte exterior do buraco negro.

haverá uma contradição à chamada “hipótese da censura cósmica”, que é uma conjectura formulada por Roger Penrose em 1969 que proíbe que buracos negros tenham uma singularidade nua (sem horizonte). Para entender melhor a hipótese da censura cósmica, vide, por exemplo, [47]. O diagrama apresentado na Fig. 4 representa uma interpretação mais flexível proposta pelo grupo de Andrew Hamilton de simulação computacional de buracos negros do JILA (Universidade do Colorado), um dos principais grupos atuais que tentam entender as propriedades de buracos negros computacionalmente [48]. Observe que aqui há a presença de um buraco de minhoca e um buraco branco na estrutura interior do diagrama.

Segundo a interpretação de Hamilton, o observador, uma vez ultrapassado o horizonte exterior r_+ tem acesso ao buraco negro e ao horizonte interior r_- . Ao se passar para o interior de um buraco negro de Reissner-Nordström através do horizonte interior, o observador acessa um buraco de minhoca e vê o passado infinito refletido numa singularidade de carga elétrica positiva. O observador então pode acessar o exterior de um novo universo através do horizonte exterior de um buraco branco. É uma interpretação bem conhecida da literatura que no entanto sofre algumas críticas por criar alguns paradoxos capazes de burlar as leis da termodinâmica.

O diagrama de Penrose para a geometria de Kerr ou Kerr-Newman, descritas na seção 6, para um buraco negro em rotação, é muito parecido com o diagrama para a geometria de Reissner-Nordström, vide [48]. Vale ressaltar que o objetivo da presente exposição é introduzir da forma mais simplificada possível como deduzir um diagrama de Penrose a partir de uma dada métrica. Os exemplos referentes a buracos negros mais complexos, como os de Kerr-Newman e mesmo o de Reissner-Nordström entram aqui como meras ilustrações para ressaltar a importância desses diagramas como ferramentas geométricas/matemáticas para a interpretação de certas propriedades relacionadas a singularidades e horizontes de eventos.

8. Considerações finais

Os diagramas de Carter-Penrose foram inicialmente publicados em um volume dos anais de uma conferência de matemática em 1964. Estes anais hoje se encontram perdidos, mas é possível ler o artigo original de Penrose (em inglês) a partir de uma republicação de 2011 na revista *General Relativity and Gravitation* [49].

No presente trabalho foram discutidos os principais aspectos relacionados à representação geométrica em diagramas de Carter-Penrose de algumas soluções em relatividade geral que descrevem buracos negros. A grande vantagem dessa técnica é que infinitos presentes em diagramas como os de Finkelstein ou de Kruskal (em que $T \rightarrow \pm\infty$) aparecem como pontos finitos formando os picos superiores e inferiores do diagrama. As hipérboles antes presentes na descrição da singularidade (em $r = 0$) podem ser comprimidas em linhas horizontais. O horizonte é uma propriedade global que forma superfícies do tipo luz as quais separam o espaço-tempo em regiões interiores e exteriores. Todos os eventos de regiões exteriores podem mandar sinais de luz para a superfície $Y = +1$. No entanto, qualquer sinal de luz emitido na região interior nunca alcança o futuro assintoticamente infinito.

Leituras complementares certamente devem ser feitas para se compreender melhor o que aqui foi tratado ou para se expandir o conhecimento para outros tipos de geometria. Infelizmente a maioria dos textos está em inglês. De forma mais didática, como já exposto na introdução, pode-se recorrer

ao texto de Pierre Luminet [8] ou de forma mais profunda ao texto de Chandrasekhar [17].

Agradecimentos

O autor agradece a Rita C. Anjos pelas discussões pertinentes sobre o assunto e especialmente ao revisor do manuscrito original pelas contribuições que certamente melhoraram o presente artigo em estilo e conteúdo.

Referências

- [1] A. Eckart and R. Genzel, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **284**, 576 (1997).
- [2] A.M. Ghez, S. Salim, S.D. Hornstein, A. Tanner, J.R. Lu, M. Morris, E.E. Becklin and G. Duchêne, *The Astrophysical Journal* **620**, 744 (2005).
- [3] M. Rees, *Annual Review in Astronomy and Astrophysics* **22**, 471 (1984).
- [4] L. Ferrarese and H. Ford, *Space Science Reviews* **116**, 523 (2005).
- [5] B. Louise Webster and P. Murdin, *Nature* **235**, 37 (1972).
- [6] R.A. Remillard and J.E. McClintock, *Annual Review in Astronomy and Astrophysics* **44**, 49 (2006).
- [7] B.P. Abbott, LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Physical Review Letters* **116**, 061102 (2016).
- [8] J.P. Luminet, *Black Holes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [9] S. Hawking, *Uma Breve História do Tempo* (Intrínseca, Rio de Janeiro, 2015).
- [10] S. Hawking, *Buracos Negros, Universos Bebês e Outros Ensaios* (Rocco, Rio de Janeiro, 1995).
- [11] S. Hawking, *O Universo Numa Casca de Noz* (Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 2013).
- [12] J.E. Horvath and P.S. Custodio, *Os Buracos Negros na Ciência Atual: Um Brevíssimo Manual Introdutório* (Livraria da Física, São Paulo, 2012).
- [13] D.A.T. Vanzella and G.E.A. Matsas, *Buracos Negros: Rompendo os Limites da Ficção* (Vieira & Lent, São Paulo, 2008).
- [14] J. Castiñeiras, L.C.B. Crispino e G.E.A. Matsas, *Scientific American Brasil*, **Outubro**, 50 (2004), disponível em <http://www.ift.unesp.br/users/matsas/horizonte.pdf>, acesso em 28/3/2016.
- [15] J. Castiñeiras, L.C.B. Crispino, G.E.A. Matsas e D.A.T. Vanzella, *Scientific American Brasil Edição Especial “Gênios da Ciência: Stephen Hawking”*, 32 (2006), disponível em <http://www.ift.unesp.br/users/matsas/buraconegro.pdf>, acesso em 28/3/2016.
- [16] J. Castiñeiras, L.C.B. Crispino, G.E.A. Matsas e D.A.T. Vanzella, *Scientific American Brasil Edição*

- Especial “Gênios da Ciência: Stephen Hawking”,** 70 (2006), disponível em <http://www.ift.unesp.br/users/matsas/informacao.pdf>, acesso em 28/3/2016.
- [17] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford, 1998).
- [18] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (Wiley, New York, 1983).
- [19] I.D. Novikov and V.P. Frolov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments* (Kluwer Academic, Dordrecht, 1998).
- [20] R.M. Wald, *Black Holes and Relativistic Stars* (The University of Chicago Press, Chicago, 1999).
- [21] UnivespTV, Canal online do youtube com aulas da USP sobre buracos negros e outros objetos, disponível em <http://www.youtube.com/user/univesptv>, acesso em 4/11/2015.
- [22] K. Thorne, *Warped spacetime, black holes, gravitational waves, and the accelerating universe*, Vídeo: “The Ernst Watson Lecture Series”, Caltech Digital Media Series (2005), disponível em <http://youtu.be/JXaukctamdQ>, acesso em 5/12/2015.
- [23] A. Einstein, in: *The Collected Papers of Albert Einstein*, edited by A.J. Kox, M.J. Klein and R. Schulmann (Princeton University Press, Princeton, 1997), v. 6. O artigo original foi publicado em alemão no Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, **part 2**, 844 (1915).
- [24] A. Einstein, in: *The Collected Papers of Albert Einstein*, edited by A.J. Kox, M.J. Klein and R. Schulmann (Princeton University Press, Princeton, 1997), v. 6. O artigo original foi publicado em alemão no Annalen der Physik **49**, 769 (1916).
- [25] H. Minkowski, *Raum und Zeit*, Physikalische Zeitschrift **10**, 75 (1909).
- [26] F.T. Falciano, Revista Brasileira de Ensino de Física **31**, 4308 (2009).
- [27] D. Soares, Revista Brasileira de Ensino de Física **35**, 3302 (2013).
- [28] G.E.A. Matsas, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 137 (2005).
- [29] D.W. Sciama, Rev. Mod. Phys. **36**, 463 (1964); Erratum Rev. Mod. Phys. **36**, 1103 (1964).
- [30] R.P. Feynman, F.B. Morinigo and W.G. Wagner, *Feynman Lectures on Gravitation* (Frontiers in Physics, New York, 2002).
- [31] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley & Sons, New York, 1972).
- [32] R.M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [33] B.F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [34] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation* (W. Freeman, New York, 1973).
- [35] K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **7**, 189 (1916).
- [36] S. Deser and J. Franklin, American Journal of Physics **73**, 261 (2005).
- [37] A. Tolish, *General Relativity and the Newtonian Limit - VIGRE Program Papers* (The University of Chicago Press, Chicago, 2010), disponível em <http://math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Tolish.pdf>, acesso em 29/10/2015.
- [38] J. Eisenstaedt, In: *Einstein and the History of General Relativity: Proceedings, 1986 Osgood Hill Conference (Einstein Studies, vol. 1)*, edited by D. Howard and J. Stachel (Birkhauser, Boston, 1989).
- [39] H.H. Voigt, *Karl Schwarzschild: Collected Works* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [40] S. Chandrasekhar, Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft **67**, 19 (1986).
- [41] A. Einstein, Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte **part 1**, 768 (1916).
- [42] W. Israel, in: *300 Years of Gravitation*, edited by S.W. Hawking e W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [43] J. Michell, Philosophical Transactions of the Royal Society **74** 35 (1784).
- [44] D. Finkelstein, Physical Review **110**, 965 (1958).
- [45] M. Kruskal, Physical Review **119**, 1743 (1960).
- [46] G. Szekeres, Publicationes Mathematicae Debrecen **7**, 285 (1960).
- [47] R. Santarelli, *Testando a Conjectura da Censura Cósmica em Buracos Negros*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Estadual de Campinas (2012), disponível em <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000898515>, acesso em 20/3/2016.
- [48] A.J.S. Hamilton, *Interior structure of rotating black holes. III. Charged black holes*, Physical Review D **84**, 124057 (2011).
- [49] R. Penrose, General Relativity and Gravitation **43**, 897 (2011).