

# Composição de portfólios por *pairs trading* com critério de volatilidade no mercado brasileiro<sup>\*,\*\*</sup>

Raphael Silveira Guerra Cavalcanti<sup>1</sup>

 <https://orcid.org/0000-0002-4364-2519>

E-mail: raphael.cavalcanti@ufpe.br

José Florencio dos Santos<sup>1</sup>

 <https://orcid.org/0000-0002-5366-2548>

E-mail: jfs@ufpe.br

Ramon Rodrigues dos Santos<sup>1</sup>

 <https://orcid.org/0000-0002-3413-3333>

E-mail: ramon.rodrigues@ufpe.br

Anderson Góis M. da Cunha<sup>2</sup>

 <https://orcid.org/0000-0003-0128-2911>

E-mail: anderson.cunha@professores.unifbv.edu.br

<sup>1</sup> Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Departamento de Ciências Administrativas, Recife, PE, Brasil

<sup>2</sup> Centro Universitário UniFBV, Recife, PE, Brasil

Recebido em 02.11.2019 – Desk aceite em 29.11.2019 – 5ª versão aprovada em 27.08.2020 – Ahead of print em 05.03.2021

Editor-Chefe: Fábio Frezatti

Editora Associada: Fernanda Finotti Cordeiro

## RESUMO

O objetivo do trabalho foi compreender de que forma a volatilidade das ações afetam a dinâmica dos portfólios formados com uso do modelo de arbitragem por pares ou *pairs trading* no mercado acionário brasileiro. Este artigo diferenciou-se por trazer novas evidências acerca dos efeitos da volatilidade no modelo de *pairs trading* não abrangidos por estudos anteriores, ampliando o tamanho da amostra analisada no mercado acionário brasileiro. A relevância do tema escolhido reside no fato de modelos de arbitragem por *pairs trading* ou *long-short* serem utilizados por investidores para construção de suas carteiras. A utilização dos conceitos de cointegração contribui probabilisticamente para a formação de portfólios fracamente correlacionados aos índices de mercado com desempenho superior. Este artigo tem impacto na área por contribuir com novas evidências para uma melhor utilização do modelo na análise de investimentos. Analisou-se, no período de janeiro de 2016 até dezembro de 2018, os 90 ativos mais líquidos da Bolsa, Brasil, Balcão (B3), totalizando 5.927.400 pares possíveis. Para avaliação dos critérios de cointegração utilizou-se o teste Dickey-Fuller Aumentado e posterior *backtesting* dos pares no período proposto. A análise estatística foi realizada por testes paramétricos e não paramétricos e análises de correlações de Pearson e Spearman. Os resultados encontrados indicaram que a formação de carteiras por *pairs trading* com ativos dependentes com critério de maiores níveis de volatilidade (20 períodos) apresentaram um desempenho superior. Esses achados podem ser justificados por uma melhor relação de risco e retorno para a carteira, mensurada pelo Índice de Sharpe dos retornos obtidos em relação à volatilidade da carteira, quando comparada a uma formação das carteiras baseada em uma seleção aleatória dos pares. Além disso, os resultados também apresentaram baixa correlação dos retornos em relação ao índice de mercado. Constatou-se, assim, que apenas a aplicação da metodologia de análise por cointegração estatística não garante resultados diferenciados da média de mercado.

**Palavras-chave:** *pairs trading*, seleção de portfólios, volatilidade.

## Endereço para correspondência

Raphael Silveira Guerra Cavalcanti

Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Departamento de Ciências Administrativas

Avenida dos Funcionários, S/N, 1º andar, sala D-1A – CEP 50670-901

Cidade Universitária – Recife – PE – Brasil

\*Trabalho apresentado no XXII Seminários em Administração (SemeAd), São Paulo, SP, Brasil, novembro de 2019.

\*\*Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia de Pernambuco (FACEPE) pelo apoio financeiro na realização desta pesquisa.



## 1. INTRODUÇÃO

A hipótese da eficiência de mercado (ou dos mercados eficientes) baseia-se na afirmação de que o preço de uma ação reflete as informações disponíveis a respeito da empresa emissora, ou seja, que novas informações no mercado de capitais são rapidamente incorporadas e ajustadas aos preços, afetando o fluxo de caixa e as expectativas futuras dos investidores (Fama, 1970).

Essa questão é discutida aos milhares, mas sem um consenso acerca da matéria (Fama, 1998), visto que somente a possibilidade de capturar ineficiências na precificação dos ativos é o que permitiria a obtenção de lucros sistemáticos por meio de algum método de negociação de ativos (Pontuschka & Perlin, 2015). Uma das estratégias aplicadas partiria da abertura de uma posição comprada (*long*) e, no mesmo instante, uma posição vendida (*short*), partindo-se da busca em obter lucros a partir da convergência dos preços dos ativos negociados. Essas operações, também conhecidas como estratégias de *pairs trading*, ou *long-short*, esperam que a divergência observada retorne ao equilíbrio de longo prazo, vendendo-se o ativo sobrevalorizado e comprando-se o outro subvalorizado, encerrando a operação quando a divergência entre os ativos cessa (Santos & Pessoa, 2017).

O desenvolvimento do modelo de arbitragem estatística em *pairs trading* é atribuído à Nunzio Tartaglia e ao seu grupo de trabalho composto de matemáticos, físicos e programadores no banco Morgan Stanley, que aplicaram essa estratégia em meados de 1987, com a finalidade de permitir entradas e saídas automáticas do mercado pelos investidores, beneficiando-se das ineficiências desse mercado. Desde então, segue disseminando-se entre *hedge funds* e investidores institucionais na visão de Vidyamurthy (2004), Figueiredo (2017) e Yoshikawa (2017).

Nesse contexto, o presente artigo busca responder ao seguinte problema: Como os níveis de volatilidade dos ativos afetam a composição de portfólios de ações por *pairs trading* no mercado acionário brasileiro?

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 *Pairs Trading* Baseadas em Cointegração

Constantemente, agentes de mercado buscam uma estrutura ótima para a minimização das incertezas e da alocação de seus recursos, equilibrando as suas relações de risco com o retorno e, por consequência, uma utilidade esperada (Copeland et al., 2005). Com isso, esses agentes buscam detectar oportunidades por meio do uso de séries históricas de ativos que possam refletir as movimentações

Para a modelagem e o estudo dos padrões entre os ativos são utilizadas técnicas econométricas aplicadas a séries temporais com o auxílio de ferramentas de análise estatística que validem se seu comportamento é estacionário e, portanto, que não propaguem eventuais choques prejudiciais à modelagem do comportamento futuro ocasionadas, por exemplo, por mudanças nas condições de negociação do ativo ou redução substancial da liquidez operacional, em especial no momento pós-abertura das posições, quebrando a condição de estacionariedade histórica do período de análise. Para isso, uma opção é o modelo por cointegração, que analisa os movimentos conjuntos dos preços dos ativos em longo prazo, visando a obter a distribuição estacionária dos resíduos da sua regressão, buscando retornos financeiros quando da reversão dos resíduos à média de longo prazo (Gujarati, 2011).

A vantagem principal do modelo é sua objetividade e generalidade da análise entre os pares de ações estudados, podendo ser utilizado para grande parte dos ativos, não importando outros fatores econômico-financeiros, como, por exemplo, se os ativos analisados são do mesmo setor, se há boas perspectivas para os setores em que os ativos se inserem; ou, ainda, se seu grau de endividamento está elevado. A cointegração não se refere aos movimentos conjuntos dos retornos, mas sim aos movimentos conjuntos dos preços dos ativos (ou taxas de câmbios). Se os *spreads* apresentam reversão à média, então os preços dos ativos estão ligados, em longo prazo, por uma tendência estocástica comum e, nesse caso, pode-se dizer que os preços são cointegrados (Alexander, 2005).

Para isso, este trabalho está dividido em mais quatro seções, além desta introdução. O próximo tópico trata do referencial teórico, abordando um *survey* sobre *pairs trading* por cointegração, além de estudos relacionados à temática. No terceiro tópico, os procedimentos metodológicos, seguido dos resultados, considerações finais e referências.

aleatórias de seus valores conforme o *feeling* de mercado e variáveis exógenas, como eventos político-econômicos (Cutler et al., 1990) ou de indicadores fundamentais das companhias como preço por ação, lucro da ação, risco ativos-mercado, entre outros, a fim de margear sua volatilidade (Fortuna, 2008).

Nesse contexto, a abordagem quantitativa por *pairs trading* com cointegração visa a explorar a lógica em

mercados financeiros fora de seu equilíbrio, culminando em estratégia de negocia o ou investimento oriunda de opera es *long-short*, que trata da compra dos ativos subvalorizados e, simultaneamente, venda dos ativos sobrevalorizados; mais especificamente, de pares de ativos financeiros com séries históricas e movimentac es similares com o intuito de verificar desvios de curto prazo e a influência no equilíbrio de longo prazo de seus preços (Pucciarelli, 2014; Yoshikawa, 2017).

A aplica o do conceito de vetores cointegrados   iniciada nos estudos de Granger (1981), Granger e Weiss (1983), Granger e Engle (1985) e Engle e Granger (1987), que propuseram a concretiza o da conexão entre modelos de corre o de erros e sistemas cointegrados, passando também pelos estudos de Johansen (1988) e adi es por outros autores, com as propriedades do método dos mínimos quadrados na cointegra o (Stock, 1987) e aspectos de tendências das variáveis em séries temporais (Davidson & Hall, 1991; Stock, 1987).

Essa última corre o de erros permitiu observar que a série temporal em curto prazo se comporta de forma dinâmica e flexível; em outra perspectiva, séries de longo prazo obedecem a algumas restri es para que o modelo em análise chegue a um equilíbrio regressivo satisfatório. Conforme Murray (1994), o conceito   probabilístico e as regressões que envolvem mudanças nas variáveis cointegradas devem apresentar esses níveis de defasagem, bem como as restri es de suas rela es, corroborando o trabalho de Engle e Granger (1987). Entretanto, Philips (1989) efetua compara es ao modelo Engle-Granger propondo um novo mecanismo de corre o de erros e sinalizando que sua análise tratava de parâmetros de cointegra o lineares, divergindo, em alguns aspectos, do modelo Engle-Granger que trata de aspectos não lineares dos parâmetros, e que, ao se basear em modelo único, pode envolver vieses e perder a otimiza o de sua aplicabilidade.

Por outro lado, avanços de sua aplica o trazem estudos de estratégias *pairs trading* juntamente com a ado o da técnica da cointegra o. Isso remonta ao esforço de Lucas (1997) ao observar a gera o de cenários a partir do comportamento de modelos baseados em séries temporais multivariadas. O autor buscou evidenciar a correla o dos cenários com resultados passados das séries temporais analisadas, trazendo a no o da corre o de seus erros e descrevendo seus efeitos na tomada de decisões financeiras em curto e em longo prazos.

Ademais, outra contribui o para o modelo cointegrado baseia-se em Alexander (1999), que traz a importância da técnica na diferencia o de resultados a partir do uso da correla o e dos modelos cointegrados. Ao destacar que, ao gerir o risco do portfólio, relaciona-se a análise da correla o de seus retornos esperados; já quando envolve o preceito de cointegra o, baseia-se em dados brutos

de preço dos ativos e de seus rendimentos, tendo esta última técnica ampliado atua o enquanto abordagem predominante na econometria de séries temporais, principalmente com base nos estudos de Murray (1994), Hamilton (1994) e Hendry (1986, 1995).

Tendo em vista sua evolu o em pesquisas de alcance mundial, o presente estudo está relacionado   aplica o de *pairs trading* com cointegra o no mercado acionário brasileiro. Assim, as evidências deste artigo centram-se na observa o do comportamento de ativos diante da estratégia *long-short* firmada com ativos negociados na Brasil, Bolsa, Balcão (B3), que justifiquem o modelo econométrico adotado, em termos de estima o e valida o.

## 2.2 Estudos Correlatos

Na seq ncia,   possível identificar trabalhos recentes que explorem a produ o científica sobre *pairs trading* por cointegra o no mercado brasileiro, em segmentos, agrupamentos e períodos diferentes. Cabe ressaltar que ainda existem lacunas na literatura acad mica que tratem da rela o entre a volatilidade dos ativos e a composi o de portfólios de a es a partir do *pairs trading*, visto que os trabalhos nacionais analisam, isoladamente, o comportamento de um desses atributos.

As estratégias de arbitragem estatística por *pairs trading* e suas generaliza es dependem da constru o de *spreads* estacionários com certo grau de previsibilidade. O trabalho de Caldeira e Moura (2013) aplicou testes de cointegra o para identificar ativos para serem usados em estratégias de *pairs trading* com dados diários dos 50 ativos mais líquidos da Bovespa, entre janeiro de 2005 e outubro de 2012. A ideia dos autores foi a de estimar o equilíbrio de longo prazo e de modelar os resíduos resultantes, com os pares de a es selecionados baseados em um indicador de lucratividade para compor um portfólio de pares. A análise empírica mostrou que a estratégia proposta obteve excessos de retorno da ordem de 16,38% ao ano,  ndice de Sharpe de 1,34 e uma baixa correla o com o Ibovespa. Além disso, os autores aplicaram para estratégia dos pares a cointegra o com a máxima estacionaridade e a mínima variância *tracking error*, percebendo descolamentos e aderências em rela o ao *benchmark*, sendo esta última com maior incidência auferindo baixo nível de volatilidade.

Pontuschka e Perlin (2015) buscaram analisar o desempenho da estratégia de pares em diferentes frequências de dados no mercado acionário brasileiro, estendendo o leque de frequências e entrando no universo intradiário com frequências de amostragem em 1, 5, 15, 30, 60 minutos e diários, no período entre 2008 e 2011. Para compor a base de dados, foram utilizados os 20 ativos com maior número de contratos negociados no

período, aplicando a técnica de períodos de treinamento e de negociação, comparando os índices de informação da estratégia de pares nas diferentes frequências de dados. Os resultados da pesquisa confirmaram a hipótese primária de que quanto maior a frequência de amostragem, maiores as evidências de ineficiência de mercado.

Sampaio (2016) centrou suas pesquisas em um método simples centrado em duas fases principais: a primeira é a escolha dos pares no horizonte de 12 meses; e a segunda, a estratégia de investimento nos pares em um ciclo mensal, com repetições sucessivas posteriores desta, até o uso em sua totalidade dos dados do estudo, coletados na Economática® – preços de fechamento e volume diário de todos os ativos negociados na Ibovespa (50 ações com maior volume, excluindo o critério da setorização em sua análise) entre 2006 (período de teste) e 2015. Os resultados com os retornos entre os anos de 2007 e 2015 apresentaram um total de 108 janelas mensais estudadas, das quais, de um total de 1.225 pares, 130 deles demonstraram cointegração, delineando um lucro líquido acumulado de 46,3% no período analisado. O autor destaca os resultados encontrados em relação ao mercado, observando, entretanto, que se tornam desinteressantes os retornos esperados diante de outros fatores, como movimentos inflacionários e juros do período.

Oliveira (2017) buscou verificar a *performance* do método de distância da estratégia de *pairs trading* no

mercado brasileiro, no período entre 2004 e 2017, tentando identificar se essas estratégias trouxeram retornos consistentes, apesar das diversas crises econômicas e políticas brasileiras. Diversamente da vasta literatura que busca modelos mais complexos que possam atuar nas estratégias de *pairs trading*, esse estudo se concentrou apenas no método de distância, sem a incidência de custos de transação, nesse horizonte mais recente ainda não estudado, fazendo-se necessário, então, entender seu comportamento nas crises. A metodologia utilizada foi extraída dos artigos de Gatev et al. (2006) e Rad et al. (2016) com apenas uma modificação no critério de encerramento das posições. Como resultado, a estratégia estudada não apresentou perdas estatisticamente significantes em períodos de crise.

Santos e Pessoa (2017) investigaram o desempenho do *pairs trading* utilizando os testes de cointegração para ações negociadas na Bovespa no período de 2003 a 2014. Foram testadas diferentes bandas de abertura, fechamento e *stop*. A partir desses resultados, separaram-se três estratégias diferentes para a análise de desempenho. As estratégias 1, 2 e 3 obtiveram um retorno líquido médio de 5,24%, 5,1% e 8,29% ao ano e Índice de Sharpe (IS) anualizado médio de 0,33, 0,31 e 0,54, respectivamente. Com isso, demonstrou-se que a *performance* da carteira composta pela estratégia 1 foi superior às demais, confirmando a hipótese do desvio ótimo de Vidyamurthy (2004) e reforçando a importância do uso da cointegração em estratégias *pairs trading*.

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1 Amostra da Pesquisa

Este artigo consiste, resumidamente, em obter os preços de fechamentos da quantidade inicial proposta dos ativos no período de janeiro de 2015 até dezembro de 2018, realizando a análise dos pares entre janeiro de 2016 e dezembro de 2018, de acordo com os critérios

de cointegração para cada dia do intervalo proposto, selecionando os pares cointegrados e observando seu comportamento posterior ao dia de análise, na forma de uma simulação histórica (*backtesting*), realizando a aquisição dos dados para posterior demonstração dos resultados de cada variação proposta do modelo.

**Tabela 1**

Ativos analisados

|        |       |       |       |        |       |       |        |       |
|--------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|
| ABEV3  | BRAP4 | CMIG4 | ELET3 | GFGA3  | KROT3 | ODPV3 | RENT3  | TIMP3 |
| ALPA4  | BRFS3 | CPFE3 | ELET6 | GGBR4  | LAME4 | PCAR4 | SANB11 | TOTS3 |
| ALUP11 | BRKM5 | CPLE6 | ELPL3 | GOAU4  | LIGT3 | PETR3 | SAPR4  | TRPL4 |
| ARZZ3  | BRML3 | CSAN3 | EMBR3 | GOLL4  | LREN3 | PETR4 | SBSP3  | UGPA3 |
| BBAS3  | BRSR6 | CSNA3 | ENBR3 | HGTX3  | MDIA3 | POMO4 | SEER3  | USIM3 |
| BBDC3  | BTOW3 | CVCB3 | EQTL3 | HYPE3  | MRFG3 | PSSA3 | SMLS3  | USIM5 |
| BBDC4  | B3SA3 | CYRE3 | ESTC3 | ITSA4  | MRVE3 | QUAL3 | SULA11 | VALE3 |
| BBSE3  | CCRO3 | DTEX3 | EZTC3 | ITUB4  | MULT3 | RADL3 | SUZB3  | VIVT4 |
| BEEF3  | CESP6 | ECOR3 | FIBR3 | JBSS3  | MYPK3 | RAIL3 | TAE11  | VLID3 |
| BOVA11 | CIEL3 | EGIE3 | FLRY3 | KLBN11 | NATU3 | RAPT4 | TIET11 | WEGE3 |

Fonte: Elaborado pelos autores.

Serão utilizadas as cota es históricas diárias dos preços de fechamento dos ativos, obtidas por meio de arquivos disponibilizados no site da B3, ajustados os proventos, agrupamentos e desdobramentos ocorridos no passado. Todos os cálculos foram realizados com algoritmos em linguagem Python para a coleta e tratamento dos dados, estudo dos critérios estatísticos e a avalia o de entrada e saída das posi es, para cada par de ativos avaliado e armazenamento dos parâmetros das regressões, testes de cointegra o, volatilidades e resultados operacionais das carteiras em Microsoft Excel com o auxílio do SPSS Statistics para a realiza o dos testes estatísticos finais.

A escolha dos ativos será definida com base na média de liquidez diária apresentada no final do intervalo, propondo a escolha dos 90 ativos mais líquidos, que possuam dados históricos suficientes para a avalia o proposta. A liquidez diária   importante para uma estratégia de *pairs trading*, dado que a falta representa um risco elevado para as opera es (Pontuschka & Perlin, 2015; Santos & Pessoa, 2017).

### 3.2 Análise dos Pares

Em seq ncia, os ativos serão avaliados aos pares, sem restri es relacionadas aos ativos de mesmo setor, serão avaliados todos os pares possíveis, com amostras dos preços de fechamento dos 252 dias anteriores, incluindo o dia estudado, para a estima o dos parâmetros de uma regressão linear múltipla por Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) para séries temporais, conforme a Equa o 1.

$$ativo\_dep_t = \beta_0 + \beta_1 ativo\_ind_t + \beta_2 t + \varepsilon_t \quad 1$$

em que  $ativo\_dep_t$  são os preços do ativo dependente no tempo  $t$ ;  $ativo\_ind_t$  são os preços do ativo independente no tempo  $t$ ;  $\beta_0$  o coeficiente linear entre os preços;  $\beta_1$  o coeficiente de *hedge*;  $\beta_2$  o coeficiente temporal;  $t$  o tempo e  $\varepsilon_t$  o resíduo que será analisado da regressão.

A composi o das equa es para cada preço de fechamento diário para o período de 252 pregões forma matrizes dos valores de  $Y$ ,  $X$ ,  $\beta$  e dos resíduos  $\varepsilon_i$ , conforme a Equa o 2.

$$\begin{matrix} ativo\_dep_1 \\ ativo\_dep_2 \\ \dots \\ ativo\_dep_{252} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & ativo\_ind_1 & 1 \\ 1 & ativo\_ind_2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & ativo\_ind_{252} & 252 \end{matrix} \times \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta \end{matrix} + \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_{252} \end{matrix} \quad 2$$

Após a multiplica o matricial seguinte, podemos estimar os valores da matriz  $\beta$  que resultam nos coeficientes  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , utilizando-os para a estima o dos resíduos e realiza o dos testes de estacionariedade, em que  $\sum_{i=1}^{252} \varepsilon_i^2$ , apresentado na Equa o 3:

$$B = (X'X)^{-1} (X'Y) = \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \quad 3$$

A contagem da quantidade de pares será dada pelo arranjo simples da quantidade de ativos, tendo em vista que, em razão dos coeficientes mudarem quando alterada a ordem dos ativos, serão consideradas como opera es distintas, por exemplo, o par ITUB4 (Itaú Unibanco S/A) e VALE3 (Vale S/A) terá coeficientes diferentes de VALE3 e ITUB4. Logo, para os 90 ativos foram analisados 8.010 pares. Identificados os pares, e calculados seus desempenhos, serão avaliados por estatísticas paramétricas ou não paramétricas para identifica o das possíveis rela es entre seus retornos e a volatilidade calculada sobre os desvios padrões dos retornos diários para 20, 60, 120 e 252 períodos em formato anualizado, para os ativos dependentes e independentes.

### 3.3 Modelagem de Séries Temporais e Critérios para Abertura e Fechamento das Posi es

Uma série estacionária provoca um efeito temporário, mas que desaparece gradualmente, sem afetar uma série em um período tão longo de tempo. Entretanto, quando esse choque não   rapidamente dissipado, alguns testes e transforma es podem ser aplicados com a finalidade de verificar a presença desses componentes, como a presença de ra es unitárias ou tendência estocástica (Gujarati, 2011). Logo, a constata o de estacionariedade em séries temporais   similar a testar a existência de uma raiz unitária. Caso a série seja estacionária em nível,   integrada de ordem zero ou I (0). Caso seja preciso transformar a série para estacion la pela primeira ordem, a série torna-se integrada de ordem um ou I (1).

Para isso, foram aplicados, nesta pesquisa, os testes estatísticos Dickey-Fuller Aumentado (ADF) (Dickey & Fuller, 1979), Phillips-Perron (Phillips & Perron, 1988) e KPSS (Kwiatkowski et al., 1992), convencionalmente indicados para verificar a estacionariedade em séries temporais, destacados durante esta análise. A hipótese nula do teste ADF   de que a série temporal tem uma raiz unitária, logo, não estacionária. Com isso, a um nível de 5% de significância, o *p-valor* deve rejeitar a hipótese nula do teste ADF, aceitando a hipótese alternativa de estacionariedade da série analisada.

Em complemento, o teste Phillips-Perron também   utilizado para verificar a existência de raiz unitária em séries temporais. O teste PP   semelhante ao teste ADF, mas esse teste trata da correla o serial nos termos de erro sem adicionar os termos de diferença defasados (Gujarati, 2011). A hipótese nula do teste   que a série tem raiz unitária, logo, não estacionária, assim como no teste ADF. Por fim, o terceiro teste proposto, o KPSS,   uma alternativa aos testes ADF e PP, uma vez que a

suas hipóteses nulas são de estacionariedade, não existindo, portanto, raiz unitária na série temporal.

Na sequência, como critério para realização das operações, será verificado se o valor do resíduo do observado no dia estudado excede o valor calculado como banda de desvio ( $\sigma$ ) para  $\pm 2\sigma$  (mais ou menos duas vezes o desvio padrão), somado e subtraído da média dos resíduos. Caso o resíduo supere o limite superior ou inferior dos desvios padrões estudados, este será considerado como um sinal de entrada na operação do par. Se superado o limite da banda superior à média, o ativo dependente ( $Y$ ) será vendido e, conseqüentemente, comprado o ativo independente ( $X$ ), na proporção indicada pelo parâmetro do coeficiente linear beta ( $\beta_1$ ) da regressão de período 252. Cabe ressaltar que pares com valores negativos do coeficiente linear  $\beta_1$  não serão considerados. Serão considerados os pares que apresentarem estacionariedade em ao menos 2 dos 3 testes indicados anteriormente.

Já a margem operacional será calculada com base nos parâmetros atuais de mercado com fator de 60% para o volume financeiro do ativo comprado e 140% para o volume financeiro do ativo vendido. Todas as operações que requerem margem, ou não, serão consideradas para a formação das carteiras. Considerando que os  $\beta_1$  das regressões serão considerados para determinação da proporção de compra e, respectiva, venda dos ativos do par, poderão ser considerados pares em que a relação financeira não será necessariamente *cash neutral*. Os critérios considerados de saída, em proporção do desvio padrão dos resíduos, inicialmente, serão de  $0\%\sigma$  (ou igual à média dos resíduos). O ponto de saída será dado quando, no decorrer dos dias seguintes ao sinal de entrada da operação, o valor do resíduo superar ou igualar a proporção do desvio padrão definido para a saída.

## 4. RESULTADOS

Foram analisados 5.927.400 pares em *backtesting* durante todo o período proposto – de janeiro de 2016 a dezembro de 2018 –, ou, ainda, 8.010 pares diários durante 740 pregões. A condição necessária de cointegração foi obtida pelo teste ADF, identificando 126.350 pares cointegrados em todo o período de análise. A média diária da quantidade de pares cointegrados foi de 139 sinais variando para, no máximo, 410 e, no mínimo, de 1 par ao longo do período.

Visando ao melhor equilíbrio do *hedge*, do total de sinais cointegrados, foram desconsiderados, para efeito

## 3.4 Formação das Carteiras e Avaliação dos Resultados

Em sequência, será avaliada a relação estatística entre os retornos dos pares e o nível de volatilidade, propondo a formação de carteiras com critério de escolha baseado na volatilidade, sendo avaliadas e ajustadas diariamente. Propõe-se a restrição de exposição máxima em um único ativo do par, limitada em, no máximo, 80% do valor financeiro total dos dois ativos, não podendo ultrapassar essa proporção, evitando a concentração demasiada em um único ativo do par mantendo o equilíbrio do *hedge*.

Outras restrições podem ser avaliadas, visando à maior diversificação da carteira, podendo ser limitada a exposição em um único ativo como proporção ao total da carteira. O desempenho da carteira será avaliado por seu resultado bruto, risco, IS, correlação e ao desempenho do Ibovespa. O IS, ou retorno por risco, será calculado conforme a Equação 4.

$$IS = \frac{(R_c - R_f)}{\sigma_c} \quad 4$$

em que  $R_c$  será o retorno diário da carteira;  $R_f$  será o retorno diário do CDI para o período, dividido pelo desvio padrão ou risco.

Os resultados serão organizados na forma de tabelas e diagramas, observando o comportamento de cada operação realizada individualmente. O retorno bruto individual de cada par será considerado como a soma dos resultados da parte comprada e vendida da posição. Além disso, será demonstrado o prazo decorrido da operação, resultados da carteira, rentabilidade comparada à carteira de mercado, riscos e correlação dos retornos com os observados do mercado. Por fim, serão avaliados analiticamente, de forma indial e combinada, os critérios que possibilitem a obtenção de resultados superiores, para o período proposto de estudo, do modelo de *pairs trading* por cointegração estatística no mercado acionário brasileiro.

das análises estatísticas e da formação das carteiras, os pares que apresentavam relação financeira entre os ativos superiores a cinco vezes – calculado pela razão entre o valor financeiro bruto da posição do ativo dependente, sobre valor financeiro bruto da posição do ativo independente para cada par e, respectivamente, do independente sobre o dependente. Também foram desconsiderados os pares com coeficiente  $\beta_1$  inferiores a 0,05.

Analisou-se a relação entre os prazos operacionais decorridos e os retornos observados dos 126.350 pares

cointegrados individualmente, mensurado pelo teste de correlação de *Spearman* com  $\rho = -0,246$ ,  $p < 0,001$ ,  $\alpha = 0,01$ . Os retornos dos pares apresentaram uma leve correlação negativa significativa, ou seja, quanto maior o prazo operacional, menores os retornos observados. Apesar da correlação por Pearson ser de grau um pouco mais elevado  $\rho = -0,375$ ,  $p < 0,001$ ,  $\alpha = 0,01$ , em razão da mudança de comportamento observada nos dados, em especial, nos prazos operacionais superiores a 23 pregões que permaneceram fortemente negativas, consideramos o coeficiente de Spearman mais robusto para mensuração da relação não linear observada, entre os retornos individuais dos pares e dos prazos operacionais.

O desempenho dos pares no *backtesting* também foi mensurado com a definição de um critério de *stop*

pelo tempo operacional decorrido desde início de cada operação, definido pelo valor observado do terceiro quartil dos prazos inicialmente obtidos sem critérios de *stop* de 69 dias.

Também foi adotado um critério de *stop* pelas variações do *spread* dos resíduos da regressão, definido em quatro desvios padrões ( $4\sigma$ ) da média, visando a minimizar os movimentos contrários ao sinal operacional do modelo que, eventualmente, por choques adversos nos preços modificaram a relação estatística observada historicamente no período de regressão adotado de 252 dias anteriores ao dia avaliado. Os retornos percentuais das operações apresentaram distribuição não normal, leptocúrtica com curtose  $> 15,64$  (elevada), conforme Tabela 2.

**Tabela 2**

*Estatísticas descritivas do backtesting dos pares cointegrados*

| Estatísticas  | Resultado bruto (%)<br>(Sem stop) | Resultado bruto (%)<br>(Com stop no tempo) | Resultado bruto (%)<br>(Com stop no spread) |
|---------------|-----------------------------------|--|---|
| Média         | -0,0112                           | -0,0073                                    | -0,0026                                     |
| Mediana       | 0,0427                            | 0,0405                                     | 0,0360                                      |
| Desvio padrão | 0,2183                            | 0,1789                                     | 0,1566                                      |
| Mínimo        | -2,7492                           | -2,3326                                    | -2,5123                                     |
| Máximo        | 1,2043                            | 1,2043                                     | 1,2043                                      |
| KS            | Estatística                       | 0,186                                      | 0,153                                       |
|               | <i>p</i> -valor                   | $< 0,001$                                  | $< 0,001$                                   |

KS = Teste de normalidade de Kolmogorov-Smirnov.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Os testes não paramétricos de Mann-Whitney U apontaram diferenças significativas entre os retornos observados das operações com volatilidade anualizada (20 períodos) do ativo dependente superior   mediana das volatilidades diárias ( $Z = -18,509$ ,  $p < 0,001$ ). Nos demais prazos sugeridos para avaliação das volatilidades anualizadas de 60, 120 e 252 períodos, não foram identificadas diferenças significativas dos retornos.

Na comparação dos prazos operacionais decorridos entre os pares de maior volatilidade do ativo dependente, com diferença significativamente maior dos prazos

operacionais para os ativos dependentes com volatilidade maior que a mediana dos ativos em um mesmo dia ( $Z = 5,435$ ,  $p < 0,001$ ).

Dessa forma, verificando se os retornos permanecem quando operacionalizados sistematicamente por meio da formação de carteiras em longo prazo, avaliou-se o desempenho entre uma carteira composta aleatoriamente por qualquer dos pares sem restri es e outra carteira composta por pares que apresentavam volatilidade anualizada (20 períodos) do ativo dependente, superior   mediana das volatilidades dos demais pares para o dia da operação.

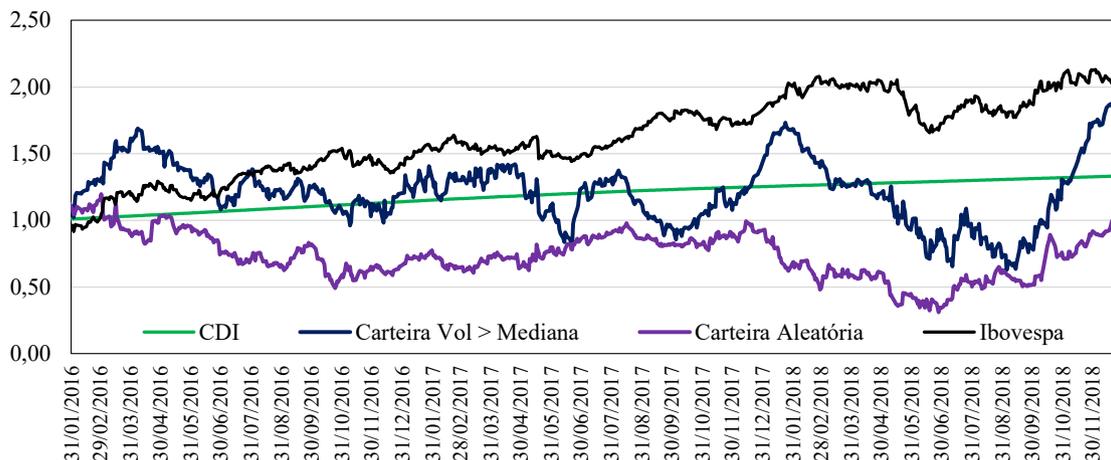
**Tabela 3**

*Desempenho das carteiras*

|                                      | Retornos acumulados | Desvio padrão |  ndice de Sharpe |
|--------------------------------------|---------------------|---------------|------------------|
| Carteira com volatilidade > Medianas | 85,20%              | 0,0430        | 0,50             |
| Carteira aleatória                   | 0,66%               | 0,0424        | 0,19             |
| Ibovespa                             | 108,56%             | 0,0144        | 0,78             |
| CDI                                  | 33,26%              |               |                  |

A carteira proposta com critério de volatilidade superior às medianas diárias apresentou, ao final do período, desempenho superior ao da carteira de escolha aleatória dos pares de ativos, obtendo um Índice de Sharpe de 0,50 contra 0,19 da carteira aleatória. Também com maior número de operações 154, contra 107 na carteira aleatória.

Contudo, as médias dos retornos observados entre as carteiras não apresentaram diferenças estatisticamente significativas (Mann-Whitney U:  $Z = -0,522$ ,  $p > 0,60$  e Kolmogorov-Smirnov:  $Z = 0,764$ ,  $p > 0,60$ ). Na Figura 1, observa-se o desempenho das carteiras propostas e o Ibovespa.



**Figura 1** Desempenho das Carteiras vs. Ibovespa e CDI

Fonte: Elaborado pelos autores.

As carteiras propostas apresentaram resultados inferiores ao Ibovespa no período estudado. Contudo, as carteiras apresentaram baixa correlação de Pearson

com os retornos do Ibovespa para períodos de 100 dias, característica das operações de *pairs trading*, conforme Figura 2.

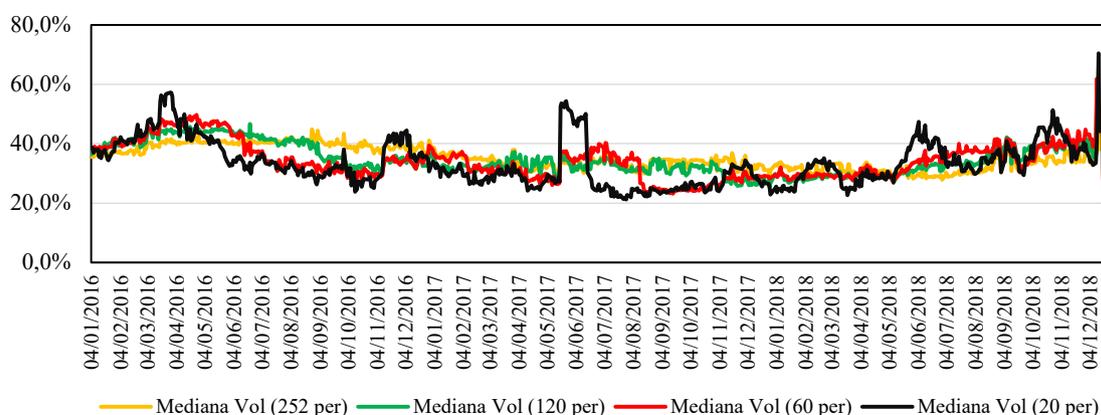


**Figura 2** Correlação de Pearson (100 períodos) entre retorno das carteiras vs. Ibovespa

Fonte: Elaborado pelos autores.

Durante a montagem da carteira com maiores volatilidades, foram considerados os pares com volatilidades superiores às medianas de 20 períodos ao longo do período por apresentarem resposta mais rápida

às variações de mercado. Na Figura 3 são demonstradas as medianas diárias dos ativos dependentes, mensuradas de acordo com as volatilidades de 20, 60, 120 e 252 períodos.



**Figura 3** Medianas da volatilidade dos ativos.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Por meio da análise individualizada dos pares cointegrados durante todo o período proposto, alguns pares apresentaram sinais mais frequentes de cointegra o e enquadramento nos critérios operacionais que outros – em alguns casos, com  ndice de assertividade acima

de 90% dos sinais com retornos positivos entre cada período de opera o, enquanto um total de 1.804 pares, ou 22,52% do total de pares, não apresentou nenhum sinal operacional de acordo com critérios de entrada no período.

**Tabela 4**

Distribui o de frequência dos sinais cointegrados em fun o dos retornos

| Intervalo percentual de sucesso dos sinais* | Frequência | Frequência percentual | Prazo médio operacional (Retornos positivos) | Prazo médio operacional (Retornos negativos) |
|---|------------|-----------------------|--|--|
| 0,00  — 0,10                                | 1.211      | 19,51%                | 2,6  | 49,5   |
| 0,10  — 0,20                                | 231        | 3,72%                 | 28,0   | 51,0   |
| 0,20  — 0,30                                | 334        | 5,38%                 | 28,9   | 51,7   |
| 0,30  — 0,40                                | 308        | 4,96%                 | 29,2   | 46,7   |
| 0,40  — 0,50                                | 333        | 5,37%                 | 30,5   | 47,4   |
| 0,50  — 0,60                                | 539        | 8,69%                 | 30,2   | 46,9   |
| 0,60  — 0,70                                | 508        | 8,19%                 | 28,8   | 43,5   |
| 0,70  — 0,80                                | 462        | 7,44%                 | 30,7   | 48,0   |
| 0,80  — 0,90                                | 511        | 8,23%                 | 31,2   | 44,2   |
| 0,90  — 1,00                                | 1.769      | 28,50%                | 34,2   | 7,7  |
| Total                                       | 6.206      |                       | 27,4**                                       | 43,7**                                       |

\*Calculado pelo percentual de sinais com retornos positivos em rela o ao total de sinais cointegrados por par cointegrado.

\*\*Média dos prazos operacionais.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Na Tabela 4   possível observar que, do total de pares cointegrados, as opera es com retornos positivos apresentaram prazos médios operacionais inferiores em rela o às opera es que resultaram em prejuízos financeiros. Tal forma de observar corrobora o grau de correla o fracamente observado entre os retornos dos pares em rela o aos prazos operacionais, com resultados

decrecentes em razão da demora do par em retornar   média de longo prazo dos resíduos.

Entretanto, ao analisar de forma agrupada, os pares não apresentaram rela o estatisticamente relevante em rela o aos prazos operacionais. Em rela o aos níveis de volatilidade, nenhum outro fator de causalidade foi identificado quando cruzado com os prazos operacionais.

**Tabela 5***Pares com maior número de sinais cointegrados em todo período de análise (25 maiores)*

| Pares cointegrados | Número de sinais | Sinais com retornos positivos | Sinais com retornos negativos | Percentual de sucesso dos sinais* | Prazo médio (Sinais positivos) | Prazo médio (Sinais negativos) |
|--------------------|------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| MULT3 x CYRE3      | 103              | 18                            | 85                            | 17,48%                            | 21                             | 80                             |
| MULT3 x BRML3      | 102              | 51                            | 51                            | 50,00%                            | 33                             | 56                             |
| MULT3 x EZTC3      | 86               | 44                            | 42                            | 51,16%                            | 41                             | 70                             |
| TIMP3 x ALUP11     | 84               | 44                            | 40                            | 52,38%                            | 20                             | 39                             |
| BBDC4 x BBDC3      | 83               | 82                            | 1                             | 98,80%                            | 29                             | 52                             |
| MULT3 x BBDC3      | 82               | 51                            | 31                            | 62,20%                            | 40                             | 57                             |
| BOVA11 x ALUP11    | 82               | 64                            | 18                            | 78,05%                            | 36                             | 40                             |
| VIVT4 x EZTC3      | 81               | 56                            | 25                            | 69,14%                            | 16                             | 54                             |
| CVCB3 x VIVT4      | 80               | 50                            | 30                            | 62,50%                            | 29                             | 50                             |
| BOVA11 x ITUB4     | 79               | 68                            | 11                            | 86,08%                            | 37                             | 32                             |
| ALUP11 x SBSP3     | 78               | 45                            | 33                            | 57,69%                            | 22                             | 24                             |
| RAPT4 x ALUP11     | 78               | 49                            | 29                            | 62,82%                            | 29                             | 52                             |
| PETR4 x PETR3      | 78               | 48                            | 30                            | 61,54%                            | 33                             | 75                             |
| TIMP3 x BRSR6      | 78               | 35                            | 43                            | 44,87%                            | 20                             | 76                             |
| BBDC4 x BOVA11     | 76               | 65                            | 11                            | 85,53%                            | 27                             | 32                             |
| B3SA3 x RAPT4      | 75               | 57                            | 18                            | 76,00%                            | 13                             | 28                             |
| EZTC3 x CYRE3      | 75               | 71                            | 4                             | 94,67%                            | 29                             | 24                             |
| MULT3 x ALUP11     | 74               | 35                            | 39                            | 47,30%                            | 47                             | 35                             |
| TIMP3 x ITSA4      | 74               | 59                            | 15                            | 79,73%                            | 19                             | 143                            |
| ITSA4 x BBAS3      | 73               | 59                            | 14                            | 80,82%                            | 43                             | 38                             |
| EQTL3 x EZTC3      | 72               | 36                            | 36                            | 50,00%                            | 26                             | 27                             |
| ECOR3 x ARZZ3      | 71               | 39                            | 32                            | 54,93%                            | 24                             | 68                             |
| MULT3 x B3SA3      | 71               | 42                            | 29                            | 59,15%                            | 32                             | 58                             |
| MULT3 x DTEX3      | 71               | 35                            | 36                            | 49,30%                            | 28                             | 43                             |

\*Calculado pelo percentual de sinais com retornos positivos em relação ao total de sinais cointegrados por par cointegrado.

Fonte: Elaborado pelos autores.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve como objetivo avaliar os efeitos da volatilidade dos ativos sobre o desempenho das operações de arbitragem estatística por *pairs trading*, propondo a composição de uma carteira utilizando a volatilidade como critério de decisão. Realizou um amplo *backtesting* das 5.927.400 combinações de pares ao longo do período de estudo, identificando as relações de cointegração das séries de preços, de acordo com os pressupostos do modelo estatístico de arbitragem por *pairs trading* com ações.

Os resultados encontrados indicaram que a carteira composta por ativos de maiores volatilidades obteve resultado de 85,2% no período, ou ainda, 22,8% anualizados, superando, assim, a carteira composta por pares aleatórios sem a definição de critério por volatilidade. Contudo, não superou o retorno acumulado

do Ibovespa de 108,56% nesse período, algo considerado atípico no mercado brasileiro. Dessa forma, corroborou a análise realizada de significância estatística dessa relação, demonstrando que quanto maior a volatilidade, menores os prazos operacionais e maiores os retornos observados. A adoção de critérios de *stop* com base no prazo operacional e no *spread* dos resíduos aumentou a média dos retornos da amostra dos pares utilizada para a formação das carteiras.

O modelo de arbitragem por *pairs trading* propicia uma variedade de estratégias que visam à obtenção de retornos neutros em relação aos retornos de mercado, com uma proposta objetiva da análise dos critérios de decisão para escolha dos ativos e para a formação das carteiras, que pode ser replicada em qualquer período.

Constatamos resultados que ressaltam a característica de baixa correla o dos retornos das carteiras e do  ndice de mercado, na maior parte do período proposto.

Contudo, encontramos limita es na capacidade de processamento dos dados em razão do grande número de pares identificados diariamente para realizar a análise de todas as combina es possíveis das carteiras no período para avaliar a dispersão e consistência dos resultados observados e possibilidade de replica o em períodos distintos ao da amostra.

A aplica o do modelo de arbitragem *ad hoc* sem análises complementares das rela es de equilíbrio de longo prazo dos ativos avaliados não garante resultados diferenciados da média do mercado. Como sugestão para

trabalhos futuros,   fundamental analisar os aspectos que afetam o equilíbrio estatístico do modelo visando a mitigar os riscos de mercado da estratégia, principalmente aqueles relacionados aos prazos operacionais. Sobre os fatores que interferem na estacionariedade da rela o estatística dos pares, indicamos utilizar, como critério, diferentes períodos para análise da estacionariedade dos pares, além de considerar um período maior de análise e maior quantidade de ativos líquidos. Estudos que realizem uma varia o dos critérios de entrada e saída das opera es, como bandas de desvios em fun o da volatilidade do papel, ou, ainda, limitando o prazo operacional para horizontes menores, podem contribuir para a assertividade do modelo e a melhoria dos retornos ajustados aos riscos de mercado.

## REFERÊNCIAS

- Alexander, C. (2005). *Modelos de mercado: um guia para a análise de informa es financeiras*. São Paulo, SP: Saraiva.
- Alexander, C. (1999). Optimal hedging using cointegration. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 357(1758), 2039-2058.
- Caldeira, J. F., & Moura, G. V. (2013). Selection of a portfolio of pairs based on cointegration: a statistical arbitrage strategy. *Brazilian Review of Finance*, 11(1), 49-80.
- Copeland, T. E., Weston, J. F., & Shastri, K. (2005). *Financial theory and corporate policy*. Boston, MA: Addison-Wesley.
- Cutler, D. M., Porterba, J. M., & Summers, L. H. (1990). *Speculative dynamics*. National Bureau of Economic Research. Working paper n. 3242.
- Davidson, J., & Hall, S. (1991). Cointegration in recursive systems. *Economic Journal, Royal Economic Society*, 101(405), 239-251.
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 427-431.
- Engle, R. F., & Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation and testing. *Econometrica*, 55(2), 251-276.
- Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, 25(2), 383-417.
- Fama, E. F. (1998). Market efficiency, long-term returns, and behavioral finance. *Journal of Financial Economics*, 49(3), 283-306.
- Figueiredo, L. F. C. C. (2017). *Pairs Trading: aplica o da distância m nima*. (Disserta o de Mestrado). Universidade Católica Portuguesa, Porto.
- Fortuna, E. (2008). *Mercado financeiro: produtos e serviços*. São Paulo, SP: Qualitymark.
- Gatev E., Goetzmann W. N., & Rouwenhorst K. G. (2006). Pairs trading: performance of a relative value arbitrage rule. *The Review of Financial Studies*, 19(3), 797-827.
- Granger, C. J. (1981). Some properties of time series data and their use in econometric model specification. *Journal of Econometrics*, 16(1), 121-130.
- Granger, C. W. J., & Engle, R. F. (1985). *Dynamic model specification with equilibrium constraints*. Mimeo. University of California, San Diego, CA.
- Granger, C. W. J., & Weiss, A. A. (1983) Time series analysis of error correction models. In S. Karlin, T. Amemiya & L. A. Goodman (Eds.), *Studies in Econometrics, Time Series, and Multivariate Statistics* (p. 255-278). New York: Academic Press.
- Gujarati, D. N. (2011). *Econometria b sica*. Porto Alegre, RS: AMGH.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Hendry, D. F. (1995). *Dynamic econometrics: advanced texts in econometrics*. Oxford: Oxford University Press.
- Hendry, D. F. (1986). Econometric modelling with cointegrated variables: an overview. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 48(3), 201-212.
- Johansen, S. (1988). Statistical analysis of cointegration vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12(2-3), 231-254.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how sure are we that economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*, 54(1-3), 159-178.
- Lucas, A. (1997). Strategic and tactical asset allocation and the effect of long-run equilibrium relations. Serie Research Memoranda 42. VU University Amsterdam, Faculty of Economics, Business Administration and Econometrics.
- Murray, M. P. (1994). A drunk and her dog: an illustration of cointegration and error correction. *The American Statistician*, 48(1), 37-39.
- Oliveira, A. G. (2017). *Análise do efeito de crises sobre estratégias de pairs trading no Brasil* (Disserta o de Mestrado). Funda o Getúlio Vargas, Rio de Janeiro.

- Philips, P. C. (1989). *Optimal inference in cointegrated systems*. Cowles Foundation for Research in Economics. Discussion Paper n. 866 R.
- Phillips, P. C., & Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75(2), 335-346.
- Pontuschka, M., & Perlin, M. (2015). A estratégia de pares no mercado acionário brasileiro: O Impacto da frequência de dados. *Revista de Administração Mackenzie*, 16(2), 188-213.
- Pucciarelli, A. J. (2014). *Estratégia de cointegração dinâmica empírica para arbitragem estatística e trading*. (Dissertação de Mestrado). Fundação Getúlio Vargas, São Paulo.
- Rad, H., Low, R. K. Y., & Faff, R. (2016). The profitability of pairs trading strategies: distance, cointegration and copula methods. *Quantitative Finance*, 16(10), 1541-1558.
- Sampaio, J. P. P. A. (2016). *Pairs trading: aplicação no mercado de ações brasileiro*. (Monografia). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Santos, J. F. C., & Pessoa, M. S. (2017). Arbitragem estatística entre dois ativos: um estudo da abordagem de cointegração no Brasil entre 2003 e 2014. *Revista de Administração, Contabilidade e Economia da Fundace*, 8(2), 124-139.
- Stock, J. H. (1987). Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors. *Econometrica*, 55(5), 1035-1056.
- Yoshikawa, D. (2017). *An entropic approach for pair trading*. *Entropy*, 19(7), 320.
- Vidyamurthy, G. (2004). *Pairs trading, quantitative methods and analysis*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.