

# Proposta de modelo para a estimativa da resistência característica à tração inclinada de madeiras de folhosas

*Proposal of a model for estimating the tensile strength of hardwoods depending on fiber orientation angle*

João Paulo Boff Almeida 

André Luis Christoforo 

Francisco Antonio Rocco Lahr 

## Resumo

**P**ela complexidade anatômica e variabilidade intrínseca das propriedades encontradas dentro de uma mesma espécie, a madeira tem sido tratada, pelos diversos documentos normativos, como material isotrópico, com valores de resistência e de rigidez determinados por meio de formulações advindas da resistência dos materiais. A falta de informações experimentais, aliada ao desconhecimento da utilização de critérios de resistência para materiais anisotrópicos, aumenta as incertezas na análise de falha das estruturas quanto às estimativas das propriedades de resistência e rigidez em função da orientação das fibras. Com o objetivo de solucionar este problema, modelos empíricos têm sido desenvolvidos e incorporados em diversos documentos normativos nacionais e internacionais. Tais modelos são ajustados em função de um expoente ( $n$ ) que fornece o melhor ajuste, entretanto, mesmo em se tratando do mesmo modelo, ainda há divergências com relação ao uso desse expoente. Nesse contexto, esta pesquisa objetivou propor um modelo para a estimativa do valor característico de resistência à tração inclinada ( $f_{t\theta,k}$ ) e compará-lo com modelos empíricos provenientes da literatura correlata (com os ajustes ótimos do expoente  $n$ ), para evidenciar o melhor ajuste. Os resultados obtidos revelaram que o modelo desenvolvido na pesquisa foi o mais preciso.

**Palavras-chave:** Madeira. Fratura mecânica. Modelos empíricos. Resistência à tração.

## Abstract

*Due to the anatomical complexity and intrinsic variability of properties found in the same species, wood is treated as an isotropic material by various normative codes, where the strength and stiffness values are determined by the strength of materials. The lack of experimental information combined with the lack of knowledge on using strength criteria for anisotropic materials increases the uncertainties in the analysis of structures failures with regards to estimating strength and stiffness properties depending on fiber orientation. To address this issue, empirical models have been developed and incorporated in several Brazilian and international normative documents. Those models are adjusted according to an exponent ( $n$ ) that provides the best fit, however, even in the case of the same model, there are still differences regarding the use of this exponent. Hence, the aim of this study is to propose a model to estimate the characteristic off-axis tensile strength value ( $f_{t\theta,k}$ ), as well as to compare it with empirical models from the literature (with the optimal adjustments of exponent  $n$ ), making it possible to highlight the best fit. The results showed that the model developed in the research study was the most accurate.*

**Keywords:** Wood. Fracture mechanics. Empirical models. Tensile strength.

<sup>1</sup>João Paulo Boff Almeida  
<sup>1</sup>Universidade Federal de São Carlos  
São Carlos - SP - Brasil

<sup>2</sup>André Luis Christoforo  
<sup>2</sup>Universidade Federal de São Carlos  
São Carlos - SP - Brasil

<sup>3</sup>Francisco Antonio Rocco Lahr  
<sup>3</sup>Universidade de São Paulo  
São Carlos - SP - Brasil

Recebido em 08/05/21  
Aceito em 03/02/22

## Introdução

A madeira é um material de fonte natural, renovável e abundante no Brasil. Por apresentar boa relação entre resistência mecânica e densidade, está apta para uso em estruturas diversas (RAKESH; SINHA, 2012; HURMEKOSKI; JONSSON; NORD, 2015; BEECH *et al.*, 2017). Porém, as dimensões das estruturas dependem tamanho do tronco e da capacidade de processamento, o que exige emendas, que são pontos críticos. No entanto, com o avanço tecnológico, a madeira foi transformada em produtos engenheirados, e alternativas para vencer grandes vãos e formas variadas foram desenvolvidas, como é o caso da madeira lamelada colada (entre outras soluções), amplamente utilizada em projetos estruturais por países desenvolvidos, o que também tem motivado o desenvolvimento de pesquisas nessa temática no Brasil (EKEVAD; JACOBSSON; FORSBERG, 2011; MOLINA; CALIL NETO; CHRISTOFORO, 2016).

Por se tratar de um compósito natural anisotrópico, a madeira apresenta desempenhos mecânicos distintos quando solicitada nas direções longitudinal (L), radial (R) e tangencial (T) (KRAJEWSKI; KOZAKIEWICZ; WITOMSKI, 2016; MOHD-JAMIL; KHAIRUL, 2017). Assim, com relação às propriedades de rigidez, fundamentais em um projeto estrutural, bem como às propriedades de resistência, ela possui três módulos de elasticidade longitudinais (E) distintos ( $E_{LR}$ ,  $E_{LT}$ ,  $E_{RT}$ ), três módulos de elasticidade transversais (G) ( $G_{LR}$ ,  $G_{LT}$ ,  $G_{RT}$ ) e, conseqüentemente, três valores dos coeficientes de Poisson ( $\nu_{LR}$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $\nu_{RT}$ ).

Assim, as dificuldades e limitações provenientes das experimentações, aliadas às variabilidades intrínsecas decorrentes da anatomia e de fatores edafoclimáticos, implicam maiores incertezas na obtenção das propriedades desse material. Com base na norma brasileira NBR 7190 (ABNT, 1997) e em documentos normativos internacionais, os valores de resistência e de rigidez em determinada solicitação são estimados pela teoria da resistência dos materiais, que tem como algumas de suas premissas a homogeneidade e a isotropia do material (ZANGIÁCOMO; CHRISTOFORO; LAHR, 2014).

A análise de previsão de falha em estruturas de madeira pode ser realizada com a adoção de critérios de resistência desenvolvidos para materiais anisotrópicos, como é o caso daquele apresentado por Tsai e Wu (1971). Todavia, independentemente da propriedade que se pretende estimar, a utilização do critério de Tsai e Wu (1971) demanda a realização de ensaios uniaxiais de compressão, tração e cisalhamento, o que inviabiliza, muitas vezes, sua aplicação.

Alternativamente, modelos empíricos foram desenvolvidos por pesquisadores diversos das áreas de madeira e de estruturas de madeira para estimar a resistência desse material em função do ângulo de inclinação das fibras ( $\theta$ ), em diversas formas de solicitação (LONGUI *et al.*, 2017). As Equações de 1 a 4 expressam alguns dos modelos empíricos, em que  $f_0$ ,  $f_{45}$  e  $f_{90}$  consistem nos valores de resistência ( $f$ ) determinados experimentalmente com base nas solicitações mecânicas aplicadas paralelamente às fibras ( $0^\circ$ ), a  $45^\circ$  e a  $90^\circ$  de inclinação respectivamente, e  $n$  é o expoente de ajuste dos termos trigonométricos considerado inteiro (1, 2 e 3).

$$f_\theta = \frac{f_0 \cdot f_{90}}{f_0 \cdot \sin^n \theta + f_{90} \cdot \cos^n \theta} \quad \text{Eq. 1}$$

$$f_\theta = \frac{f_0}{1 + \left(\frac{f_0}{f_{90}} - 1\right) \cdot \sin^n \theta} \quad \text{Eq. 2}$$

$$f_\theta = f_0 - (f_0 - f_{90}) \cdot \sin^n \theta \quad \text{Eq. 3}$$

$$f_\theta = \frac{f_0}{\left(\cos^n \theta - \frac{f_0}{f_{90}} \cdot \sin^n \theta\right) \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{f_0}{f_{45}} \cdot \sin^n(2 \cdot \theta)} \quad \text{Eq. 4}$$

A Equação 1, conhecida como fórmula de Hankinson (1921), é utilizada pela NBR 7190 (ABNT, 1997), com expoente  $n = 2$ , na verificação de tensões normais inclinadas, quando o ângulo entre a fibra e o esforço é superior a  $6^\circ$ , e, segundo Kollman e Côté Junior (1984), a expressão de Hankinson, também com expoente  $n = 2$ , tem sido a mais utilizada na previsão dos valores de resistência da madeira a certa solicitação inclinada em relação à direção das fibras.

O modelo expresso pela Equação 2, com  $n = 3$ , sugerido por Karlson *et al.* (1967), trata da estimativa dos valores de resistência para tensões normais inclinadas. Szücs (1992) discute o uso da Equação 3 considerando  $n = 2$ , modelo esse também adotado pelo Deutsches Institut für Normung, na DIN 1052 (DEUTSCHES..., 2007), mas com  $n = 1$ . Keylwerth (1951) também formulou expressão para a estimativa do módulo de elasticidade em função do ângulo de inclinação das fibras considerando  $n = 2$ , que pode também ser adaptada para o cálculo de valores de resistência, como expressa a Equação 4.

Nota-se que, ao considerar um mesmo modelo na estimativa dos valores de resistência para solicitações normais inclinadas, ainda assim há divergência entre autores quanto à definição do expoente  $n$  mais adequado ou que fornece os melhores ajustes, o que tem motivado o desenvolvimento de pesquisas nessa temática.

Os modelos descritos pelas Equações de 1 a 4 também foram utilizados por Logsdon, Finger e Jesus (2014) na determinação dos expoentes  $n$  mais representativos na estimativa da resistência à tração inclinada da madeira de peroba-mica (*Aspidosmerma populifolium*) para os ângulos de inclinação das fibras de  $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $80^\circ$  e  $90^\circ$ . Os valores característicos de resistência à tração ( $f_{t0,k}$ ), necessários para a determinação do valor de resistência de cálculo no projeto estrutural, assim como os obtidos da  $f_{t0}$  por amostra, foram obtidos de acordo com as premissas e os métodos de cálculo presentes na NBR 7190 (ABNT, 1997), sendo utilizados 12 corpos de prova para cada ângulo de inclinação de fibra adotado, o que resultou em 132 determinações dos valores de resistência à tração.

Depois de ensaiados os corpos de prova na tração, Logsdon, Finger e Jesus (2014) determinaram os teores de umidade de uma das partes dos corpos de prova fraturados e fizeram a correção da  $f_{t0}$  e da  $f_{t0,k}$  para o teor de umidade de 12%, que consiste na umidade de equilíbrio estabelecida pela norma brasileira. Com relação aos valores das resistências características obtidas, eles constataram que: para a Equação 1, o melhor ajuste foi obtido com  $n = 2,37$ , e que  $n = 2$ , adotado pela norma brasileira, não é representativo; para a Equação 2, o melhor ajuste foi para  $n = 2,40$ , e que  $n = 3$ , sugerido por Karlsen *et al.* (1967), não é representativo; para a Equação 3, o melhor ajuste foi obtido com  $n = 0,33$ , e que  $n = 1$ , adotado pela norma DIN 1052 (DEUTSCHES..., 2007), assim como  $n = 2$ , proposto por Szücs (1992), não são representativos; para a Equação 4, o melhor ajuste se deu com  $n = 2,53$ , e que  $n = 2$ , recomendado por Keylwerth (1951), é representativo.

Em síntese, Logsdon, Finger e Jesus (2014) concluíram que o modelo apresentado pela Equação 4 (KEYLWERTH, 1951) foi considerado o mais representativo, tanto para o comportamento individual (amostral), médio, quanto para o característico, seguido das Equações 1 e 2, respectivamente Hankinson (1921) e Karlsen *et al.* (1967), com os expoentes adequados.

Para avaliar a influência do ângulo ( $\theta$ ) de inclinação das fibras ( $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  e  $90^\circ$ ) da madeira de *Eucalyptus saligna* nos valores da resistência ao cisalhamento ( $f_{v\theta}$ ) com o uso das Equações de 1 a 4, Carrasco e Mantilla (2016) utilizaram os valores da resistência ao cisalhamento determinados pela NBR 7190:1997, ao utilizarem 12 corpos de prova para cada ângulo de inclinação, sendo tais valores corrigidos para o teor de umidade de 12%, assim como utilizado por Logsdon, Finger e Jesus (2014).

Com relação aos valores das resistências ao cisalhamento, Carrasco e Mantilla (2016) constataram que: para a Equação 1, o melhor ajuste foi obtido com  $n = 1,93$ , e que  $n = 2$  adotado pela norma brasileira também apresentou validade estatística; para a Equação 2, o melhor ajuste foi para  $n = 1,77$ , e que  $n = 3$ , sugerido por Karlsen *et al.* (1967) não é representativo; para a Equação 3, o melhor ajuste foi para  $n = 1,23$ . O valor de  $n = 1$  adotado pela norma DIN 1052 (DEUTSCHES..., 2007) também possui validade estatística, diferentemente do modelo proposto por Szücs (1992) com  $n = 2$ ; para a Equação 4, o melhor ajuste foi para  $n = 1,51$ , e que  $n = 2$  recomendado por Keylwerth (1951) é representativo. Os pesquisadores concluíram que o modelo apresentado pela Equação 3, DIN 1052 (DEUTSCHES..., 2007), com as devidas modificações do expoente  $n$ , foi o mais adequado aos resultados experimentais.

Para verificarem a influência do ângulo de inclinação das fibras ( $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $80^\circ$  e  $90^\circ$ ) da madeira de amescla (*Trattinika burserifolia*), nos valores do módulo de elasticidade à compressão ( $E_{c\theta}$ ), com base na NBR 7190 (ABNT, 1997), Logsdon, Finger e Jesus (2010) prepararam 12 corpos de prova para cada ângulo de inclinação das fibras avaliado e também corrigiram dos valores da  $E_{c\theta}$  para o teor de umidade de 12%.

Com base nos valores médios do módulo de elasticidade à compressão (rigidez efetiva), Logsdon, Finger e Jesus (2010) observaram que: para a Equação 1, o melhor ajuste foi obtido com  $n = 1,67$ , e  $n = 2$ , adotado pela norma brasileira, não apresentou validade estatística; para a Equação 2, o melhor ajuste foi com  $n = 1,61$ , e  $n = 3$ , sugerido por Karlsen *et al.* (1967), não é representativo; para a Equação 3, o melhor ajuste foi obtido com  $n = 0,41$ . O valor de  $n = 1$ , adotado pela norma DIN 1052 (DEUTSCHES..., 2007), e o de  $n = 2$ , sugerido por Szücs (1992), não possuem validade estatística; para a Equação 4, o melhor ajuste foi obtido com  $n = 2,03$ , e  $n = 2$ , recomendado por Keylwerth (1951), também possui validade estatística. Os pesquisadores concluíram que o modelo apresentado pela Equação 4 (KEYLWERTH, 1951) foi o que melhor representou o fenômeno.

Pelo exposto, os trabalhos desenvolvidos com o uso de modelos empíricos objetivaram investigar o mais representativo (entre os modelos disponíveis na literatura) na estimativa das propriedades de resistência ou

de rigidez, para uma espécie específica. Assim, esta pesquisa, com uso das Equações 1 a 4, de modelos de regressão a dois parâmetros (linear, exponencial, logarítmico e geométrico) e de cinco espécies de madeira de florestas plantadas do grupo das folhosas (distribuídas nas classes de resistência da norma brasileira), avalia os coeficientes  $n$  das equações e propõe um modelo para a estimativa dos valores característicos da resistência à tração ( $f_{t0,k}$ ) inclinada a serem utilizados na estimativa dos valores de cálculo, fundamentais para o dimensionamento estrutural.

## Método

As espécies florestais madeireiras utilizadas na pesquisa foram cedroarana (*Cedrelinga catenaeformis*), louro-preto (*Ocotea* sp.), angelim-amargoso (*Vatairea fusca*), oichu (*Pradosia* sp.) e maçaranduba (*Manilkara huberi*), todas provenientes de florestas nativas e com potencial de uso na construção civil (DIAS; LAHR, 2004). A escolha das espécies foi em razão da possibilidade de abrangência das classes de resistência (C20, C30, C40, C60) do grupo das folhosas estabelecidas pela NBR 7190:1997. Segundo Dias e Lahr (2004), a madeira de cedroarana é da classe C20 ( $20 \text{ MPa} \leq f_{c0,k} < 30 \text{ MPa}$ ), as de louro-preto e angelim-amargoso pertencem à classe C40 ( $40 \text{ MPa} \leq f_{c0,k} < 60 \text{ MPa}$ ), e oichu e maçaranduba são categorizadas na classe C60 ( $f_{c0,k} \geq 60 \text{ MPa}$ ).

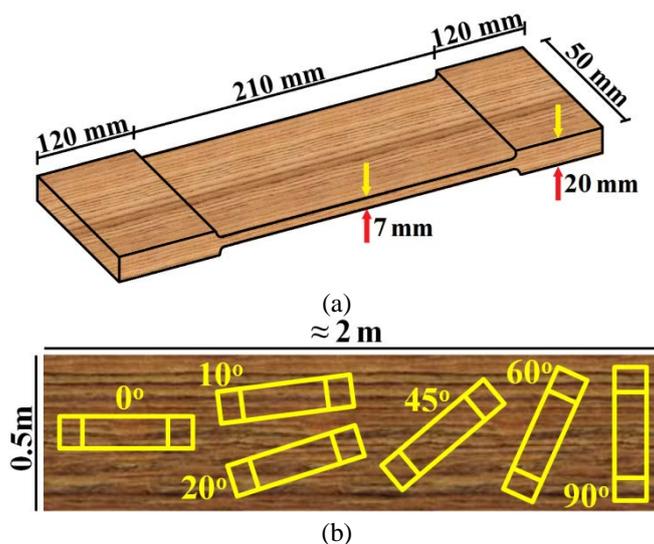
Os valores de resistência à tração das madeiras e as demais propriedades consideradas neste estudo, como a densidade aparente e o teor de umidade, foram determinados de acordo com as premissas e métodos de cálculo da NBR 7190 (ABNT, 1997), cabendo destacar que as tábuas de madeira (dimensões nominais de 2 cm de espessura, 50 cm de largura e 200 cm de comprimento – Figura 1b), pré-processadas para a obtenção dos corpos de prova, foram estocadas em ambiente fechado, de maneira a apresentar teor de umidade próximo de 12%, que consiste na umidade de equilíbrio dessa norma.

Os ângulos de inclinação entre as fibras e a linha de ação das forças de tração consistiram em  $0^\circ$  (direção paralela às fibras),  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$  (Figura 1b). Foram produzidos 12 corpos de prova (Figura 1a) por espécie e para cada ângulo de inclinação das fibras, o que resultou em 180 corpos de prova e 360 determinações dos valores de resistência à tração.

O valor amostral da resistência à tração inclinada ( $f_{t\theta}$ ) foi determinado pela Equação 5, em que  $F_{t\theta,max}$  consiste na força de tração máxima aplicada ao corpo de prova com certa inclinação ( $\theta$ ) em relação às fibras; e  $A$  é a área da seção transversal ( $50 \times 7 \text{ mm}$  – Figura 1b).

$$f_{t\theta} = \frac{F_{t\theta,max}}{A} \quad \text{Eq. 5}$$

Figura 1 - Dimensões (a) e disposição (b) dos corpos de prova para os testes de tração de acordo com a orientação das fibras



Rompidos os corpos de prova na máquina universal de ensaios (AMSLER - capacidade de carga de 25 toneladas), o teor de umidade (U) no momento dos ensaios foi obtido por meio do medidor de umidade por contato Marrari M5 ( $11,23 \leq U \leq 12,71\%$ ). Com posse do teor de umidade das amostras, os valores de resistência à tração inclinada ( $f_{t\theta}$ ) foram corrigidos para o teor de umidade de 12% ( $f_{t\theta,12}$ ) com uso da Equação 6, em que  $f_{t\theta,U}$  consiste na resistência à tração inclinada da amostra associada ao teor de umidade U.

$$f_{t\theta,12} = f_{t\theta,U} \cdot \left[ 1 + \frac{2 \cdot (U-12)}{100} \right] \quad \text{Eq. 6}$$

Com base nos valores corrigidos da resistência à tração ( $f_{t\theta,12}$ ), a Equação 7 foi utilizada para a determinação do valor característico ( $f_{t\theta,k}$ ), em que  $f_1, f_2$  a  $f_n$  denotam os valores da resistência à tração em ordem crescente dos n corpos de prova testados.

$$f_{t\theta,k} = \text{Máx} \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ 0,7 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{n} \\ 1,1 \cdot \left[ 2 \cdot \left( \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{(n/2)-1}}{(n/2)-1} \right) - f_{n/2} \right] \end{array} \right\} \quad \text{Eq. 7}$$

Procurou-se avaliar a influência do ângulo de inclinação das fibras nos valores característicos da resistência à tração em vez dos valores amostrais de resistência, uma vez que a resistência de cálculo, fundamental no projeto de estruturas de madeira, depende do valor característico de resistência (LOGSDON; FINGER, JESUS, 2014).

Os expoentes ótimos das Equações de 1 a 4 por espécie florestal madeireira foram determinados mediante a minimização da Equação 8, que consiste na forma do método dos mínimos quadrados (CHRISTOFORO *et al.*, 2012).

$$f(n) = \frac{1}{2} \cdot \sum \left( f_{t\theta,k}^{(exp)} - f_{t\theta,k}^{(estim)}(n) \right)^2 \quad \text{Eq. 8}$$

Na Equação 8,  $f_{t\theta,k}^{(exp)}$  e  $f_{t\theta,k}^{(estim)}(n)$  denotam respectivamente os valores de  $f_{t\theta,k}$  experimentais e estimados por meio dos modelos empíricos em função do expoente n. A minimização da Equação 8 foi obtida com a equação de recorrência do método de Newton com busca quadrática (Equação 9). A solução ótima da Equação 8 foi considerada com base em uma tolerância para o erro de  $1 \cdot 10^{-3}$ . Como f dependente apenas de uma única variável (n), a estimativa inicial para o processo iterativo do método Newton se embasou na análise gráfica, o que possibilitou reduzir significativamente o número de iterações para a convergência à solução de mínimo de f(n).

$$n_{i+1} = n_i - \left( \frac{d^2 f(n=n_i)}{dn^2} \right)^{-1} \cdot \frac{df(n=n_i)}{dn}; \quad \frac{d^2 f(n=n_i)}{dn^2} \neq 0 \quad \text{Eq. 9}$$

Da Equação 9,  $n_{i+1}$  consiste na estimativa da solução de mínimo do expoente n das Equações 1a a 4 (para cada madeira), dependente da estimativa de n do passo anterior  $n_i$ . Dessa forma, o coeficiente n ótimo para cada um dos quatro modelos empíricos discutidos (Equações 1 a 4) e para cada madeira investigada foi determinado com a minimização da Equação 8.

A proposta de equação para a estimativa do valor característico da resistência à tração inclinada envolvendo o conjunto das cinco espécies florestais madeireiras teve como base modelos de regressão a dois parâmetros ( $\beta_0$  e  $\beta_1$ ), expressos pelas Equações 10 a 13.

$$f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \theta + \varepsilon \text{ (linear)} \quad \text{Eq. 10}$$

$$f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = \beta_0 \cdot e^{\beta_1 \cdot \theta} + \varepsilon \text{ (exponencial)} \quad \text{Eq. 11}$$

$$f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{Ln}(\theta) + \varepsilon \text{ (logarítmico)} \quad \text{Eq. 12}$$

$$f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = \beta_0 \cdot \theta^{\beta_1} + \varepsilon \text{ (geométrico)} \quad \text{Eq. 13}$$

Nessas equações,  $f_{t0,k}$  consiste no valor característico de resistência à tração da madeira obtido na direção paralela às fibras ( $\theta = 0^\circ$ ). A razão entre cada valor característico da tração inclinada ( $f_{t\theta,k}$ ) pelo  $f_{t0,k}$  ( $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$  – adimensional) possibilitou agrupar os resultados obtidos das cinco espécies florestais, de maneira a determinar um modelo representativo para o conjunto delas, e não só para cada uma individualmente, cabendo destacar que os modelos por espécie também foram gerados.

Os modelos de regressão das Equações 10 a 13 foram avaliados por meio da análise de variância (ANOVA, teste F,  $p < 0,05$ ). Pela ANOVA dos modelos de regressão, a hipótese nula estipulada consistiu na não representatividade dos modelos testados ( $H_0: \beta = 0$ ) e na representatividade como hipótese alternativa ( $H_1: \beta \neq 0$ ). P-valor superior ao considerado implica aceitar  $H_0$  (o modelo testado não é representativo – variações

de  $\theta$  são incapazes de explicar as variações em  $f_{t0,k}/f_{t0,k}$ , refutando-a em caso contrário (o modelo testado é representativo). Além do uso da ANOVA, que permite aceitar ou não a representatividade dos modelos testados, os valores do coeficiente de determinação ( $R^2$ ) foram obtidos como forma de avaliar a capacidade das variações da variável independente  $\theta$  em explicar a variável preditiva  $f_{t0,k}/f_{t0,k}$ , possibilitando eleger entre os modelos considerados significativos o de melhor ajuste por relação testada.

Em especial, como os modelos das Equações 12 (logarítmico) e 13 (geométrico) não são definidos para a inclinação  $\theta = 0^\circ$  (direção paralela às fibras), os valores da inclinação  $\theta$  para a estimativa dos valores característicos de resistência à tração devem ser considerados superiores a  $0^\circ$ , arbitrariamente adotado  $\theta \geq 10^\circ$ , uma vez que a NBR 7190 (ABNT, 1997) recomenda o uso da Equação 1 (HANKINSON, 1921) com expoente  $n = 2$  quando o ângulo de inclinação entre a fibra e a solicitação for maior do que  $6^\circ$ . Mesmo não sendo definidas as Equações 12 e 13 para  $\theta = 0^\circ$ , o valor de referência  $f_{t0,k}$  foi considerado nos modelos, ou seja, a estimativa da  $f_{t0,k}$  para um ângulo de inclinação qualquer das fibras ( $\theta \geq 10^\circ$ ) pelos modelos propostos requer apenas a determinação do  $f_{t0,k}$ . Nas Equações 1 a 4, além de ser exigido o conhecimento da  $f_{t0,k}$ , exige-se também o de  $f_{t90,k}$ , e, no caso da Equação 4 (KEYLWERTH, 1951), até o valor de  $f_{t45,k}$ .

## Resultados e discussão

Os valores médios da  $f_{t0}$  e da densidade aparente ( $\rho_{ap}$ ) para cada espécie de madeira avaliada e os valores extremos do coeficiente de variação ( $C_v$ ) constam da Figura 2.

Da Figura 2 destaca-se, assim como o ocorrido na pesquisa de Logsdon, Finger e Jesus (2014), que os menores valores do coeficiente de variação para as cinco espécies foram provenientes da orientação das fibras a  $0^\circ$ , sendo ultrapassado o valor do coeficiente de variação de 28%, conforme solicitações tangenciais, citadas pela NBR 7190 (ABNT, 1997), em decorrência dos ângulos de inclinação das fibras adotados, que resultam em uma forma de ruptura ainda mais frágil (CHRISTOFORO; PANZERA; LAHR, 2019), e isso implica naturalmente maior variabilidade nos valores da  $f_{t0}$ .

Do trabalho de Dias e Lahr (2004), com relação ao valor médio da resistência à tração paralela às fibras ( $f_{t0}$ ), esses foram de 62 MPa para a cedrorana, de 68 MPa para o louro-preto, de 75 MPa para o angelim-amargoso, de 130 MPa para oichu e de 139 MPa para maçaranduba, resultados esses em conformidade com os obtidos na presente pesquisa (Figura 2). Os resultados dos valores característicos (Equação 7) da resistência à tração inclinada para cada madeira avaliada constam da Tabela 1.

Os valores característicos da resistência à tração paralela às fibras encontrados por Dias (2000) para as madeiras de cedroarana, louro-preto, angelim-amargoso, oichu e maçaranduba foram de 45,7 MPa, 53,5 MPa, 51,0 MPa, 91,0 MPa e 109,4 MPa respectivamente. Com exceção do oichu, os resultados da  $f_{t0,k}$  das demais espécies obtidos no presente trabalho se apresentaram próximos dos obtidos na pesquisa de Dias (2000).

Na Tabela 2 são apresentados os valores das razões  $f_{t0,k}/f_{t0,k}$  em função dos ângulos de inclinação das fibras ( $\theta$ ) e para cada espécie de madeira avaliada, sendo tais resultados ilustrados na Figura 3.

Nota-se (Figura 3) a tendência semelhante e próxima do decaimento dos valores de resistência à tração com o aumento do ângulo de inclinação das fibras independente da espécie, e que as razões  $f_{t0,k}/f_{t0,k}$  por madeira são próximas da razão média, o que forneceu subsídios para avaliar uma equação para a estimativa da resistência à tração na direção paralela em função do ângulo de inclinação das fibras e independente da espécie, assim como ocorrem com as equações dos modelos empíricos de estimativa dos valores de resistência em função do ângulo de orientação das fibras da literatura (Equações 1 a 4).

Na Tabela 3 constam os melhores ajustes (eleitos pelo coeficiente de determinação –  $R^2$ ) testados pelas Equações 10 a 13 para a estimativa da  $f_{t0,k}$  por espécie, assim como para o conjunto de espécies avaliadas, cabendo destacar, como discutido anteriormente, que esses devem ser utilizados para o intervalo dos valores de  $\theta$ , entre  $10^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ .

Figura 2 - Resultados dos valores médios da resistência à tração ( $f_{t\theta}$ ) em função do ângulo de inclinação das fibras ( $\theta$ ) e da densidade aparente ( $\rho_{ap}$ ) das espécies estudadas, valores extremos (mínimos e máximos) do coeficiente de variação (Cv)

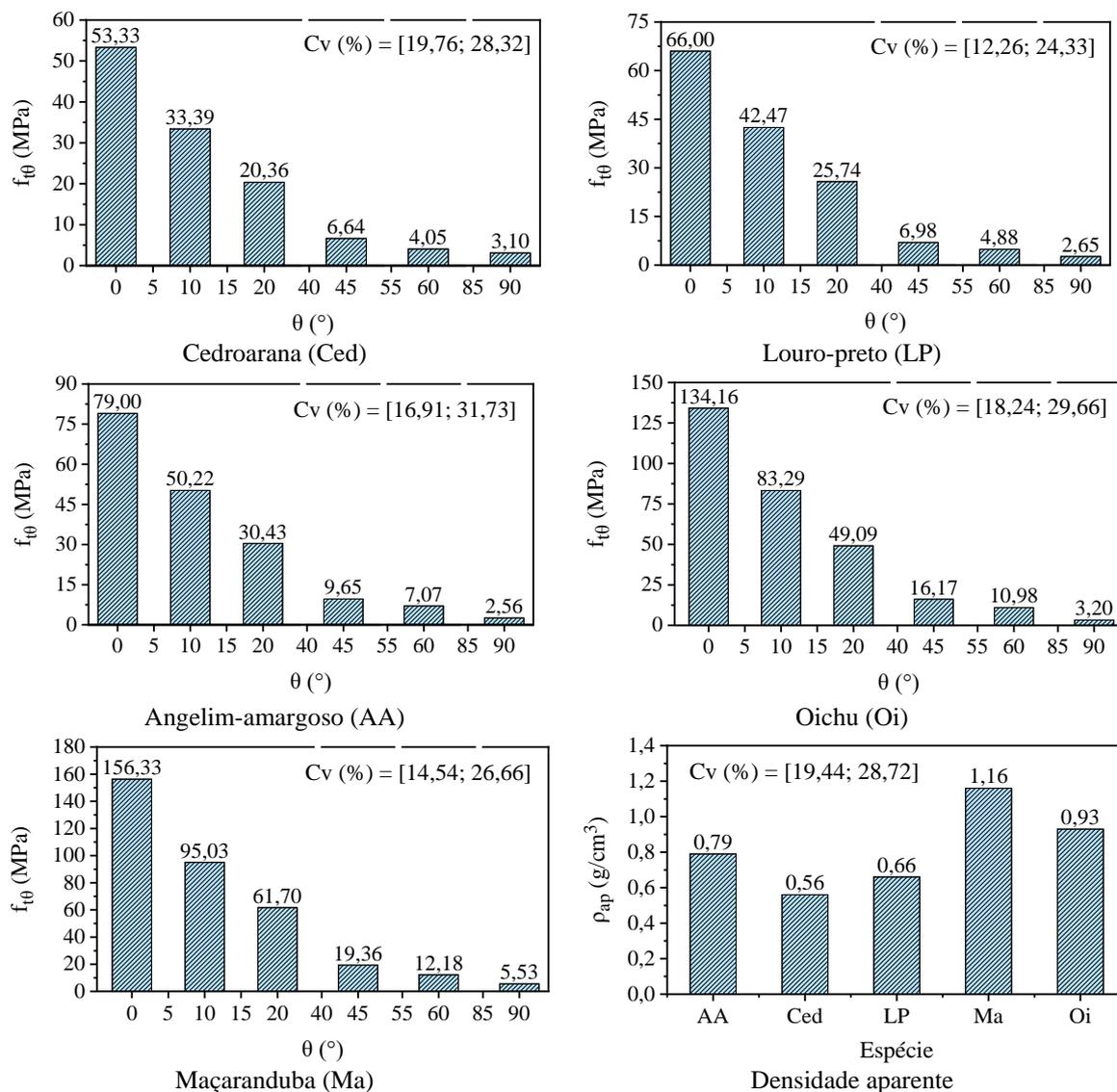


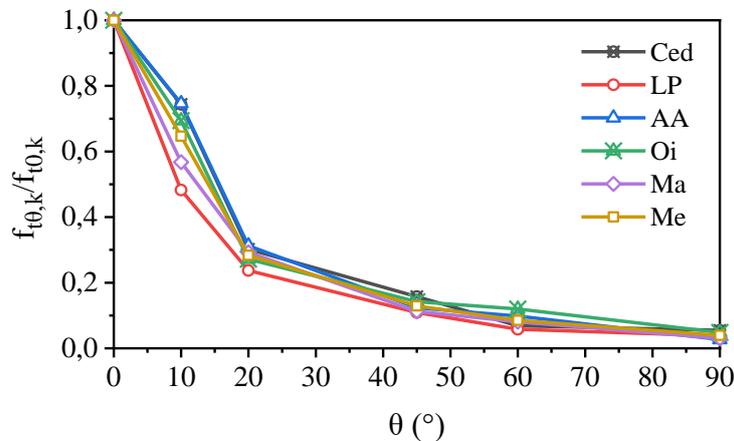
Tabela 1 - Valores característicos da resistência à tração das espécies de madeira em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ )

Espécies	Valores característicos - $f_{t\theta,k}$ (MPa)					
	0°	10°	20°	45°	60°	90°
Cedrorana	33,5	24,91	10,12	5,28	2,3	1,84
Louro-preto	54,07	26,08	12,83	5,91	3,14	2,05
Angelim-amargoso	58,51	43,66	18,29	7,23	5,76	1,57
Oichu	66,65	46,27	18,11	9,48	7,99	3,21
Maçaranduba	111,45	63,22	32,66	12,55	9,03	3,33

Tabela 2 - Valores da razão entre a resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ ) e a resistência característica à tração paralela ( $f_{t0,k}$ ), por espécie de madeira

Espécies	Razões entre valores característicos – $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$					
	0°/0°	10°/0°	20°/0°	45°/0°	60°/0°	90°/0°
Cedrorana	1	0,7436	0,3021	0,1576	0,0687	0,0549
Louro-preto	1	0,4823	0,2373	0,1093	0,0581	0,0379
Angelim-amargoso	1	0,7462	0,3126	0,1236	0,0984	0,0268
Oichu	1	0,6942	0,2717	0,1422	0,1199	0,0482
Maçaranduba	1	0,5672	0,2930	0,1126	0,0810	0,0299
<b>Média do Conjunto</b>	1	0,6467	0,2833	0,1291	0,0852	0,0395
<b>CV (%)</b>	---	18,11	10,52	15,87	28,76	30,16

Figura 3 - Razões entre a resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ ) e a resistência característica à tração paralela ( $f_{t0,k}$ ), para cada espécie de madeira avaliada



Nota: Legenda:  
 - Ced: cedrorana;  
 LP: louro-preto;  
 AA: angelim-amargoso;  
 Oi: oichu;  
 Ma: maçaranduba; e  
 Me: média.

Tabela 3 - Melhores ajustes para a estimativa das razões entre a resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ ) e a resistência característica à tração paralela ( $f_{t0,k}$ ), por espécie de madeira avaliada e para o conjunto de espécies estudadas

Espécie/conjunto	Modelos	R <sup>2</sup> (%)	P-valor
Cedrorana	$f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 11,6649 \cdot \theta^{-1,1980}$	97,32	0,0019
Louro-preto	$f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 7,4206 \cdot \theta^{-1,1594}$	98,65	0,0007
Angelim-amargoso	$f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 0,8529 \cdot \exp^{-0,0386 \cdot \theta}$	97,14	0,0021
Oichu	$f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 8,5654 \cdot \theta^{-1,1024}$	96,44	0,0029
Maçaranduba	$f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 0,6652 \cdot \exp^{-0,0354 \cdot \theta}$	98,25	0,0010
Conjunto	$f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$	98,45	0,0008

Observa-se (Tabela 3) que todos os melhores ajustes foram considerados significativos pela ANOVA (F,  $p < 0,05$ ), e em ambos os casos os coeficientes de determinação foram superiores a 96%, o que revela a excelente precisão das equações obtidas por espécie e também para o conjunto envolvendo as cinco madeiras estudadas.

Ressalta-se que as premissas da ANOVA foram verificadas. A normalidade dos dados foi avaliada pelo teste de Anderson-Darling, resultando em P-valor entre 0,078 e 0,612, enquanto a independência dos resíduos foi avaliada por meio do gráfico resíduos *versus* ordem. Como os P-valores obtidos resultaram maiores que o

nível de significância adotado ( $p < 0,05$ ) e não se observou tendência dos resíduos, garante-se que os pressupostos foram atendidos.

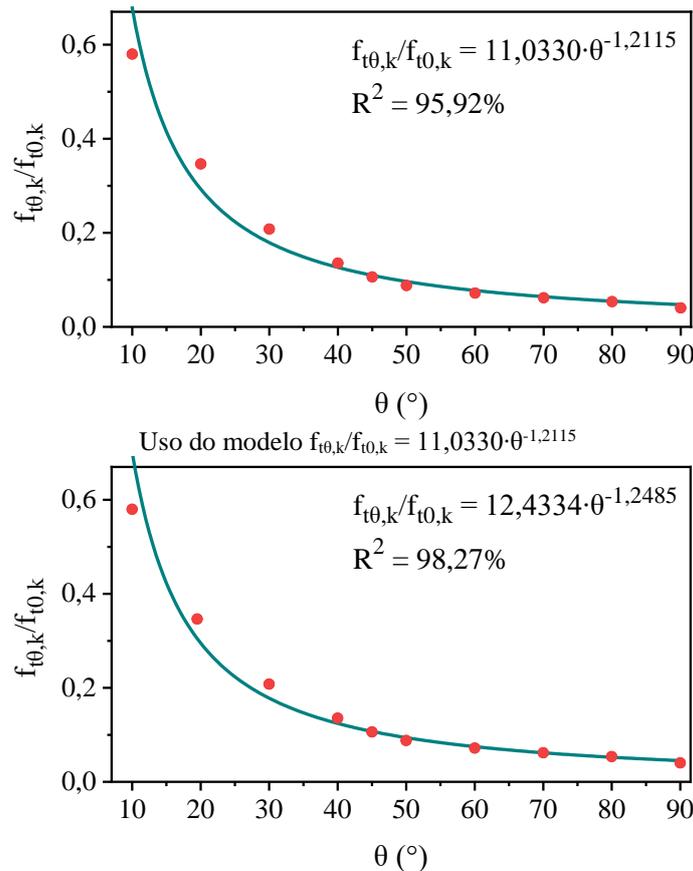
Como forma de testar a precisão da equação para a estimativa da  $f_{t\theta,k}$  desenvolvida nesta pesquisa ( $f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$ , Tabela 3), os resultados da resistência  $f_{t\theta,k}$  determinados por Logsdon, Finger e Jesus (2014) foram colocados sob a forma  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$ . Tais resultados são apresentados na Tabela 4.

Além do uso da Equação  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$  (Tabela 3) para a estimativa da  $f_{t\theta,k}$  sobre os resultados obtidos por Logsdon, Finger e Jesus (2014), um modelo (melhor ajuste entre as Equações 10 a 13) foi desenvolvido considerando os próprios resultados experimentais obtidos pelos autores. A Figura 4 ilustra os ajustes, as equações e os coeficientes de determinação ( $R^2$ ) para ambos os casos.

Tabela 4 - Valores característicos da resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ ) e da razão entre  $f_{t\theta,k}$  e a resistência característica à tração paralela ( $f_{t0,k}$ ), provenientes da pesquisa de Logsdon, Finger e Jesus (2014)

Ângulo $\theta$	Ângulo de inclinação das fibras					
	0°	10°	20°	30°	40°	45°
$f_{t\theta,k}$	32,04	18,58	11,10	6,66	4,34	3,40
$f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$	1	0,580	0,346	0,208	0,135	0,106
$\theta$	50°	60°	70°	80°	90°	
$f_{t\theta,k}$	2,82	2,30	1,98	1,72	1,29	
$f_{t\theta,k}/f_{t0,k}$	0,088	0,072	0,062	0,054	0,040	

Figura 4 - Ajustes da razão entre a resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ ) e a resistência característica à tração paralela ( $f_{t0,k}$ ) obtidos sobre os resultados de Logsdon, Finger e Jesus (2014) e respectivos coeficientes de determinação ( $R^2$ )



Modelo gerado sobre os resultados experimentais dos autores ( $f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 12,4334 \cdot \theta^{-1,2485}$ )

Ambos os modelos (Figura 4) foram considerados significativos pela ANOVA ( $F, p < 0,05$ ), apresentando ainda coeficientes de determinação superiores a 95%. Dessa forma, o modelo proposto possui boa precisão quando aplicado aos resultados da pesquisa de Logsdon, Finger e Jesus (2014). Para maior confiabilidade desses resultados, é necessário utilizar um número maior de espécies, o que pode motivar o desenvolvimento de pesquisas futuras. Nas Tabelas 5 e 6 são apresentados os erros relativos cometidos com o uso das equações  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$  e  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 12,4334 \cdot \theta^{-1,2485}$  sobre os valores experimentais obtidos de Logsdon, Finger e Jesus (2014) respectivamente, reforçando, assim, a boa precisão alcançada com tais equações.

Na Tabela 7 constam os resultados dos coeficientes ótimos  $n$  (minimização da Equação 8) obtidos por espécie de madeira sobre os modelos empíricos da literatura citada (Equações 1 a 4), e na Tabela 8 são apresentadas as estimativas com o uso das Equações 1 a 4 considerando-se os valores ótimos dos coeficientes  $n$ , assim como as estimativas fornecidas pela equação  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$ , desenvolvidos nesta pesquisa ( $f_{t\theta,k}^{(prop.)}$ , Tabela 3).

Da Tabela 7, considerando-se as médias dos coeficientes envolvendo as cinco espécies, os valores de  $n$  para as Equações 1 (HANKINSON, 1921), 2 (KARLSEN *et al.*, 1967), 3 (DEUTSCHES..., 2007) e 4 (KEYLWERTH, 1951) resultaram em  $n = 2,17$ ,  $n = 2,18$ ,  $n = 0,43$  e  $n = 2,28$  respectivamente. Esses resultados estão em conformidade com os obtidos na pesquisa de Logsdon, Finger e Jesus (2014), que encontraram valores de  $n = 2,37$ ,  $n = 2,40$ ,  $n = 0,33$  e  $n = 2,53$  para as Equações 1 a 4 respectivamente.

Tabela 5 - Erros (Er) na estimativa dos valores da razão entre a resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ ) e a resistência característica à tração paralela ( $f_{t0,k}$ ) com o uso do modelo de regressão do conjunto das cinco espécies de madeira da presente pesquisa sobre os resultados do trabalho de Logsdon, Finger e Jesus (2014)

Modelo	$f_{t\theta,k} \text{ (MPa)} = 32,04 \cdot (11,0330 \cdot \theta^{-1,2115})$										
$\theta$	0°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°	90°
$f_{t\theta,k}^*$	32,04	18,58	11,10	6,66	4,34	3,40	2,82	2,30	1,98	1,72	1,29
$f_{t\theta,k}^{**}$	-----	21,72	9,38	5,74	4,05	3,51	3,09	2,48	2,06	1,75	1,52
Er (%)	-----	15,50	13,81	9,60	3,24	12,46	18,95	4,04	1,74	17,83	15,50

Nota:  $f_{t\theta,k}$  (MPa)\*: valores característicos à tração pela inclinação das fibras obtidos da pesquisa de Logsdon, Finger e Jesus (2014);  $f_{t\theta,k}$  (MPa)\*\*: valores característicos estimados pelo modelo de regressão considerando as cinco espécies florestais madeireiras pesquisadas.

Tabela 6 - Erros (Er) na estimativa dos valores da razão entre a resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ ) e a resistência característica à tração paralela ( $f_{t0,k}$ ) com o uso do modelo de regressão desenvolvido para a pesquisa de Logsdon, Finger e Jesus (2014) sobre os resultados amostrais da pesquisa desses mesmos autores

Modelo	$f_{t\theta,k} \text{ (MPa)} = 32,04 \cdot (12,4334 \cdot \theta^{-1,2485})$										
$\theta$	0°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°	90°
$f_{t\theta,k}^*$	32,04	18,58	11,10	6,66	4,34	3,40	2,82	2,30	1,98	1,72	1,29
$f_{t\theta,k}^{**}$	-----	24,37	10,21	6,14	4,28	3,69	3,24	2,57	2,12	1,79	1,55
Er (%)	-----	31,14	7,98	7,78	1,35	8,62	14,75	11,93	7,16	4,33	20,01

Nota:  $f_{t\theta,k}$  (MPa)\*: valores característicos à tração pela inclinação das fibras obtidos da pesquisa de Logsdon, Finger e Jesus (2014);  $f_{t\theta,k}$  (MPa)\*\*: valores característicos estimados pelo modelo de regressão desenvolvido com base nos resultados também de Logsdon, Finger e Jesus (2014).

Tabela 7 - Ajustes ótimos dos coeficientes n referentes aos modelos usuais da literatura para a estimativa da resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ ) para cada madeira avaliada

Modelo	Espécie	n ótimo
$f_{\theta} = \frac{f_0 \cdot f_{90}}{f_0 \cdot \sin^n \theta + f_{90} \cdot \cos^n \theta}$ (Equação 1)	Cedrorana	2,11
	Louro-preto	1,84
	Angelim-amargoso	2,61
	Oichu	2,09
	Maçaranduba	2,19
Modelo	Espécie	n ótimo
$f_{\theta} = \frac{f_0}{1 + (\frac{f_0}{f_{90}} - 1) \cdot \sin^n \theta}$ (Equação 2)	Cedrorana	2,13
	Louro-preto	1,83
	Angelim-amargoso	2,66
	Oichu	2,10
	Maçaranduba	2,20
Modelo	Espécie	n ótimo
$f_{\theta} = f_0 - (f_0 - f_{90}) \cdot \sin^n \theta$ (Equação 3)	Cedrorana	0,49
	Louro-preto	0,30
	Angelim-amargoso	0,52
	Oichu	0,45
	Maçaranduba	0,38
Modelo	Espécie	n ótimo
$f_{\theta} = \frac{f_0}{\left(\cos^n \theta - \frac{f_0}{f_{90}} \cdot \sin^n \theta\right) \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \frac{f_0}{f_{45}} \cdot \sin^n(2 \cdot \theta)}$ (Equação 4)	Cedrorana	2,14
	Louro-preto	1,88
	Angelim-amargoso	2,82
	Oichu	2,13
	Maçaranduba	2,44

A interpolação linear entre os valores experimentais da  $f_{t\theta,k}$  da Tabela 8 foi realizada para cada espécie objetivando mensurar os erros dos modelos matemáticos, da literatura (Equações 1 a 4), assim como o do modelo de regressão a dois parâmetros desenvolvidos nesta pesquisa ( $f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$ , Tabela 3). O erro relativo foi medido com o uso da Equação 14, em que  $\theta_i$  e  $\theta_f$  consistem nos valores-limite dos ângulos de inclinação das fibras e  $f_{t\theta,k}^{(exp)}$  e  $f_{t\theta,k}^{(estim)}$  são os valores característicos experimentais e estimados com os valores de n ótimo respectivamente. Tais erros são apresentados na Tabela 9.

$$Er(\%) = 100 \cdot \frac{\int_{\theta_i}^{\theta_f} |f_{t\theta,k}^{(exp)} - f_{t\theta,k}^{(estim)}| d\theta}{\int_{\theta_i}^{\theta_f} |f_{t\theta,k}^{(exp)}| d\theta} \quad \text{Eq. 14}$$

Da Tabela 9 nota-se que, com exceção da madeira de cedrorana, o modelo desenvolvido nesta pesquisa,  $f_{t\theta,k}^{(prop.)}$ , foi o mais preciso (menores valores do erro relativo) na estimativa da  $f_{t\theta,k}$ . Como comentado anteriormente, modelos mais abrangentes exigem um número maior de espécies, o que motiva o desenvolvimento de outras pesquisas. Com base na Tabela 9, na Figura 5 constam os gráficos dos valores médios dos erros cometidos considerando o conjunto das cinco espécies de madeira.

Da Figura 5, como observado na Tabela 9, o menor erro relativo cometido na estimativa da  $f_{t\theta,k}$  foi proveniente do modelo desenvolvido nesta pesquisa, que forneceu também o menor coeficiente de variação ( $Cv = 13,33\%$ ), sendo assim o mais preciso. Os modelos considerados pelas Equações 1 (HANKINSON, 1921) ou 2 (KARLSEN *et al.*, 1967) também foram precisos e considerados como a segunda melhor aproximação, ficando o terceiro e o quarto melhores ajustes provenientes das Equações 3 (DEUTSCHES..., 2007) e 4 (KEYLWERTH, 1951) respectivamente. Esse resultado é diferente do obtido por Logsdon, Finger e Jesus (2014), que concluíram, para a madeira de peroba-mica, ser o modelo de Keylwerth (1951) (Equação 4) o que melhor representou o fenômeno.

Na Figura 6 constam os gráficos confrontando os resultados experimentais ( $f_{t0,k}^{(exp)}$ ) e os estimados pela equação desenvolvida ( $f_{t0,k}^{(prop.)}$ ), e também pelas Equações 1 a 4 com os valores ótimos de  $n$  determinados para cada espécie de madeira.

Tabela 8 - Estimativas dos valores da resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t0,k}$ ) por espécie florestal

$\theta$	Cedrorana – $f_{t0,k}$ (MPa)					
	$f_{t0,k}^{(exp)}$	$f_{t0,k}^{(prop.)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 1)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 2)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 3)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 4)}$
0°	33,50	----	33,50	33,50	33,50	33,50
10°	24,91	22,71	23,58	23,71	20,07	29,28
20°	10,12	9,91	12,10	12,18	14,79	19,36
45°	5,28	3,67	3,62	3,63	6,79	5,28
60°	2,30	2,59	2,45	2,45	4,00	2,98
90°	1,84	1,59	1,84	1,84	1,84	1,84
$\theta$	Louro-preto – $f_{t0,k}$ (MPa)					
	$f_{t0,k}^{(exp)}$	$f_{t0,k}^{(prop.)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 1)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 2)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 3)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 4)}$
0°	54,07	----	54,07	54,07	54,07	54,07
10°	26,08	36,66	26,71	26,63	23,30	44,75
20°	12,83	15,83	11,87	11,85	16,37	27,32
45°	5,91	5,93	3,74	3,74	7,19	5,91
60°	3,14	4,18	2,64	2,64	4,25	3,20
90°	2,05	2,56	2,05	2,05	2,05	2,05
$\theta$	Angelim-amargoso – $f_{t0,k}$ (MPa)					
	$f_{t0,k}^{(exp)}$	$f_{t0,k}^{(prop.)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 1)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 2)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 3)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 4)}$
0°	58,51	----	58,51	58,51	58,51	58,51
10°	43,66	39,67	43,44	43,52	35,60	56,18
20°	18,29	17,13	18,78	18,94	25,92	36,93
45°	7,23	6,41	3,78	3,79	10,96	7,23
60°	5,76	4,53	2,27	2,27	5,67	3,30
90°	1,57	2,77	1,57	1,57	1,57	1,57
$\theta$	Oichu – $f_{t0,k}$ (MPa)					
	$f_{t0,k}^{(exp)}$	$f_{t0,k}^{(prop.)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 1)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 2)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 3)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 4)}$
0°	66,65	----	66,65	66,65	66,65	66,65
10°	46,27	45,18	44,33	44,23	37,80	57,64
20°	18,11	19,51	21,62	21,66	27,50	37,12
45°	9,48	7,31	6,32	6,32	12,37	9,48
60°	7,99	5,16	4,27	4,27	7,19	5,25
90°	3,21	3,15	3,21	3,21	3,21	3,21
$\theta$	Maçaranduba – $f_{t0,k}$ (MPa)					
	$f_{t0,k}^{(exp)}$	$f_{t0,k}^{(prop.)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 1)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 2)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 3)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 4)}$
0°	111,45	----	111,45	111,45	111,45	111,45
10°	63,22	75,56	65,92	65,96	55,86	100,03
20°	32,66	32,63	27,41	27,42	39,53	61,63
45°	12,55	12,22	6,91	6,90	16,67	12,25
60°	9,03	8,62	4,52	4,52	9,08	6,12
90°	3,33	5,27	3,33	3,33	3,33	3,33

Tabela 9 - Erros percentuais relativos cometidos nas estimativas dos valores de resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t0,k}$ ) pelos modelos

Espécie	$f_{t0,k}^{(prop.)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 1)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 2)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 3)}$	$f_{t0,k}^{(Eq. 4)}$
Cedrorana	12,57%	8,85%	8,78%	22,46%	23,22%
Louro-preto	12,27%	13,82%	13,79%	18,72%	39,94%
Angelim-amargoso	14,89%	18,98%	18,74%	21,20%	39,34%
Oichu	10,56%	14,45%	14,43%	21,12%	29,94%
Maçaranduba	9,06%	21,72%	21,73%	15,79%	36,55%

Figura 5 - Gráficos dos valores médios dos erros cometidos nas estimativas do valor da resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ ) considerando o conjunto das cinco espécies de madeira

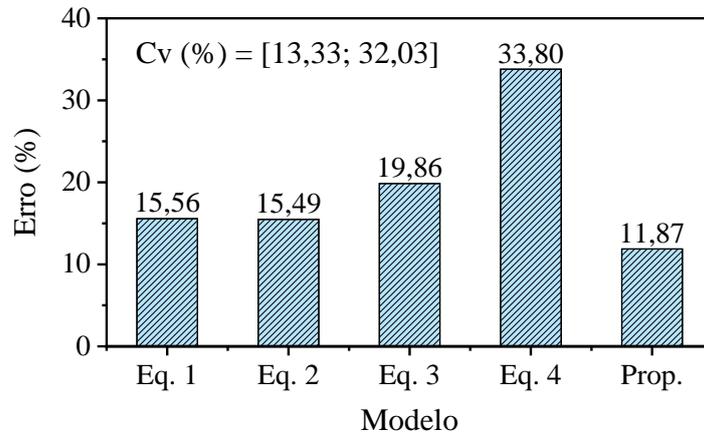
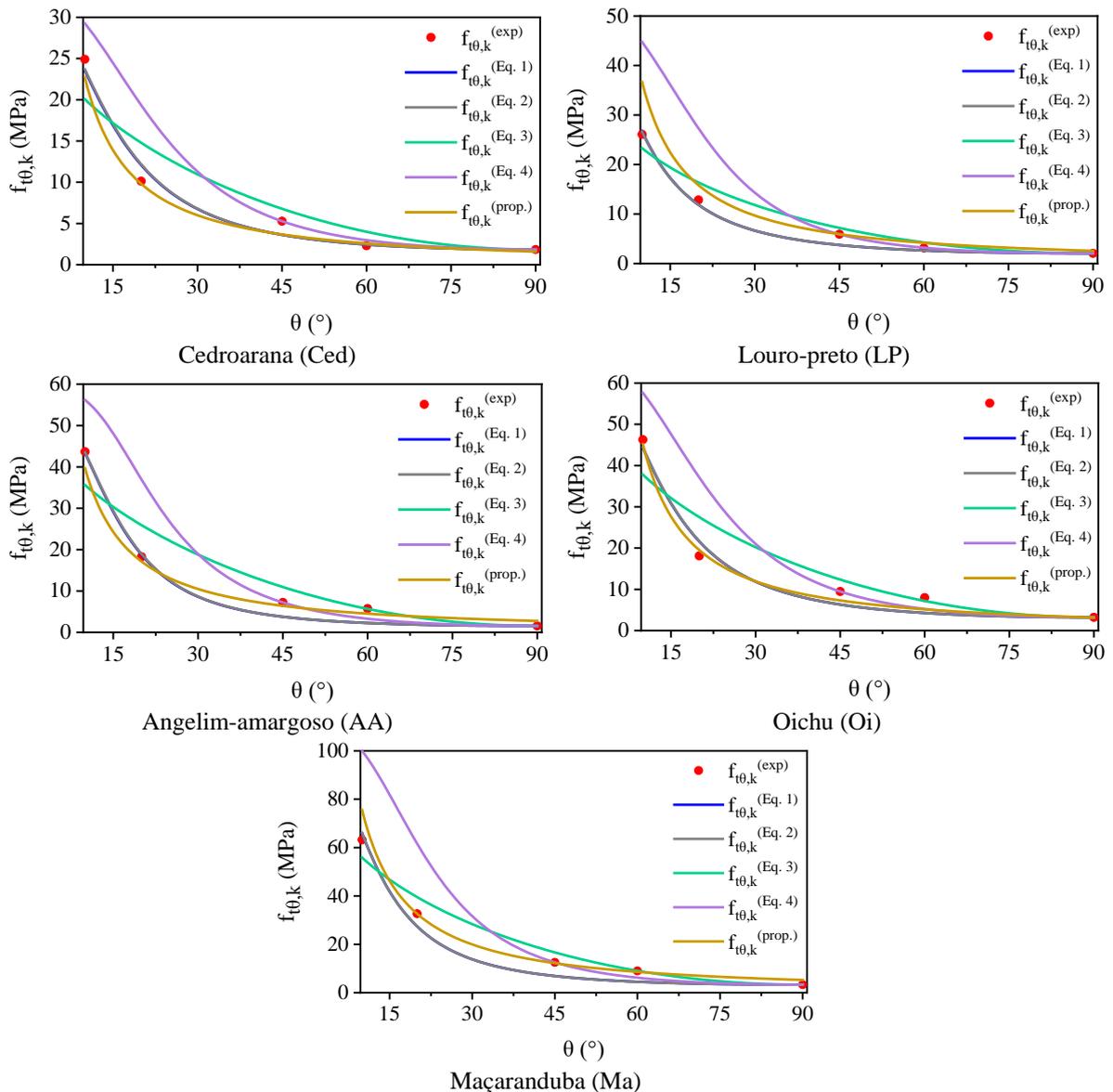


Figura 6 - Gráficos confrontando os valores experimentais e estimados, pelos modelos avaliados, da resistência característica à tração ( $f_{t\theta,k}$ ) em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras



Conhecidos os valores amostrais dos resultados da resistência ao cisalhamento inclinada ( $f_{v\theta}$ ) da madeira de *Eucalyptus saligna* (CARRASCO; MANTILLA, 2016), os valores característicos foram determinados com base na Equação 7 (ABNT, 1997). O modelo desenvolvido para a estimativa dos valores da resistência à tração desta pesquisa ( $f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$ ) foi utilizado na tentativa de se estimarem os valores característicos da resistência ao cisalhamento obtidos por Carrasco e Mantilla (2016). Na Tabela 10 encontram-se os valores obtidos experimentalmente, os estimados pelo modelo desenvolvido e os erros relativos cometidos nas estimativas da  $f_{v\theta,k}$ .

Pela ordem de grandeza dos erros constantes na Tabela 10, destaca-se que o modelo desenvolvido nesta pesquisa deve ser destinado apenas à estimativa dos valores característicos da resistência à tração inclinada, não sendo possível sua extensão a outros tipos de solicitações mecânicas.

Na tentativa de propor um modelo alternativo ante os resultados da  $f_{v\theta,k}$  de Carrasco e Mantilla (2016) para a madeira de *Eucalyptus saligna*, assim como o realizado com os valores característicos da resistência à tração inclinada da madeira de peroba-mica obtidos por Logsdon, Finger e Jesus (2014), modelos de regressão a dois parâmetros foram utilizados. A Equação 15 expressa o melhor ajuste (regressão linear), obtido juntamente com o respectivo coeficiente de determinação, considerado significativo (P-valor = 0,0018) pela ANOVA (F;  $p < 0,05$ ), e na Figura 7 consta o ajuste da função de reta à razão dos valores da  $f_{v\theta,k}$  obtidos experimentalmente.

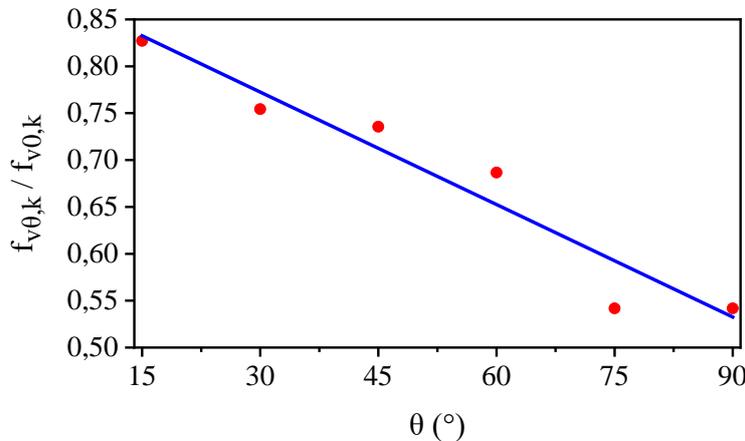
$$f_{v\theta,k}/f_{v0,k} = 0,8925 - 0,0040 \cdot \theta \quad R^2 = 93,14\% \quad \text{Eq. 15}$$

É possível que o modelo da Equação 15 apresentado possa ser utilizado na estimativa dos valores característicos de resistência ao cisalhamento da madeira de *Eucalyptus saligna*, entretanto tal constatação requer o desenvolvimento de pesquisas nessa temática.

Tabela 10 - Comparação entre os resultados das razões dos valores característicos de resistência ao cisalhamento, Carrasco e Mantilla (2016), com o modelo  $f_{t\theta,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$  desenvolvido nesta pesquisa

$\theta$	Carrasco e Mantilla (2016)	Modelo desenvolvido	Erro (%)
0°	13,88	--	--
15°	11,48	5,76	49,83%
30°	10,47	2,49	76,22%
45°	10,21	1,52	85,11%
60°	9,53	1,07	88,77%
75°	7,52	0,82	89,10%
90°	7,52	0,67	91,09%

Figura 7 - Ajuste linear obtido dos resultados das razões entre a resistência característica à tração em função do ângulo  $\theta$  de inclinação das fibras ( $f_{t\theta,k}$ ) e a resistência característica à tração paralela ( $f_{t0,k}$ ) da madeira de *Eucalyptus saligna*, de Carrasco e Mantilla (2016)



## Conclusões

O uso do método dos mínimos quadrados com o emprego de modelos de regressão a dois parâmetros e escritos para a estimativa da razão  $f_{t0,k}/f_{t0,k}$  tiveram boa precisão na estimativa da  $f_{t0,k}$  por madeira e principalmente para o conjunto envolvendo todas as espécies avaliadas. Essa abordagem se configura como alternativa, pois é diferente da abordagem matemática usualmente explorada nos modelos empíricos da literatura.

O modelo proposto ( $f_{t0,k}/f_{t0,k} = 11,0330 \cdot \theta^{-1,2115}$ ) para a estimativa da  $f_{t0,k}$  desta pesquisa foi o mais preciso quando comparado com os modelos explorados da literatura.

O uso da equação desenvolvida aplicada na estimativa do valor característico da resistência ao cisalhamento de pesquisas correlatas não foi preciso, indicando que os modelos devem ser desenvolvidos ou que os valores do coeficiente  $n$  das equações empíricas devem ser ajustados com base no tipo de solicitação mecânica.

Os valores dos expoentes  $n$  das equações empíricas para a estimativa da  $f_{t0,k}$  foram semelhantes aos obtidos da literatura correlata.

Mesmo sendo de boa precisão ( $R^2 = 98,45\%$ ) o modelo desenvolvido na estimativa da  $f_{t0,k}$  para madeiras de folhosas e provenientes de florestas nativas, a obtenção de modelos mais robustos exige maior número de espécies, devendo ser o foco de pesquisas futuras, assim como o estudo e a proposta de outros modelos para outros tipos de solicitações (compressão, cisalhamento, tração e flexão), e também para madeiras de espécies florestais advindas de reflorestamentos (*Pinus* e *Eucalyptus*).

## Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7190**: projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro, 1997.
- BEECH, E. *et al.* GlobalTreeSearch: the first complete global database of tree species and country distributions. **Journal of Sustainable Forestry**, v. 36, p. 454-489, 2017.
- CARRASCO, E. V. M.; MANTILLA, J. N. R. Influência da inclinação das fibras da madeira na sua resistência ao cisalhamento. **Ciência Florestal**, v. 26, n. 2, p. 535-543, 2016.
- CHRISTOFORO, A. L. *et al.* Determination of the longitudinal modulus of elasticity in structural sawn wooden beams by the least squares method. **Vértices**, v. 14, p. 61-70, 2012.
- CHRISTOFORO, A. L.; PANZERA, T. H.; LAHR, F. A. R. Estimation of tensile strength parallel to grain of wood species. **Engenharia Agrícola**, v. 39, p. 533-536, 2019.
- DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. **DIN 1052**: Holbauwerke, Berechnung und Ausführung. Berlin, 2007.
- DIAS, F. M. **A densidade aparente como estimador de propriedades de resistência e rigidez da madeira**. São Carlos, 2000. 146 f. Dissertação (Mestrado em Interunidades Ciência e Engenharia de Materiais) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.
- DIAS, F. M.; LAHR, F. A. R. Estimativa de propriedades de resistência e rigidez da madeira através da densidade aparente. **Scientia Forestalis**, v. 65, p. 102-113, 2004.
- EKEVAD, M.; JACOBSSON, P.; FORSBERG, G. Slip between glue-laminated beams in stress-laminated timber bridges: finite-element model and full-scale destructive test. **Journal of Bridge Engineering**, v. 16, n. 2, p. 188-196, 2011.
- HANKINSON, R. L. **Investigation of crushing strength of spruce at varying angles of grain**. Washington: U.S. Air Servic, 1921. Air Force Information Circular, 259.
- HURMEKOSKI, E.; JONSSON, R.; NORD, T. Context, drivers, and future potential for wood-frame multi-story construction in Europe. **Technological Forecasting & Social Change**, v. 99, p. 181-196, 2015.
- KARLSEN, G. G. *et al.* **Wooden structures**. Moscow: Mir, 1967.
- KEYLWERTH, R. Formänderungen in Holzquerschnitten. **Holz als Roh- und Werkstoff**, v. 9, p. 253-260, 1951.
- KOLLMANN, F. F. P.; CÔTÉ JUNIOR, W. A. **Principles of wood science and technology: I Solid Wood**. New York: Springer-Verlag, 1984.

- KRAJEWSKI, A.; KOZAKIEWICZ, P.; WITOMSKI, P. Shear strength of scots pine (*Pinus sylvestris* L.) from the historical buildings. **Wood Research**, v. 61, n. 5, p. 845-850, 2016.
- LOGSDON, N. B.; FINGER, Z.; JESUS, J. M. H. Influência do ângulo entre as forças e as fibras da madeira na resistência à tração. **Advances in Forestry Science**, v. 1, n. 3, p. 95-100, 2014.
- LOGSDON, N. B.; FINGER, Z.; JESUS, J. M. H. Influência do ângulo entre o esforço aplicado e a direção das fibras da madeira sobre o módulo de elasticidade. **Advances in Floresta**, v. 40, n. 4, p. 837-848, 2010.
- LONGUI, E. L. *et al.* Shear strength parallel to grain with distinct ray orientation on four Brazilian wood species. **European Journal of Wood and Wood Products**, v. 75, n. 4, p. 663-665, 2017.
- MOHD-JAMIL, A. W.; KHAIRUL, M. Variations of mechanical properties in plantation timbers of Jelutong (*Dyera Costulata*) and Khaya (*Khaya Ivorensis*) along the radial and vertical positions. **Journal of Tropical Forest Science**, v. 29, n. 1, p. 114-120, 2017.
- MOLINA, J. C.; CALIL NETO, C.; CHRISTOFORO, A. L. Resistência à tração de emendas dentadas de madeira de *Manilkara huberi* para o emprego em madeira laminada colada. **Ambiente Construído**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, p. 221-227, jan./mar. 2016.
- RAKESH, G.; SINHA, A. Effect of grain angle on shear strength of Douglas-fir wood. **Holzforschung**, v. 66, n. 5, p. 655-658, 2012.
- SZÜCS, C. A. Estudo do comportamento da madeira a esforços inclinados. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, 4., São Carlos, 1992. **Anais [...]** São Carlos: Instituto Brasileiro das Madeiras e das Estruturas de Madeira, 1992.
- TSAI, S. W.; WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. **Journal of Composite Materials**, n. 1, v. 5, p. 58-80, 1971.
- ZANGIÁCOMO, A. L.; CHRISTOFORO, A. L.; LAHR, F. A. R. Módulo de elasticidade aparente em vigas roliças estruturais de madeira *Pinus elliottii*. **Ambiente Construído**, Porto Alegre, v. 14, n. 1, p. 7-13, jan./mar. 2014.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (Capes) – Código de Financiamento 88887.484245/2020-00.

### João Paulo Boff Almeida

Departamento de Engenharia Civil | Universidade Federal de São Carlos | Rodovia Washington Luís (SP-310), km 235 | São Carlos - SP - Brasil | CEP 13565-905 | Tel.: (16) 3351-8262 | E-mail: boff.joaopaulo@gmail.com

### André Luis Christoforo

Departamento de Engenharia Civil | Universidade Federal de São Carlos | E-mail: christoforoal@yahoo.com.br

### Francisco Antonio Rocco Lahr

Departamento de Engenharia Civil | Universidade de São Paulo | Av. Trabalhador São Carlense, 400, Centro | São Carlos - SP - Brasil | CEP 13566-590 | Tel.: (16) 3373-8206 | E-mail: frocco@sc.usp.br

### *Ambiente Construído*

Revista da Associação Nacional de Tecnologia do Ambiente Construído

Av. Osvaldo Aranha, 99 - 3º andar, Centro

Porto Alegre - RS - Brasil

CEP 90035-190

Telefone: +55 (51) 3308-4084

www.seer.ufrgs.br/ambienteconstruido

www.scielo.br/ac

E-mail: ambienteconstruido@ufrgs.br



This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License.