

# Conhecimento Imperfeito, Custo de Otimização e Racionalidade Limitada: Uma Dinâmica Evolucionária de Ajustamento Nominal Incompleto\*

Jaylson Jair da Silveira<sup>†</sup>, Gilberto Tadeu Lima<sup>‡</sup>

**Sumário:** 1. Introdução; 2. Resenha da literatura; 3. Equilíbrio estático; 4. Uma dinâmica evolucionária; 5. Implicações de política monetária; 6. Considerações finais.

**Palavras-chave:** Conhecimento Imperfeito; Racionalidade Limitada; Dinâmica Evolucionária

**Códigos JEL:** Q41, Q42, Q43.

Elabora-se um modelo dinâmico evolucionário que proporciona microfundamentos ao ajustamento nominal incompleto. Mostra-se a emergência de equilíbrios evolucionários tanto de estratégia pura (sobrevivência somente de estratégias de fixação de preço plenamente racionais ou de racionalidade limitada) como de estratégia mista (sobrevivência de ambas as estratégias). Nos equilíbrios de estratégia pura a moeda é neutra, enquanto no equilíbrio de estratégia mista a moeda pode não ser neutra. Além disso, analisa-se a possibilidade de bifurcações no número de – e nas propriedades de estabilidade dos – equilíbrios evolucionários geradas pela política monetária.

*It is developed a dynamic evolutionary model that provides microfoundations to incomplete nominal adjustment. It is shown the emergence of both pure strategy evolutionary equilibria (either only fully rational or boundedly rational firms survive) and mixed strategy evolutionary equilibria (both firms survive). Whereas money is neutral in pure strategy equilibria, it is non-neutral in mixed strategy equilibria. It is also analyzed the possibility of bifurcations in the number of evolutionary equilibria or in their stability properties generated by monetary policy*

\*Os autores agradecem auxílios de pesquisa fornecidos pela FAPESP e pelo CNPq, bem como os comentários valiosos do parecerista anônimo, que em muito contribuíram para a melhoria do artigo. Naturalmente, os erros remanescentes são de nossa exclusiva responsabilidade.

<sup>†</sup>Professor do Departamento de Economia/FEARP/USP e membro do grupo de pesquisa COMPLEX-Economia e Complexidade/USP. Endereço eletrônico: jaylson@usp.br.

<sup>‡</sup>Professor do Departamento de Economia/FEA/USP e membro do grupo de pesquisa COMPLEX-Economia e Complexidade/USP. Endereço eletrônico: giltadeu@usp.br.



## 1. INTRODUÇÃO

As proporções nas quais uma variação na demanda agregada nominal se distribui no tempo entre uma variação no nível geral de preços e uma variação no produto real é um tema que tem sido extensa e intensamente analisado e debatido na teoria econômica. Na ocorrência de um ajustamento nominal completo, toda a variação na demanda agregada nominal terá sido absorvida sob a forma de uma variação de igual magnitude no nível geral de preços. Logo, a absorção de ao menos parte de uma variação na demanda agregada nominal sob a forma de uma variação no produto real, configurando-se assim a ocorrência de um ajustamento nominal incompleto na proporção direta dessa variação no produto real, necessariamente envolve alguma rigidez nominal do sistema de preços.

Por outro lado, um ajustamento nominal pode ser completado instantaneamente ou vir a ser eventualmente completado ao longo do tempo, com que a ocorrência de alguma variação no produto real em resposta a uma dada variação na demanda agregada nominal pode ser eventualmente transitória. No caso da ocorrência de um ajustamento nominal incompleto, controvérsias existem ainda em relação aos mecanismos subjacentes à rigidez de preços correspondente.

De maneira geral, pode-se dizer que a grande maioria dos economistas atualmente concorda que a política monetária, ao afetar a demanda agregada nominal, influencia o produto e o emprego, ao menos temporariamente, e determina a inflação, pelo menos no longo prazo. Ou seja, o ajustamento nominal dos preços desencadeado por uma variação monetária não é instantâneo, embora venha a se completar ao longo do tempo.

O presente artigo desenvolve um modelo dinâmico baseado no arcabouço de jogos evolucionários com o intuito de proporcionar uma microfundamentação da rigidez de preço e do consequente ajustamento nominal incompleto. Além disso, são derivadas e analisadas algumas implicações em nível de efetividade da política monetária desse ajustamento nominal incompleto microfundamentado a partir de princípios evolucionários.

## 2. RESENHA DA LITERATURA

Várias evidências empíricas corroboram a suposição de que o sistema de preços não é dotado da flexibilidade que garantiria ajustamentos nominais instantaneamente completos em resposta a variações monetárias. Por exemplo, (Taylor, 1999) resgata uma vasta literatura empírica, na sua maioria referente aos Estados Unidos, sobre o estabelecimento de preços e salários e sintetiza da seguinte maneira as conclusões que dela é possível extrair. Primeiro, os preços e salários não são perfeitamente flexíveis, tendo suas variações a mesma frequência média, qual seja, anual. Segundo, existe uma enorme heterogeneidade setorial no processo de estabelecimento de preços e salários. Terceiro, o estabelecimento de preços e salários não é um processo sincronizado, mas, sim, intercalado. Finalmente, a frequência das variações de preços e de salários varia positivamente com a taxa de inflação. Mais recentemente, (Bils, 2004), utilizando dados norte-americanos de cobertura mais ampla que os empregados em estudos anteriores, detectaram uma frequência maior nas variações de preços, embora uma frequência relativamente abaixo daquela que permitiria caracterizar o sistema de preços como flexível: metade dos preços tem uma duração de cerca de 4,3 meses. Com a exclusão de reduções de preços temporárias, de natureza promocional, metade dos preços passa a ter uma duração de cerca de 5,5 meses. Além disso, fornecendo novas evidências ao inferido em (Taylor, 1999), detecta-se a existência de diferenças dramáticas na frequência de variação dos preços.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Dado o propósito do modelo desenvolvido neste artigo, é válido reportar a observação correspondente de (Taylor, 1999, 1020-21): "One might hope that a model with homogeneous 'representative' price setting would be a good approximation to this more complex world, but most likely some degree of heterogeneity will be required to describe reality accurately".

Várias têm sido as tentativas de explicação microfundamentada do ajustamento nominal temporariamente incompleto, especialmente na literatura novo-keynesiana.<sup>2</sup> (Lucas, 1972, 1973) representou uma tentativa pioneira na tradição novo-clássica de explicação da não-neutralidade monetária, baseando-se no suposto de imperfeição informacional sobre os preços quando da ocorrência de um choque monetário, o que levaria produtores racionais a confundir flutuações no nível geral de preços com flutuações nos preços relativos.

Em seguida vieram contribuições baseadas no reajuste infrequente de salários – e, por extensão, de preços (em especial, (Fischer, 1977, Taylor, 1980)). Isso decorreria da existência de contratos salariais formais ou implícitos, com que variações na demanda agregada nominal viriam a ter impactos temporários sobre o produto real. Enquanto as versões destes autores estavam baseadas em regras de preço dependentes do tempo, nas quais os reajustes ocorrem somente em períodos pré-determinados, (Caplin, 1987) empregam uma regra de preço dependente do estado da economia, a chamada regra Ss, para demonstrar que a intercalação dos reajustes de preços pode não ser suficiente para gerar não-neutralidade monetária. De fato, os autores demonstram que mesmo que apenas uma fração das firmas venha a reajustar seus preços em resposta a um choque monetário, elas podem fazê-lo em uma extensão suficiente para provocar um ajustamento nominal completo do nível geral de preços. Porém, a maioria dos desenvolvimentos subsequentes em nível de impactos da política monetária que emprega um arcabouço de reajustes intercalados acabou optando por regras de reajuste dependentes do tempo. Nesse caso, a escolha tem freqüentemente recaído sobre a formulação de (Calvo, 1983), na qual o processo de chegada do período específico de reajuste é aleatório.

O ciclo seguinte, por seu turno, foi representado por contribuições baseadas na existência de custos de ajustamento de preços em mercados de concorrência monopolística (em especial, (Rotemberg, 1982, Akerlof, 1985); (Mankiw, 1985, Blanchard, 1987)). (Akerlof, 1985), por exemplo, desenvolvem um modelo no qual alguns formadores de preço seguem a regra de bolso de manter os preços constantes após um choque de demanda causado por uma variação na oferta monetária. A principal implicação do modelo é que as perdas das firmas que assim reagem a uma variação monetária são de segunda ordem, enquanto que o concomitante impacto sobre o produto é de primeira ordem. Em função da perda representada pelo desvio em relação à otimização completa ser de segunda ordem, os autores rotulam as firmas que assim se comportam de “quase racionais”.

Mais recentemente, (Mankiw, 2002) desenvolveram um modelo dinâmico de ajustamento de preços baseado no suposto de que a informação não se dissemina instantaneamente na população de firmas. Embora as firmas sejam racionais, a existência de custos de aquisição de informação ou de (re)otimização faz com que a difusão de informações sobre as condições macroeconômicas seja lenta. Na presença de custos dessa natureza, os preços, embora estejam sempre variando, nem sempre são estabelecidos com base em todas as informações existentes.<sup>3</sup> Daí, portanto, rotularem sua contribuição de *modelo de informação rígida* e não de *modelo de preço rígido*. Especificamente, supõem que a cada período uma fração da população atualiza seu conjunto informacional sobre o estado corrente da economia e computa preços ótimos com base nesse conjunto atualizado. O restante da população, por sua

<sup>2</sup>Na esteira de trabalhos anteriores de Robert Clower (repblicados em (Walker, 1986)) e (Leijonhufvud, 1968), a chamada abordagem do desequilíbrio (por exemplo, (Barro, 1971, Benassi, 1975, Malinvaud, 1977)) já havia analisado as implicações em termos de produção e emprego da ocorrência de preços fixos. Porém, a ausência de uma tentativa de microfundamentação desse comportamento rígido dos preços contribui para a reduzidíssima importância atribuída a essa abordagem na imensa literatura novo-keynesiana que viria a surgir na segunda metade dos anos 70.

<sup>3</sup>Como evidência empírica da importância desses custos, Mankiw & Reis citam os resultados reportados e analisados em Zbaracki *et alli* (2004), então em versão não publicada. De fato, Zbaracki *et alli* (2004) fornecem evidência microeconômica de que esses custos associados à (re)otimização são muito mais importantes que os tradicionais custos de menu. Em adição a custos físicos (custos de menu), identificam e mensuram três tipos de custos gerenciais (custos coleta de informações, tomada de decisão e comunicação) e dois tipos de custos de consumidor (custos de comunicação e negociação). Com base em dados de uma grande empresa manufatureira americana e de seus consumidores, detectam que os custos gerenciais (de consumidor) são mais de seis (vinte) vezes maiores que os custos de menu. No total, os custos de ajustamento de preço perfazem 1,22% das receitas e 20,03% da margem líquida da empresa.



vez, continua a estabelecer preços com base no conjunto informacional desatualizado. Assim, o modelo combina elementos do modelo de reajuste aleatório de (Calvo, 1983) com o modelo de informação imperfeita de (Lucas, 1973).

Convém destacar que a principal motivação dessa contribuição de (Mankiw, 2002) era desenvolver um modelo de ajustamento nominal incompleto alternativo ao modelo de rigidez de preço (então) padrão, que gerava uma curva de Phillips Novo-Keynesiana “voltada para frente” – ou seja, a inflação corrente depende de uma medida do hiato de produto corrente e da expectativa corrente de inflação futura (Roberts, 1995). A razão dessa busca de um modelo alternativo se devia ao fato de que essa curva de Phillips gera duas implicações que seriam questionáveis de uma perspectiva empírica, a saber, haveria persistência do nível de preços, mas não da taxa de inflação, e uma desinflação crível seria acompanhada de elevação de produto. De fato, a curva de Phillips derivada do modelo de informação rígida gera implicações mais plausíveis, posto que nela, como em (Fischer, 1977), as expectativas relevantes para a determinação da inflação corrente são as expectativas passadas das condições econômicas correntes – e não, como no modelo de preço rígido, as expectativas correntes das condições econômicas futuras.<sup>4</sup>

(Carroll, 2006), por sua vez, propõe uma nova e interessante abordagem do processo de formação de expectativas, baseada na epidemiologia, na qual somente um pequeno conjunto de agentes (previsores profissionais plenamente racionais) formula suas próprias expectativas, as quais então se espalham na população através dos veículos de notícias. Porém, nem todos os demais agentes dedicam atenção constante e cuidadosa ao noticiário macroeconômico. Supõe-se que esses agentes absorvem o conteúdo econômico das notícias de maneira probabilística, de uma maneira análoga à difusão de uma doença na população. Logo, leva algum tempo para que notícias de mudanças nas condições macroeconômicas venham a ser absorvidas pelos demais agentes. (Carroll, 2006) mostra que esse modelo tem um bom desempenho empírico na explicação da dinâmica das expectativas de inflação e desemprego. Segundo ele, enquanto (Mankiw, 2002) não fornecem microfundamentos explícitos para seu suposto de custos informacionais, seu modelo fornece uma microfundamentação explícita, baseada em modelos epidemiológicos, para uma equação expectacional agregada. Na verdade, o autor deriva uma equação de expectativas idêntica àquela proposta por (Mankiw, 2002), exceto que nesta última os agentes que atualizam expectativas o fazem após formar suas próprias previsões racionais sobre o curso futuro da macroeconomia, e não após se informar sobre as previsões dos profissionais através dos veículos de notícias.

Outra contribuição interessante nessa linha mais recente de modelos de imperfeição informacional foi desenvolvida por (Woodford, 2003), que se baseia no suposto de que o agente tem uma capacidade limitada de absorção de informação. Posto que os formadores de preços aprendem sobre a política monetária através desse canal de informação limitada, é como se observassem a política monetária com um erro aleatório e, assim, tivessem que resolver um problema de extração de sinal à (Lucas, 1973). Portanto, uma diferença básica entre as contribuições de (Mankiw, 2002) e de (Woodford, 2003) diz respeito à maneira pela qual a informação chega aos agentes. Enquanto nesta última os formadores de preço recebem a cada período um sinal com ruído sobre a política monetária, na primeira os formadores de preços adquirem informação perfeita sobre a política monetária em um dado período com uma certa probabilidade.<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Dado o propósito do modelo desenvolvido neste artigo, é válido reportar uma sugestiva observação de (Mankiw, 2002) sobre os microfundamentos do ajustamento nominal incompleto: “In the end, microfoundations for the Phillips curve may require a better understanding of bounded rationality” (p. 1317). A conclusão final dos autores é igualmente sugestiva: “Yet we must admit that information processing is more complex than the time-contingent adjustment assumed here. Models of bounded rationality are notoriously difficult, but it seems clear that when circumstances change in large and obvious ways, people alter the mental resources they devote to learning and thinking about the new aspects of the world. Developing better models of how quickly people incorporate information about monetary policy into their plans, and why their response is faster at some times than others, may prove a fruitful avenue for future research on inflation-output dynamics” (p. 1319).

<sup>5</sup>(Eichenbaum, 2004), por sua vez, interpretam o mecanismo de estabelecimento de preços à (Calvo, 1983) como uma forma de

Já na linha de abordagens evolucionárias para as quais o modelo desenvolvido neste artigo pretende contribuir, duas elaborações recentes merecem referência. A primeira delas é a contribuição de (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003), que fazem uso do arcabouço de jogos evolucionários para analisar os custos de produto associados a uma desinflação, sendo esta concebida como a transição entre dois equilíbrios estacionários. Na seqüência de uma contração monetária, enquanto uma fração das firmas passa imediatamente a adotar o novo preço ótimo, correspondente ao novo equilíbrio estacionário de expectativas racionais, a fração complementar continua a adotar a estratégia que era ótima para o comportamento monetário anterior. Porém, esse afastamento tem um custo que é proporcional à fração de firmas que passou a estabelecer seus preços conforme o novo comportamento monetário, com que uma dinâmica evolucionária de revisão de estratégias, a chamada dinâmica de replicação, faz com que essa fração complementar que continua a adotar a estratégia anterior tenda a desaparecer assintoticamente.<sup>6</sup> Assim, a população de firmas necessariamente convergirá para o novo equilíbrio estacionário de expectativas racionais, referente ao novo comportamento monetário, no longo prazo – vale dizer, todas as firmas virão a adotar a nova estratégia de Nash.

A segunda contribuição evolucionária que merece referência é aquela elaborada por (Saint-Paul, 2005).<sup>7</sup> Buscando apresentar uma alternativa explicativa da rigidez de preços, o autor analisa em que medida, se alguma, uma estratégia rígida de estabelecimento de preço se desenvolve como um resultado de equilíbrio em uma economia habitada por firmas imperfeitamente racionais. Admite-se que essas firmas não são capazes de computar sua regra de formação de preço ótima, tendo que experimentar regras de bolso. Entretanto, substituem regras que geram um payoff baixo por regras que geram um payoff elevado. As firmas são afetadas pelo comportamento de outras firmas posto que tal comportamento afeta o nível de preço agregado. Outro ingrediente importante do modelo é um tipo de interação local, que é uma externalidade produtiva local simples que implica que a função *payoff* de um agente depende do preço escolhido por um agente contíguo.

(Saint-Paul, 2005) demonstra então que embora a estratégia correspondente ao equilíbrio de expectativas racionais esteja entre aquelas que podem ser utilizadas pelas firmas, para um intervalo de parâmetros a economia não converge para aquele equilíbrio. Ao invés disso, a economia converge para um equilíbrio ao qual o nível geral de preços não reage na mesma proporção a choques monetários contemporâneos, como acontece no equilíbrio de expectativas racionais. Entretanto, a moeda será aproximadamente neutra no longo prazo caso a auto-correlação dos choques monetários seja alta. Sendo assim, a rigidez de preço deriva da combinação de dois fatores, a saber, uma baixa variância das inovações monetárias e um alto grau de interação local entre as firmas. Caso as inovações monetárias sejam muito voláteis, a economia converge então aproximadamente para o equilíbrio de expectativas racionais. Por sua vez, caso o grau de interação local entre as firmas deixe de existir, a economia também converge para o equilíbrio de expectativas racionais.

Portanto, o modelo desenvolvido a partir da seção seguinte compartilha com as contribuições de (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003) e (Saint-Paul, 2005) a tentativa de derivação da rigidez de preços e das implicações do ajustamento nominal incompleto em termos de efetividade da política monetária a partir de princípios evolucionários.<sup>8</sup> Como em (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003) utilizamos a dinâmica de replicação, baseada no princípio de seleção de que estratégias com desempe-

---

capturar a resposta das firmas a vários custos de variação de preço. Na presença desses custos, as firmas otimizam plenamente seus preços apenas periodicamente, seguindo regras simples de reajuste nos demais períodos. Os tipos de custos associados à otimização que os autores têm em mente são custos de coleta de informações, tomada de decisão, negociação e comunicação, que seriam diferentes dos custos de menu – que se aplicariam a todos os preços. Como evidência empírica desses custos de otimização, os autores citam Zbaracki *et alli* (2004), cujos principais resultados já foram reportados na nota 3.

<sup>6</sup>De acordo com essa dinâmica, estratégias que apresentam desempenho inferior à média têm sua utilização reduzida.

<sup>7</sup>Embora o autor anuncie que seu artigo é o primeiro a lidar com rigidez do nível de preço com base em um arcabouço de evolução e aprendizado adaptativo, vale fazer referência a (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003).

<sup>8</sup>De nossa parte, o modelo elaborado nas próximas seções também compartilha da visão de George Akerlof de que, como o comportamento individual estritamente racional não consegue explicar uma série de violações do equilíbrio geral competitivo,



nho relativo melhor que a média têm sua utilização expandida. Diferentemente dele, porém, em nosso modelo nem toda a informação necessária para o cálculo do preço ótimo se encontra disponível livremente, ou seja, há um custo para adquiri-la. Logo, enquanto no modelo desenvolvido em (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003), como visto anteriormente, o único custo considerado é aquele incorrido pelas firmas que continuam a adotar a estratégia que era ótima à luz do comportamento monetário anterior, o modelo desenvolvido neste artigo considera, além daquele, também o custo incorrido pelas firmas na computação do preço ótimo.

O modelo proposto por (Saint-Paul, 2005), por seu turno, utiliza uma metodologia computacional baseada em agentes e, portanto, seus resultados são obtidos por simulações numéricas. Tal metodologia permite que o autor trate de uma gama extensa de regras de bolso de determinação de preços, bem como explore explicitamente os efeitos da interação local entre as firmas e de um processo específico para a realização monetária, um AR(1), sobre a rigidez de preços e o ajustamento nominal incompleto. Em nosso caso, utilizamos a estratégia de modelagem padrão baseada em equações diferenciais ordinárias e deduzimos resultados a partir da análise qualitativa do retrato (linha) de fase da dinâmica evolucionária e da linearização em torno dos equilíbrios.

Cumpra esclarecer, porém, que o processo de escolha entre pagar ou não pagar o custo associado à otimização é ele próprio concebido no compasso deste artigo como sendo limitadamente racional e evolucionário, e não como sendo derivado de um cálculo preciso de otimização.<sup>9</sup> A razão é que conceber o processo de escolha entre pagar ou não pagar o custo associado à otimização como sendo ele próprio sujeito ao cálculo otimizador nos faria deparar com um problema de auto-referência ou regressão infinita (Conlisk, 1996). Afinal, para otimizar é necessário obter um conhecimento perfeito, o que tem custos. Sendo assim, a otimização correspondente não é ótima quando tal custo é ignorado. Eis a contradição: para não ignorá-lo é necessário incluir o custo de otimização na própria otimização, porém não é possível saber o custo da obtenção do conhecimento perfeito antes de conhecê-lo perfeitamente. Como esclarecido por (Knudsen, 1993), o problema de auto-referência associado à tentativa de explicação da forma pela qual as firmas adquirem o conhecimento necessário ao exercício da racionalidade plena (ou substantiva, na expressão de Herbert Simon) já havia sido apontado na década de 1930 por Friedrich Hayek (1937) e Oskar Morgenstern (1935). Segundo eles, em qualquer sistema interativo as firmas basearão sua decisão parcialmente em expectativas ou previsões sobre o que farão as demais firmas. Para tomar decisões plenamente racionais, porém, as firmas deverão justificar essas expectativas ou previsões como sendo racionais. Eis a natureza auto-referencial do problema: para justificar suas expectativas como adequadamente fundamentadas, um agente deve ter conhecimento suficiente sobre o conhecimento dos demais, o qual depende, por sua vez, do conhecimento que eles têm do conhecimento daquele agente. E assim por diante.

Vale lembrar que o problema da existência de custos associados ao cálculo de otimização foi discutido sistematicamente pela primeira vez por (Marschak, 1954, Stigler, 1961). Na elaboração desses autores, um agente racional, por meio de um cálculo marginal de segunda ordem, poderia vir a não optar por uma decisão ótima em função dos custos envolvidos na obtenção das informações necessárias para tanto. Contudo, como asseverou (Winter, 1975), esse procedimento esbarra em um problema de auto-referência:

---

é necessário o desenvolvimento de uma macroeconomia comportamental. Nesta, por exemplo, regras de bolso adotadas na formação de preços não são fruto de um cálculo preciso de otimização. Em uma versão revista de sua conferência de recebimento do Prêmio Nobel de 2001, (Akerlof, 2002, p. 427-8; ênfase original) assim colocou: "If there is any subject in economics which should be behavioral, it is macroeconomics. I have argued in this lecture that reciprocity, fairness, identity, money illusion, loss aversion, herding, and procrastination help explain the significant departures of real-world economies from the competitive, general-equilibrium model. The implication, to my mind, is that macroeconomics must be based on such behavioral considerations". A nosso juízo, a teoria de jogos evolucionários, embora não citada por Akerlof, oferece um aporte analítico-formal frutífero ao desenvolvimento de uma macroeconomia comportamental.

<sup>9</sup>Como bem colocado por (Conlisk, 1996), "[m]odels of bounded rationality adhere to a fundamental tenet of economics, respect for scarcity. Human cognition, as a scarce resource, should be treated as such" (p. 692).

“Consider the costs of a particular optimization in relation to the scope of the optimization itself. Either they are neglected – in which case we label this particular example a ‘suboptimization’ – or they are not – in which case we may label this a ‘true’ optimization or ‘superoptimization’ provided no other costs or considerations have been neglected. The latter alternative – the optimization whose scope covers all consideration including its own costs – sounds like it may involve the logical difficulties of self-reference” (p. 83).<sup>10</sup>

(Binmore, 1987, 1988) distingue entre duas justificativas alternativas da análise de equilíbrio que têm sido defendidas em teoria dos jogos: uma educativa (ou deliberativa), que se baseia na habilidade das firmas de alcançar o equilíbrio através de um raciocínio adequado. Como as firmas são plenamente racionais, eles podem sempre prever corretamente o (e responder otimamente ao) comportamento dos oponentes; outra evolutiva, que se baseia na possibilidade de que firmas limitadamente racionais alcancem o equilíbrio por meio de algum processo de ajustamento.<sup>11</sup> O modelo aqui proposto, bem como os modelos de (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003) e (Saint-Paul, 2005), seguem a justificativa educativa usando dinâmicas evolucionárias. Como já destacado, enquanto (Saint-Paul, 2005) trabalha com uma dinâmica evolucionária computacional baseada em agentes, (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003) e o presente artigo empregam uma estratégia de modelagem baseada em equações diferenciais ordinárias.

### 3. EQUILÍBRIO ESTÁTICO

(Blanchard, 1987) desenvolvem um modelo macroeconômico completo, embora estático, no qual a concorrência monopolística desempenha um papel fundamental na determinação do preço ótimo das firmas. O modelo incorpora formalmente a moeda e pode ser utilizado para demonstrar o impacto de uma variação na demanda agregada nominal, aproximada pela oferta monetária. Tomaremos como base este modelo de estabelecimento de preços em uma economia composta por um *continuum* de firmas, porém dividindo-as em dois grupos.

Em cada período há uma fração  $k$  da população de firmas, que pode variar de um período para outro, que estabelecem seus preços sem conhecerem todos os preços da economia, ou seja, são firmas de racionalidade limitada, pois decidiram não pagar o custo necessário para conhecer plenamente a estrutura de preços relativos. A fração restante,  $1 - k$ , é formada pelas firmas plenamente informadas que incorreram em um custo para obter as informações necessárias. Estas últimas, seguindo (Droste, E., 2002, p. 244), serão denominadas firmas Nash.<sup>12</sup>

Em tal economia, o nível geral de preços  $P$  é a média geométrica dos preços praticados pelas firmas Nash,<sup>13</sup>  $P_n$ , e o preço médio,  $P_b$ , estabelecido pelas firmas de racionalidade limitada, ou seja:

$$P = P_b^k P_n^{1-k}, \quad (1)$$

<sup>10</sup>Ou como já havia suspeitado Savage: “It might...be stimulating, and it is certainly more realistic, to think of consideration or calculation as itself an act on which the person must decide. Though I have not explored this possibility carefully, I suspect that any attempt to do so leads to fruitless and endless regress” (1954, p. 30).

<sup>11</sup>De maneira mais ampla, (Bergh, 2003) resenham uma série de debates e desenvolvimentos recentes em biologia evolucionária (especialmente sobre temas como seleção individual vs seleção de grupo e equilíbrios pontuados) que são relevantes para o entendimento da evolução econômica, sugerindo, entre outras coisas, que o comportamento agregado não pode ser explicado apenas com base em cálculos de otimização individual.

<sup>12</sup>Estes autores sugerem denominar uma regra dessa natureza como regra de Nash, porque esta supõe um comportamento racional com respeito à crenças e coordenação. Os agentes Nash são formadores de preços com capacidade de previsão perfeita, conhecendo no início do período todos os preços. (Simonsen, 1983, 1988), por sua vez, já havia observado que muito embora os agentes estejam em condições de conhecer o novo preço ótimo relativo ao equilíbrio de Nash após um choque monetário, podem estar incertos quanto aos demais jogadores virem a adotar a mesma estratégia. Em decorrência, segundo ele, os agentes podem vir a adotar estratégias *maxmin* que garantem ao menos a obtenção de um *payoff* mínimo na pior circunstância possível.

<sup>13</sup>Que conhecem o verdadeiro valor de  $P$ .



na qual

$$P_b = \frac{1}{k} \int_0^k P_{b,i} di \quad (2)$$

é obtido a partir dos preços fixados pelas firmas de racionalidade limitada, denotados por  $P_{b,i}$  com  $i \in [0, k]$ , a partir de informações disponíveis livremente.

Tomando como referência o modelo de determinação de preços de (Blanchard, 1987), os preços relativos ótimos estabelecidos por cada tipo de firma podem ser expressos como segue:

$$P_n = \alpha P^a M^{1-a}, \quad (3)$$

$$P_{b,i} = \alpha (\varepsilon_i P)^a M^{1-a} = \varepsilon_i^a P_n, \quad (4)$$

para todo  $i \in [0, k]$ , com  $\alpha > 0$  e  $0 < a < 1$  constantes. Tais preços dependem, como de praxe, do estoque nominal de moeda  $M$ , bem como do nível geral de preços observado, que é o próprio  $P$  para qualquer firma Nash e  $\varepsilon_i P$  para a  $i$ -ésima firma de racionalidade limitada. As constantes paramétricas  $\varepsilon_i$ 's representam, então, um ruído na observação do nível geral de preços por parte das firmas que se baseiam única e tão somente nas informações disponíveis livremente.

Suporemos que há uma distribuição contínua dos ruídos  $\varepsilon_i$ 's, mais precisamente:

$$\varepsilon_i = \varepsilon(i), \text{ com } 0 < \varepsilon(i) < \infty \text{ e } \varepsilon'(i) \geq 0 \text{ para todo } i \in [0, k]. \quad (5)$$

A partir das premissas (1)-(5) podemos determinar os preços fixados pelos dois tipos de firmas. Introduzindo (1) em (3), obtemos:

$$P_n = (\alpha P_b^{ak} M^{1-a})^{\frac{1}{1-a(1-k)}}. \quad (6)$$

Introduzindo agora (5) em (4) e a função daí resultante em (2), obtemos:

$$P_b = \mu(k) P_n, \quad (7)$$

sendo  $\mu(k)$  o desvio médio com relação ao preço ótimo, definido como:

$$\mu(k) \equiv \begin{cases} \varepsilon(0)^a & \text{se } k = 0, \\ \frac{1}{k} \int_0^k \varepsilon(i)^a di & \text{se } 0 < k \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Cabe aqui ressaltar duas propriedades dessa função, que serão úteis posteriormente. Como (5) é contínua em  $(0, 1]$ , a função (8) é contínua nesse intervalo semi-aberto. Ademais, usando a regra de L'Hôpital, inferimos que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{1}{k} \int_0^k \varepsilon(i)^a di = \varepsilon(0)^a,$$

tal que (8) é contínua em  $k = 0$ . Portanto,  $\mu(k)$  é contínua em qualquer ponto no espaço de estados  $[0, 1]$ . Além da continuidade, outra propriedade relevante de (8) é a de que essa função é não-decrescente para todo  $k \in (0, 1]$ , pois<sup>14</sup>

$$\mu'(k) = \frac{1}{k} [\varepsilon(k)^a - \mu(k)] \geq 0, \text{ para todo } k \in (0, 1]. \quad (9)$$

<sup>14</sup>Como a função (5) é não-decrescente, vale a seguinte desigualdade  $k\varepsilon(k)^a \geq \int_0^k \varepsilon(i)^a di$ , da qual decorre o sinal da expressão (9).

Usando (6) e (7), obtemos o preço fixado pelas firmas Nash como uma função da distribuição de estratégias de estabelecimento de preços e da realização monetária:

$$P_n = \mu(k)^{\frac{ak}{1-a}} \alpha_0 M, \text{ com } \alpha_0 \equiv \alpha^{\frac{1}{1-a}} \quad (10)$$

Como destacam (Droste, E., 2002, p. 244), a estratégia de fixação de preços das firmas Nash é algo como um equilíbrio de Nash em um jogo de estabelecimento de preços que é ‘contaminado’ com algumas firmas de racionalidade limitada.

Finalmente, substituindo (10) em (7), também podemos expressar a escolha média das firmas de racionalidade limitada como uma função da distribuição de estratégias de estabelecimento de preços e da realização monetária:

$$P_b = \mu(k)^{\frac{1-a(1-k)}{1-a}} \alpha_0 M \quad (11)$$

Em suma, tanto as firmas Nash como as firmas de racionalidade limitada estabelecem seus preços como múltiplos do preço que seria fixado no equilíbrio de Nash simétrico do jogo de estabelecimento de preços,  $\alpha_0 M$ .

Dadas a definição (1) e as regras de fixação de preços (10) e (11), o nível geral de preços é dado por:

$$P = \mu(k)^{\frac{k}{1-a}} \alpha_0 M \quad (12)$$

O nível geral de preços é, também, um múltiplo do preço de equilíbrio de Nash. O fator de multiplicação depende da distribuição das estratégias de formação de preços na população de firmas. Caso a população fosse composta unicamente de firmas Nash ( $k = 0$ ) o nível geral de preços seria o de equilíbrio de Nash. Quando há uma fração de firmas de racionalidade limitada ( $k > 0$ ) só não haverá viés no processo de formação de preços (i.e.  $P = \alpha_0 M$ ) se  $\mu(k) = 1$ , possibilidade improvável (de medida nula). Se há um viés no processo de formação de preços na presença de firmas de racionalidade limitada, ou seja, se  $\mu(k) \neq 1$  para todo  $k \in (0,1]$ , então quanto maior a fração de firmas de racionalidade limitada maior será o desvio do nível geral de preços com relação ao valor de equilíbrio de Nash  $\alpha_0 M$ .<sup>15</sup>

Para análises posteriores faz-se necessário destacarmos os seguintes resultados de estática comparativa:

$$\frac{\partial P}{\partial k} = \left( \frac{1}{1-a} \right) \left[ \frac{k\mu'(k)}{\mu(k)} + \ln\mu(k) \right] P, \quad (13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial M} \frac{M}{P} = 1. \quad (14)$$

Como  $\mu'(k) \geq 0$  para todo  $k \in (0,1]$ , o sinal da derivada (13) será estritamente positivo em  $k \in (0,1]$  se  $\mu(k) > 1$ , porém indefinido caso  $\mu(k) < 1$ . No primeiro caso, as firmas de racionalidade limitada em média superestimam seus preços, cf. equação (7). Quando isto ocorre uma expansão da fração de firmas Nash (redução de  $k$ ) diminui o nível geral de preços para uma dada realização monetária. Este resultado se mantém mesmo no segundo caso, desde que  $\mu(k)$  seja suficientemente próximo de um e a função (5) não seja constante, ou seja, nem todas as firmas de racionalidade limitada fixem o mesmo preço.

#### 4. UMA DINÂMICA EVOLUCIONÁRIA

(Ponti, 2000) resenha a literatura que utiliza a estratégia de modelagem de dinâmicas evolucionárias via equações diferenciais ordinárias para descrever a maneira pela qual firmas limitadamente racionais ajustam seu comportamento em resposta a um ambiente em modificação. A resenha é estruturada em torno de três questões básicas. A primeira diz respeito a *onde* se dá o aprendizado, e o autor mostra que,

<sup>15</sup>Sendo um desvio para baixo se  $\mu(k) < 1$  e para cima se  $\mu(k) > 1$ .



nas dinâmicas evolucionárias em questão, o ambiente no qual os agentes tomam decisões e aprendem é modelado como um jogo infinitamente repetido, cujo conjunto de ações (comportamentos) possíveis é igual ao próprio conjunto de estratégias de cada etapa do jogo repetido. Ao responder a segunda questão, que diz respeito *ao que e de onde* se dá o aprendizado, Ponti interpreta as dinâmicas evolucionárias em tempo contínuo como modelos de aprendizagem, classificando-os em três grupos: modelos de aprendizagem individual, modelos de aprendizagem social e modelos de aprendizagem de crenças. No primeiro tipo, sucessos e falhas do agente influenciam diretamente suas escolhas de estratégias (como em dinâmicas de *satisficing*). No segundo tipo de modelo, sucessos e falhas dos outros agentes afetam a probabilidade de escolhas de estratégias de cada agente (como em dinâmicas de imitação). Finalmente, no terceiro tipo de modelo, a experimentação afeta somente as crenças. Com relação à terceira questão, que se refere a como a memória afeta o aprendizado, Ponti destaca que os agentes não têm memória, de maneira que o processo de ajustamento é determinado exclusivamente pelo estado corrente do sistema. Como em (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003), formalizaremos os fluxos dos agentes entre diferentes estratégias como uma *dinâmica de replicação em tempo contínuo* (Weibull, 1995, cap. 3), uma subclasse das dinâmicas evolucionárias em tempo contínuo. Não tentaremos aqui derivá-la como um modelo de aprendizagem individual, social ou de crença, embora o princípio de seleção sobre o qual tal dinâmica se baseia reflita o resultado agregado de um processo de aprendizagem implícito.

Adotaremos a hipótese de que as firmas incorrem em uma perda quadrática ao não estabelecerem otimamente seus preços. Assim, usando (10) e (11), a perda média de um agente de racionalidade limitada pode ser expressa como segue:

$$L_b(k) \equiv -\beta(P_b - P_n)^2 = -\beta \left[ (\mu(k) - 1) \mu(k)^{\frac{ak}{1-a}} \alpha_0 M \right]^2, \quad (15)$$

na qual  $\beta > 0$  é uma constante. A função (15) pode ser tomada como o *payoff* esperado da estratégia representada por *não incorrer no custo de atualização do conjunto informacional*. Como já demonstrado, a função  $\mu(k)$  é contínua no intervalo  $[0,1]$ , de maneira que  $L_b(k)$  também é contínua nesse intervalo.

Por sua vez, as firmas Nash, por adotarem o preço ótimo  $P^*$ , não incorrem em perda por desviarem deste preço. Entretanto, para encontrarem o preço ótimo arcam com um custo de prever perfeitamente o nível geral de preços. Pela própria natureza da informação envolvida, que é o conhecimento da distribuição de estratégias de fixação de preços, é razoável supor que este custo varie com esta distribuição. Formalmente, podemos captar este efeito supondo que o custo de prever perfeitamente o nível geral de preços é uma função continuamente diferenciável da fração de firmas de racionalidade limitada,  $c(k)$ , tal que  $c(k) > 0$  para todo  $k \in [0,1]$ . Assim, a perda total das firmas Nash é dada por:

$$L_n(k) = -c(k). \quad (16)$$

Em outros termos, este é o *payoff* esperado da estratégia representada por *incorrer no custo de atualização do conjunto informacional*.

Tomando (15) e (16) como os *payoffs* esperados das estratégias em questão, podemos então estabelecer a seguinte dinâmica de replicação:

$$\dot{k} = k \left\{ L_b(k) - [kL_b(k) + (1-k)L_n(k)] \right\} = k(1-k)\psi(k) \quad (17)$$

na qual

$$\psi(k) \equiv L_b(k) - L_n(k) = c(k) - \beta \left[ (\mu(k) - 1) \mu(k)^{\frac{ak}{1-a}} \alpha_0 M \right]^2 \quad (18)$$

é o diferencial de perdas entre as estratégias, sendo uma função contínua em todo o espaço de estados  $[0,1]$ , pois as perdas (15) e (16) são contínuas neste espaço.

A expressão entre colchetes em (17) é a perda média da economia como um todo. Portanto, a fração de firmas de racionalidade limitada tende a se expandir se o módulo da perda média destas firmas

for inferior ao módulo da perda média da economia. Visto de outra forma, a proporção de firmas de racionalidade limitada aumenta caso o módulo da perda esperada destas firmas seja menor do que o custo de adquirir a informação necessária para estabelecer o preço ótimo, isto é, se  $\psi(k) > 0$ .

Passemos agora à análise de existência de equilíbrios da dinâmica de replicação (17). Suponhamos que os diferenciais de perdas nos pontos pertencentes à fronteira do espaço de estados não sejam nulos, ou seja:

$$\psi(0) = c(0) - \beta \left[ (\varepsilon(0)^a - 1) \alpha_0 M \right]^2 \neq 0; \mathbf{e} \quad (19)$$

$$\psi(1) = c(1) - \beta \left[ (\mu(1) - 1) \mu(1)^{\frac{1-a}{1-a}} \alpha_0 M \right]^2 \neq 0. \quad (20)$$

Sob tais premissas segue que há dois equilíbrios de estratégia pura, a saber,  $k = 0$  e  $k = 1$ . No equilíbrio caracterizado pela inexistência de firmas que adotam a estratégia de racionalidade limitada ( $k = 0$ ) o nível geral de preços, cf. eq. (12), é  $P = \alpha_0 M$ , ou seja, é o preço do equilíbrio de Nash simétrico do jogo de estabelecimento de preços. Todavia, no equilíbrio de estratégia pura caracterizado pela extinção da estratégia representada por *incorrer no custo de atualização do conjunto informacional* ( $k = 1$ ) o nível geral de preços é  $P = \mu(1)^{\frac{1}{1-a}} \alpha_0 M$ , diferente do preço estabelecido no equilíbrio de Nash para  $\mu(1) \neq 1$ .

Considerando a dinâmica de replicação (17), um equilíbrio de estratégia mista, no qual existem simultaneamente firmas de ambos os tipos, é definido implicitamente pela condição  $\psi(k) = 0$ , de maneira que um equilíbrio de estratégia mista é um valor  $k^* \in (0,1)$  tal que  $\psi(k^*) = 0$ .

No que segue, será conveniente definirmos uma *economia regular*.<sup>16</sup> Diremos que uma economia é regular se satisfazer as seguintes condições:

- (a) Caso todos os agentes estejam atualizando seu conjunto informacional haverá incentivo para desviar desse comportamento,  $|L_b(0)| < c(0)$ ;
- (b) Caso nenhum agente busque atualizar seu conjunto informacional será vantajoso passar a fazê-lo,  $c(1) < |L_b(1)|$ .

Em uma economia regular, portanto, os diferenciais de perdas nos pontos pertencentes à fronteira do espaço de estados são tais que haverá incentivo para se desviar da estratégia de fixação de preços predominante, ou seja:

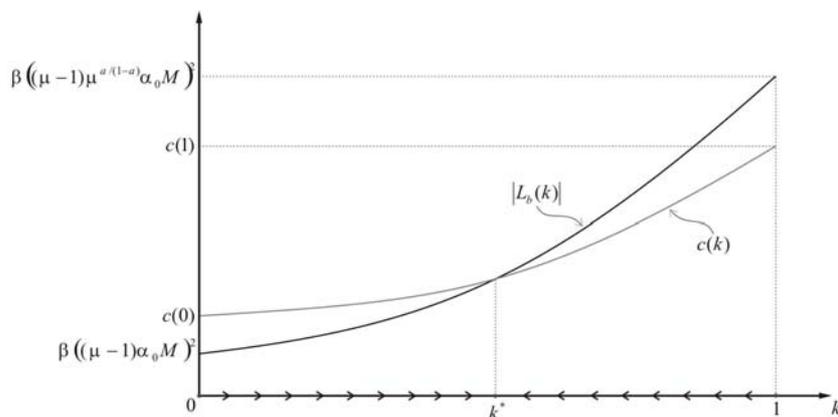
$$\psi(0) = c(0) - \beta \left[ (\varepsilon(0)^a - 1) \alpha_0 M \right]^2 > 0; \mathbf{e} \quad (21)$$

$$\psi(1) = c(1) - \beta \left[ (\mu(1) - 1) \mu(1)^{\frac{1-a}{1-a}} \alpha_0 M \right]^2 < 0. \quad (22)$$

Dadas as desigualdades anteriores e considerando que a função  $\psi(k)$  é contínua no intervalo fechado  $[0,1]$ , inferimos, aplicando o teorema do valor intermediário, que existe pelo menos um equilíbrio de estratégia mista  $k^*$  em uma economia regular.

Tratemos agora da estabilidade dos equilíbrios de estratégia pura deduzidos anteriormente. Como  $k(1 - k) > 0$  para todo  $k \in (0,1)$ , o sinal do diferencial de perdas  $\psi(k)$  determina o sinal da taxa de

<sup>16</sup>A teoria das economias regulares, cujo artigo seminal é (Debreu, 1970), representa uma tentativa de fazer avançar a teoria do equilíbrio geral na ausência de um resultado de unicidade satisfatório. Uma economia regular é uma economia com um número finito de equilíbrios, cada um deles localmente único e respondendo de maneira contínua a pequenas mudanças paramétricas. Logo, esses equilíbrios se prestam a análises de estática-comparativa, pois são robustos – vale dizer, não são destruídos por uma pequena mudança paramétrica. No contexto do presente artigo, por sua vez, empregamos o conceito de economia regular para demonstrar que, em uma economia desse tipo, todo  $k$  inicial no interior do espaço de estados converge para um equilíbrio de estratégia mista. Agradecemos ao parecerista anônimo que nos sugeriu essa categorização.

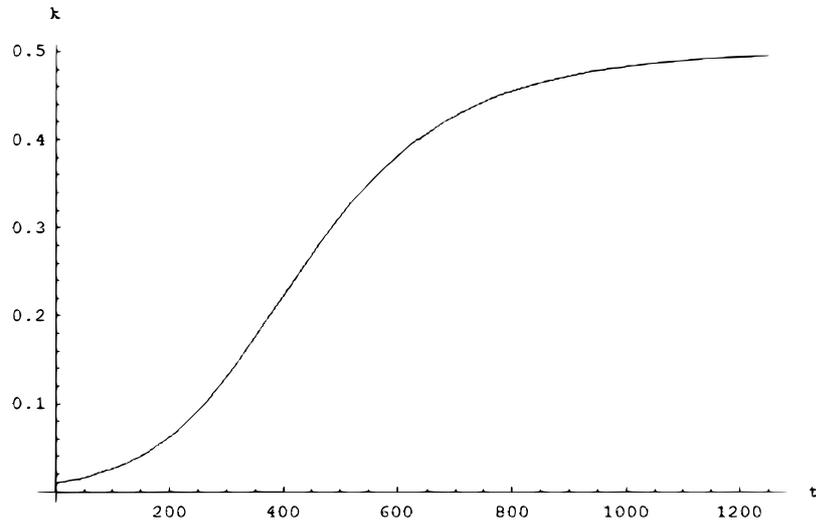


**Figura 1** – Retrato de fase de uma economia regular com um único equilíbrio de estratégia mista.

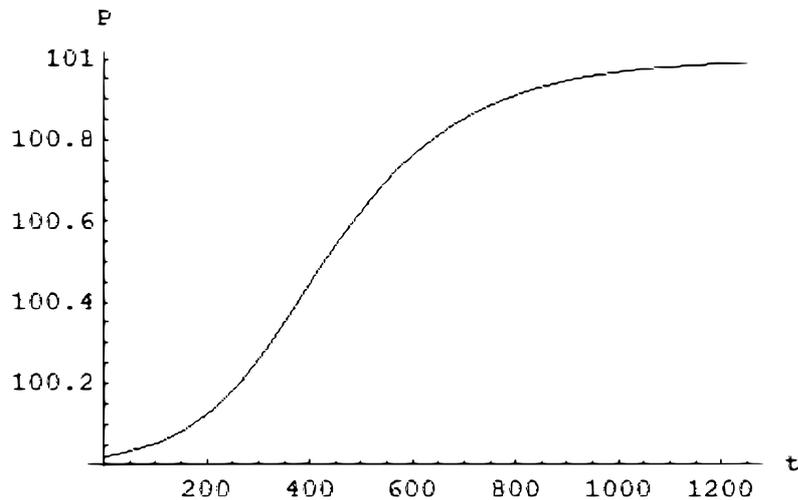
variação  $\dot{k}$  em (17) no interior do espaço de estados. Como  $\psi(k)$  é contínua, então  $\lim_{k \rightarrow 0^+} \psi(k) = \psi(0)$ . Logo, para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que, para todo  $k$ , se  $0 < k < \delta$  então  $|\psi(k) - \psi(0)| < \epsilon$ . Em particular, para uma economia regular, fazamos  $\epsilon = \psi(0) > 0$ . Logo, existe um  $\delta > 0$  tal que, para todo  $k$ , se  $0 < k < \delta$  então  $|\psi(k) - \psi(0)| < \epsilon = \psi(0)$  e, portanto,  $\psi(k) > 0$ . Isto demonstra que existe um  $\delta > 0$  tal que na vizinhança  $(0, \delta) \subset (0, 1)$  do ponto de equilíbrio  $k = 0$  temos  $\psi(k) > 0$  e, conseqüentemente,  $\dot{k} > 0$  para todo  $k \in (0, \delta) \subset (0, 1)$ . Por um argumento análogo, podemos demonstrar que em uma economia regular existe um  $\delta > 0$  tal que na vizinhança  $(1 - \delta, 1) \subset (0, 1)$  do ponto de equilíbrio  $k = 1$  temos  $\psi(k) < 0$  e, portanto,  $\dot{k} < 0$  para todo  $k \in (1 - \delta, 1) \subset (0, 1)$ . Em suma, em uma economia regular os equilíbrios de estratégia pura,  $k = 0$  e  $k = 1$ , são localmente instáveis e, portanto, a economia converge para algum ponto no interior do espaço de estados, ou seja, para algum equilíbrio de estratégia mista  $k^*$ , caso ela inicie numa situação em que coexistam firmas Nash e de racionalidade limitada. Na Figura 1 apresentamos, como ilustração, um retrato (linha) de fase de uma economia regular com um único equilíbrio de estratégia mista e, portanto, assintoticamente estável. Ademais, nas Figuras 2, 3 e 4 encontram-se os resultados de uma simulação desse caso específico. É importante frisar que em um equilíbrio de estratégia mista o nível geral de preços é diferente do preço de equilíbrio de Nash<sup>17</sup> e há uma medida estritamente positiva de firmas de racionalidade limitada, diferentemente do modelo de jogo evolucionário de (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003), no qual não existe equilíbrio de estratégia mista e o equilíbrio de estratégia pura com extinção da estratégia de racionalidade limitada (de Nash) é necessariamente assintoticamente estável (instável).

Considerando as premissas (19) e (20), em uma economia não regular podemos ter  $\psi(0) < 0$  e/ou  $\psi(1) > 0$ . Se  $\psi(0) < 0$ , então, com base em um argumento análogo ao desenvolvido no parágrafo anterior, sabemos que  $\psi(k) < 0$  e, portanto,  $\dot{k} < 0$  para  $k > 0$  suficientemente próximo de  $k = 0$ . Nessa situação, a economia, caso se encontre suficientemente próxima de  $k = 0$ , convergirá para o equilíbrio de Nash do jogo de estabelecimento de preços com extinção da estratégia de racionalidade limitada, como em (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003). Por sua vez, se  $\psi(1) > 0$ , teríamos  $\psi(k) > 0$  e, conseqüentemente,  $\dot{k} > 0$  para  $k > 0$  suficientemente próximo de  $k = 1$ , de maneira que a economia convergiria para um estado macroeconômico com um nível geral de preços  $\mu(1)^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha_0 M$ , que está acima (abaixo) do equilíbrio de Nash  $\alpha_0 M$  se as firmas que adotam estratégia de racionalidade limitada em média superestimam (subestimam) o nível geral de preços quando não há firmas adotando a estratégia Nash. Na Figura 5 encontra-se, também a título de ilustração, um retrato (linha) de fase de

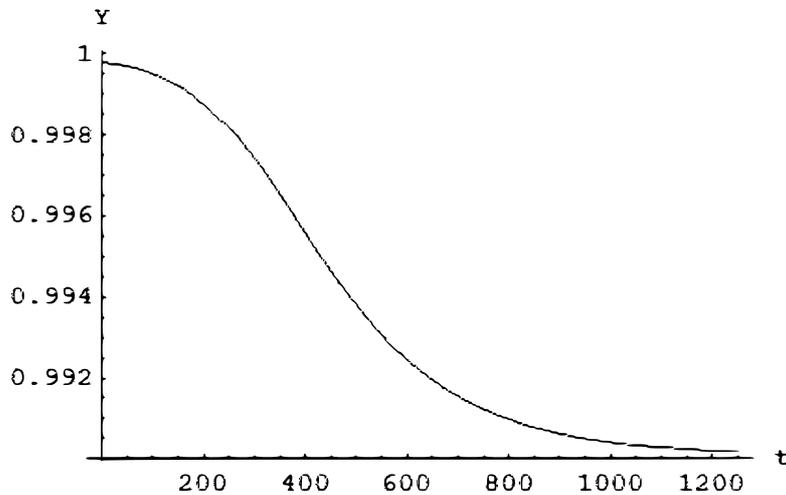
<sup>17</sup>Supondo  $\mu(k^*) \neq 1$ .



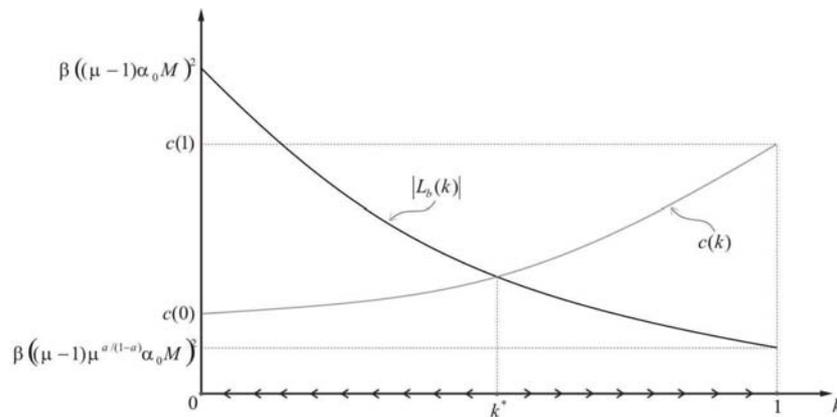
**Figura 2** – Trajetória da proporção de firmas de racionalidade limitada para uma economia regular com um único equilíbrio de estratégia mista. Condição inicial:  $k = 0,1$ . Parâmetros:  $\alpha = 1$ ;  $a = 1$ ;  $\beta = 1$ ;  $M = 100$ . Função custo:  $c(k) = 1,01$  para todo  $k \in [0,1]$ . Desvio médio:  $\mu = 1,01$  para todo  $k \in [0,1]$ .



**Figura 3** – Trajetória do índice geral de preços para uma economia regular com um único equilíbrio de estratégia mista. Condição inicial:  $k = 0,1$ . Parâmetros:  $\alpha = 1$ ;  $a = 1$ ;  $\beta = 1$ ;  $M = 100$ . Função custo:  $c(k) = 1,01$  para todo  $k \in [0,1]$ . Desvio médio:  $\mu = 1,01$  para todo  $k \in [0,1]$ .



**Figura 4** – Trajetória do produto para uma economia regular com um único equilíbrio de estratégia mista. Condição inicial:  $k = 0,1$ . Parâmetros:  $\alpha = 1; a = 1; \beta = 1; M = 100$ . Função custo:  $c(k) = 1,01$  para todo  $k \in [0,1]$ . Desvio médio:  $\mu = 1,01$  para todo  $k \in [0,1]$ .



**Figura 5** – Retrato de fase de uma economia não regular com um único equilíbrio de estratégia mista.

uma economia não regular com um único equilíbrio de estratégia mista instável.

Podemos sintetizar os resultados obtidos até aqui como segue. Em uma economia regular que inicia com ambas as estratégias de fixação de preço, a dinâmica evolucionária não conduz à extinção de qualquer das estratégias e o estado macroeconômico que emerge no equilíbrio evolucionário é caracterizado por um nível geral de preços diferente do valor de equilíbrio de Nash. Todavia, uma economia não regular com custo de informação relativamente baixo que inicia com uma proporção suficientemente pequena de firmas adotando a estratégia de racionalidade limitada convergirá, como em (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003), para o equilíbrio de Nash com extinção da estratégia de fixação de preço de racionalidade limitada. Finalmente, uma economia não regular com custo de informação relativamente alto que inicia com uma proporção suficientemente grande de firmas adotando a estratégia

de racionalidade limitada convergirá, diferentemente de (Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H., 2003), para o equilíbrio de Nash com extinção da estratégia de fixação de preço Nash e o estado macroeconômico que emerge é caracterizado por um nível geral de preços diferente do valor de equilíbrio de Nash.

## 5. IMPLICAÇÕES DE POLÍTICA MONETÁRIA

Variações no estoque nominal de moeda, ao alterarem a parametrização da dinâmica de replicação (17), geram bifurcações, caracterizadas por mudanças no número de equilíbrios e nas propriedades de estabilidade. Um estoque nominal de moeda alto o suficiente para tornar o módulo da perda média das firmas de racionalidade limitada superior ao custo de atualizar o conjunto informacional, para qualquer distribuição de estratégias no interior do espaço de estados, elimina a possibilidade de coexistência das estratégias, culminando na extinção do comportamento de racionalidade limitada. Vale dizer, uma expansão suficientemente forte do estoque nominal de moeda elimina o(s) equilíbrio(s) de estratégia mista, tornando o equilíbrio de estratégia pura  $k = 0$  assintoticamente estável para qualquer  $k \in (0,1)$  e transformando o outro equilíbrio de estratégia pura  $k = 1$  em um repulsor. Uma expansão monetária suficientemente forte, portanto, é a estratégia de política monetária que garante que a venha a ser composta somente por firmas Nash. Por sua vez, uma forte contração monetária, dado o limite inferior para o estoque nominal de moeda, pode não tornar o módulo da perda média das firmas de racionalidade limitada inferior ao custo de atualizar o conjunto informacional, para qualquer distribuição de estratégias no interior do espaço de estados. Dessa forma, embora alguns equilíbrios de estratégia mista possam ser destruídos, um ou mais equilíbrios desse tipo podem permanecer.

Em ambos os equilíbrios de estratégia pura o nível geral de preços, conforme a eq. (12), é diretamente proporcional ao estoque nominal de moeda, ou seja,  $P = \alpha_0 M$  quando  $k = 0$  e  $P = \mu(1)^{\frac{k}{1-a}} \alpha_0 M$  quando  $k = 1$ . Em ambos os casos, portanto, a elasticidade do nível geral de preços com respeito ao estoque nominal de moeda é unitária; mesmo quando houver somente firmas de racionalidade limitada, embora o nível geral de preços seja diferente do preço de equilíbrio de Nash, prevalecerá o ajustamento nominal completo.

Todavia, o mesmo pode não ocorrer se a economia estiver em um equilíbrio de estratégia mista. Para demonstrar isto, primeiramente temos que determinar o impacto de variações no estoque nominal de moeda sobre a distribuição de estratégias em um equilíbrio de estratégia mista, a saber:<sup>18</sup>

$$\frac{\partial k^*}{\partial M} = -\frac{\frac{\partial \psi(k^*)}{\partial M}}{\frac{\partial \psi(k^*)}{\partial k}} = \frac{2\beta \left[ (\mu(k^*) - 1) \mu(k^*)^{\frac{ak^*}{1-a}} \alpha_0 \right]^2 M}{c'(k^*) - \frac{d|L_b(k^*)|}{dk}} = \left[ \frac{2c(k^*)}{c'(k^*) - \frac{d|L_b(k^*)|}{dk}} \right] \frac{1}{M}. \quad (23)$$

A desigualdade  $c'(k^*) - \frac{d|L_b(k^*)|}{dk} < 0$  é uma condição suficiente para estabilidade assintótica de um equilíbrio de estratégia mista isolado  $k^*$ . Sob tal premissa, a derivada em (23) apresenta sinal estritamente negativo. Isto pode ser visualizado na Figura 1. Uma elevação moderada do estoque nominal de moeda, por exemplo, desloca para cima a curva do módulo da perda média das firmas de racionalidade limitada. A fração destas firmas que iguala o referido módulo da perda média com o custo de atualizar informação passa a ser, então, menor.

O impacto de variações do estoque nominal de moeda sobre o nível geral de preços no equilíbrio de estratégia mista, levando em consideração tanto o efeito direto, eq. (14), como o indireto, Equação (23), pode ser calculado a partir de (12) como segue:

$$\frac{dP}{dM} \Big|_{k=k^*} = \frac{\partial P}{\partial M} \Big|_{k=k^*} + \frac{\partial P}{\partial k} \Big|_{k=k^*} \frac{\partial k^*}{\partial M}. \quad (24)$$

<sup>18</sup>Este exercício de estática comparativa só faz sentido na vizinhança (bacia de atração) de um equilíbrio de estratégia mista isolado que seja um atrator local.



Utilizando (13), (14), (23) e (24), chegamos à seguinte expressão para a elasticidade do nível geral de preços com relação ao estoque nominal de moeda em um equilíbrio de estratégia mista:

$$\left. \frac{dP}{dM} \right|_{k=k^*} \left. \frac{M}{P} \right|_{k=k^*} = 1 + \left( \frac{1}{1-a} \right) \left[ \frac{k^* \mu'(k^*)}{\mu(k^*)} + \ln \mu(k^*) \right] \left[ \frac{2c(k^*)}{c'(k^*) - \frac{d|L_b(k^*)|}{dk}} \right]. \quad (25)$$

Pela expressão anterior, valores extremos de subestimação ou superestimação do nível geral de preços, ou seja, valores de  $\mu(k^*)$  suficientemente distantes de um, geram valores negativos ou superiores à unidade para a elasticidade-moeda do nível geral de preços.<sup>19</sup> Nesse caso, uma variação monetária acarretaria uma variação no sentido contrário do nível geral de preços ou uma variação no mesmo sentido, porém mais que proporcional, eventos que não têm sido observados empiricamente. Assim, nos concentraremos na análise do impacto de variações monetárias para valores de  $\mu(k^*)$  que geram uma elasticidade-moeda do nível geral de preços positiva e inelástica ou unitária.

Considerando as restrições  $0 < a < 1$ ,  $c(k^*) > 0$  e  $c'(k^*) - \frac{d|L_b(k^*)|}{dk} < 0$ , a partir da expressão (25) inferimos que a elasticidade-moeda do nível geral de preços será unitária se, e somente se:

$$\frac{k^* \mu'(k^*)}{\mu(k^*)} + \ln \mu(k^*) = 0. \quad (26)$$

Como  $\frac{k^* \mu'(k^*)}{\mu(k^*)}$  é uma função contínua e limitada no intervalo  $k^* \in (0,1)$  e a função logarítmica é monótona, haverá valores de  $\mu(k^*)$  suficientemente próximos de um que satisfazem a condição (26). Porém, não são todos os valores de  $\mu(k^*)$  suficientemente próximos de um que satisfazem a referida condição de ajustamento nominal completo do nível geral de preços. De fato, considerando (25), o ajustamento nominal será incompleto quando for satisfeita a seguinte condição:

$$0 < \frac{k^* \mu'(k^*)}{\mu(k^*)} + \ln \mu(k^*) < -(1-a) \left[ \frac{c'(k^*) - \frac{d|L_b(k^*)|}{dk}}{2c(k^*)} \right]. \quad (27)$$

Nesse caso, a elasticidade-moeda do nível geral de preços em um equilíbrio de estratégia mista será positiva, mas inferior a um. Com isso, uma expansão (contração) monetária gerará uma expansão (redução) menos que proporcional do nível geral de preços e, portanto, uma variação positiva (negativa) do produto.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo desenvolveu um modelo dinâmico baseado no arcabouço de jogos evolucionários com o intuito de proporcionar uma microfundamentação da rigidez de preço e do conseqüente ajustamento nominal incompleto. Além disso, foram derivadas e analisadas algumas implicações em nível de efetividade da política monetária desse ajustamento nominal incompleto microfundamentado a partir de princípios evolucionários.

Para tanto, utilizamos a dinâmica de replicação, que é baseada no princípio de seleção de que estratégias com desempenho acima da média têm sua utilização ampliada. Admitimos que nem toda a informação necessária para determinar o preço ótimo está disponível livremente, ou seja, que há um custo para adquirir tal informação. Esse custo, por sua vez, além de estabelecer uma complementaridade estratégica entre as firmas, coevolui com os resultados agregados em termos de preços e produto.

<sup>19</sup>Segue das propriedades da distribuição contínua dos ruídos, supostas em (5), que a elasticidade do desvio médio com relação à distribuição de estratégias,  $\frac{k^* \mu'(k^*)}{\mu(k^*)}$ , é uma função contínua e limitada no intervalo  $k^* \in (0,1)$ . Logo, valores de  $\mu(k^*)$  suficientemente próximos de zero ou suficientemente maiores do que um geram os referidos valores extremos para a elasticidade correspondente.

Cumpra esclarecer, porém, que o processo de escolha entre pagar ou não pagar o custo associado à otimização é ele próprio concebido no compasso deste artigo como sendo limitadamente racional e evolucionário, e não como sendo derivado de um cálculo preciso de otimização.

Para uma dada distribuição de estratégias de fixação de preço, uma expansão monetária eleva o nível geral de preços na mesma proporção. No caso de uma mudança nessa distribuição, para uma dada realização monetária, seu efeito sobre o nível geral de preços depende da natureza do viés de estimação das firmas de racionalidade limitada. Caso essas firmas em média superestimem seus preços, uma expansão da fração de firmas Nash diminui o nível geral de preços. Caso, entretanto, essas firmas de racionalidade limitada em média subestimem seus preços, uma expansão da fração de firmas Nash pode vir a elevar o nível geral de preços.

Em termos da dinâmica de replicação, existem dois equilíbrios de estratégia pura, a saber, um caracterizado pela extinção da estratégia de racionalidade limitada, de não incorrer no custo de atualização do conjunto informacional, e outro pela extinção da estratégia Nash, de incorrer nesse custo. Além disso, em uma economia regular existe pelo menos um equilíbrio de estratégia mista, caracterizado pela sobrevivência de ambas as estratégias. Nesse tipo de economia, os equilíbrios de estratégia pura são repulsores locais, de maneira que a dinâmica evolucionária, se iniciada a partir de uma situação de coexistência de estratégias, não conduz à extinção de nenhuma delas.

Por outro lado, uma economia não regular na qual o custo de informação é relativamente baixo, partindo de uma proporção suficientemente pequena de firmas adotando a estratégia de racionalidade limitada, convergirá para o equilíbrio com extinção dessa estratégia. Analogamente, uma economia não regular na qual o custo de informação é relativamente alto, iniciando de uma fração suficientemente grande de firmas adotando a estratégia de racionalidade limitada, convergirá para o equilíbrio com extinção da estratégia de Nash.

Por seu turno, variações no estoque nominal de moeda, ao alterarem a parametrização da dinâmica de replicação, podem gerar bifurcações, marcadas por mudanças no número de equilíbrios e nas propriedades de estabilidade. Por exemplo, um estoque nominal de moeda alto o suficiente para tornar o módulo da perda média das firmas de racionalidade limitada superior ao custo de atualizar informação, para qualquer distribuição de estratégias, elimina a possibilidade de coexistência das estratégias, culminando na extinção do comportamento de racionalidade limitada. Vale dizer, uma expansão suficientemente forte do estoque nominal de moeda elimina o(s) equilíbrio(s) de estratégia mista, tornando o equilíbrio de estratégia pura representado pela extinção das firmas dotadas de racionalidade limitada assintoticamente estável e transformando o outro equilíbrio de estratégia pura em um repulsor.

Finalmente, mostramos que para um equilíbrio de estratégia mista isolado localmente estável a elasticidade-moeda do nível geral de preços pode ou não ser unitária, ou seja, o ajustamento nominal pode ou não ser completo, a depender do desvio médio presente nos preços estabelecidos pelas firmas de racionalidade limitada.



## Referências Bibliográficas

- Akerlof, G. (2002). Behavioral macroeconomics and macroeconomic behavior. *American Economic Review*, 92(3):411–433.
- Akerlof, G. & Yellen, J. (1985). A near-racional model model of the business cycle, with wage and price inertia. *Quarterly Journal of Economics*, 100(5):823–38.
- Barro, R. & Grossman, H. (1971). A general disequilibrium model of income and employment. *American Economic Review*, 1(61):82–93.
- Benassi, J. P. (1975). Neo-keynesian disequilibrium theory in a monetary economy. *Review of Economic Studies*, 4(42):503–23.
- Bergh, J.C.M. van den & Gowdy, J. M. (2003). The microfoundations of macroeconomics: An evolutionary perspective. *Cambridge Journal of Economics*, 27:65–84.
- Bils, M. & Klenow, P. (2004). Some evidence on the importance of sticky prices. *Journal of Political Economy*, 112(5).
- Binmore, K. (1987). Modeling rational players, part I. *Economics and Philosophy*, 3:179–214.
- Binmore, K. (1988). Modeling rational players, part II. *Economics and Philosophy*, 4:9–55.
- Blanchard, O. & Kiyotaki, N. (1987). Monopolistic competition and the effects of aggregate demand. *American Economic Review*, 4(77):647–66.
- Bonomo, M., Carrasco, V. & Moreira, H. (2003). Aprendizado evolucionário, inércia inflacionária e recessão em desinflações monetárias. *Revista Brasileira de Economia*, 57(4):663–681.
- Calvo, G. (1983). Staggered prices in a utility maximizing framework. *Journal of Monetary Economics*, 12:383–398.
- Caplin, A. & Spulber, D. (1987). Menu costs and the neutrality of money. *Quarterly Journal of Economics*, 4(102):703–25.
- Carroll, C. (2006). *The Economy as an Evolving Complex System, III*, chapter The epidemiology of macroeconomic expectations. Oxford: Oxford University Press.
- Conlisk, J. (1996). Why bounded rationality? *Journal of Economic Literature*, XXXIV:669–700.
- Debreu, G. (1970). Economies with a finite set of equilibria. *Econometrica*, 38:387–92.
- Droste, E., H. . T. (2002). Endogenous fluctuations under evolutionary pressure in cournot competition. *Games and Economic Behavior*, 40:232–69.
- Eichenbaum, M. & Fisher, J. (2004). Evaluating the calvo model of sticky prices. Technical report, NBER Working Paper 10617.
- Fischer, S. (1977). Long-term contracts, rational expectations and the optimal money supply rule. *Journal of Political Economy*, 1(85):191–205.
- Knudsen, C. (1993). *Equilibrium, perfect rationality and the problem of self-reference in economics*. Rationality, Institutions and Economic Methodology, London: Routledge.
- Leijonhufvud, A. (1968). *On Keynesian economics and the economics of Keynes*. Oxford University Press, New York.

- Lucas, R. E., J. (1972). Expectations and the neutrality of money. *Journal of Economic Theory*, 4:103–24.
- Lucas, R. E., J. (1973). Some international evidence on output-inflation tradeoffs. *American Economic Review*, 63:326–34.
- Malinvaud, E. (1977). *The theory of unemployment reconsidered*. Oxford: Basil Blackwell.
- Mankiw, N. (1985). Small menu costs and large business cycles. *Quarterly Journal of Economics*, 2(10):529–38.
- Mankiw, N. & Reis, R. (2002). Sticky information versus sticky prices: a proposal to replace the new Keynesian Phillips curve. *Quarterly Journal of Economics*, 4(117):1295–1328.
- Marschak, J. (1954). *Toward an economic theory of organization and information*. R.M. Thrall, C.H. Coombs & R.L. Davis, New York: Wiley, decision processes edition.
- Ponti, G. (2000). Continuous-time evolutionary dynamics: theory and practice. *Research in Economics*, 54:187–214.
- Roberts, J. (1995). New keynesian economics and the Phillips curve. *Journal of Money, Credit and Banking*, 27:975–84.
- Rotemberg, J. (1982). Sticky prices in the United States. *Journal of Political Economy*, 6(90):1187–1211.
- Saint-Paul, G. (2005). Some evolutionary foundations for price level rigidity. *American Economic Review*, 3(95):765–779.
- Simonsen, M. H. (1983). *Inflation, Debt and Indexation*, chapter Price stabilization and income policies: theory and the brazilian case study, pages 205–241. R. Dornbusch & M. H. Simonsen, Cambridge: MIT Press.
- Simonsen, M. H. (1988). *The Economy as an Evolving Complex System, I*, chapter Rational expectations, game theory and inflationary inertia. P. Anderson, K. Arrow & D. Pines, New York: Addison-Wesley.
- Stigler, G. (1961). The economics of information. *Journal of Political Economy*, 69:213–25.
- Taylor, J. (1980). Aggregate dynamics and staggered contracts. *Journal of Political Economy*, 88(1):1–23.
- Taylor, J. (1999). *Handbook of Macroeconomics*, volume I. Elsevier Science, New York.
- Walker, D. (1986). *Money and markets: essays by Robert W. Clower*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Weibull, J. W. (1995). *Evolutionary game theory*. The MIT Press, Cambridge, MA.
- Winter, S. (1975). *Adaptive Economic Models*, chapter Optimization and evolution in the theory of the firm, page 73/118. R. H. Day & T. Groves, New York: Academic Press.
- Woodford, M. (2003). *Knowledge, Information and Expectations in Modern Macroeconomics: Essays in Honor of Edmund Phelps*, chapter Imperfect common knowledge and the effects of monetary policy, pages 25–58. P. Aghion, R. Frydman, J. Stiglitz & M. Woodford, Princeton: Princeton University Press.