

Uma Análise de Monte Carlo do Desempenho de Estimadores de Matrizes de Covariância sob Heterocedasticidade de Forma Desconhecida*

Francisco Cribari-Neto**

Matheus Cabral de Araújo Gois***

Sumário: 1. Introdução e motivação; 2. O modelo e estimadores; 3. Resultados; 4. Conclusões.

Palavras-chave: bootstrap; heterocedasticidade; homocedasticidade; matrizes de covariância; regressão linear; viés.

Códigos JEL: C51, C52, C13 e C12.

Este artigo analisa o desempenho em amostras finitas do estimador consistente de matrizes de covariância proposto por Halbert White. O comportamento deste estimador é estudado tanto sob homocedasticidade quanto sob heterocedasticidade usando métodos de simulação Monte Carlo. Este estimador pode apresentar viés significativo para amostras de tamanho pequeno a moderado. O desempenho em amostras finitas de estimadores de *bootstrap* e analiticamente corrigidos também é analisado. Os resultados numéricos favorecem os estimadores corrigidos analiticamente em relação ao estimador obtido a partir de um esquema de reamostragem de *bootstrap*. Três estimadores alternativos que são construídos como variações do estimador originalmente proposto por White são também analisados. Os resultados revelam, ainda, a influência de pontos de alta alavancagem sobre o desempenho dos diversos estimadores.

This paper analyzes the finite-sample performance of the consistent covariance matrix estimator proposed by Halbert White under both homoskedasticity and heteroskedasticity using Monte Carlo simulation methods. It shows that this estimator can be quite biased in samples of small to moderate sizes, thus leading to associated quasi-*t* tests with large size distortions. The finite-sample performance of bootstrap and bias-corrected estimators is also investigated. The numerical results favor the analytically corrected estimators over the one obtained from a weighted bootstrapping scheme. The paper analyzes the finite-sample of three alternative estimators, which are defined as small variations of the White estimator. Finally, the results also show that the existence of points of high leverage in the regression matrix has a substantial impact on the finite-sample performance of the different covariance matrix estimators.

* *Artigo recebido em out. 2000 e aprovado em fev. 2001. Os autores agradecem o apoio financeiro parcial do CNPq, bem como os comentários, críticas e sugestões de dois pareceristas anônimos.*

** *Departamento de Estatística da Universidade Federal de Pernambuco.*

*** *Centro de Informática da Universidade Federal de Pernambuco.*

1. Introdução e Motivação

Muitas aplicações práticas envolvem modelagem de regressão onde o comportamento de uma variável de interesse é explicado a partir de sua relação com variáveis auxiliares, em geral assumindo-se que esta relação seja linear. Uma suposição constantemente feita é a de *homocedasticidade*, ou seja, assume-se que todos os erros do modelo possuem variâncias idênticas. Contudo, esta suposição é violada em muitas situações, especialmente quando o interesse reside na modelagem de dados de corte transversal. Neste caso, é muito comum que os dados apresentem *heterocedasticidade*, ou seja, variâncias condicionais não-constantes. O estimador de mínimos quadrados ordinários (EMQO) dos parâmetros lineares de regressão permanece não-viesado e consistente mesmo que incorretamente se assuma homocedasticidade, não sendo mais, contudo, o melhor estimador linear não-viesado. O estimador de MQO da matriz de covariância das estimativas dos parâmetros de regressão passa a ser viesado e inconsistente. Uma prática comum é a utilização de estimativas de MQO quando se suspeita da presença de heterocedasticidade, já que estas são não-viesadas e consistentes, juntamente com uma estimativa de sua matriz de covariância que seja consistente tanto sob homocedasticidade quanto sob heterocedasticidade. Por exemplo, Jeffrey Wooldridge escreve em seu livro-texto de econometria (Wooldridge, 2000:249): “In the last two decades, econometricians have learned to adjust standard errors, t , F and LM statistics so that they are valid in the presence of heteroskedasticity of unknown form. This is very convenient because it means we can report new statistics that work, regardless of the kind of heteroskedasticity present in the population”.

O estimador consistente da matriz de covariância do EMQO mais utilizado é o proposto por Halbert White (1980). O objetivo deste artigo é investigar, através de simulações de Monte Carlo, o desempenho deste estimador em amostras de tamanho pequeno a moderado. Consideramos também duas alternativas ao estimador de White, a saber: a seqüência de estimadores de White corrigidos, proposta por Cribari-Neto, Ferrari e Cordeiro (2000), e o estimador de *bootstrap* ponderado, proposto por Wu (1986). São, ainda, apresentados resultados para três estimadores propostos por MacKinnon e White (1985), denotados HC1, HC2 e HC3. Estes estimadores possuem forma semelhante ao de White, incorporando apenas diferentes formas de ajuste para amostras finitas.

Note que as simulações apresentadas neste artigo são mais gerais que as apresentadas por MacKinnon e White (1985), uma vez que incluem uma classe mais ampla e rica de estimadores.

Os resultados sugerem que os estimadores corrigidos analiticamente propostos por Cribari-Neto, Ferrari e Cordeiro (2000) tipicamente apresentam desempenho superior ao estimador de White e ao de *bootstrap* no que diz respeito ao comportamento de testes associados a estes estimadores. No que se refere aos estimadores HC1, HC2 e HC3, o artigo mostra que HC2 possui menor viés, HC1 possui menor erro quadrático médio e HC3 domina quando os estimadores são utilizados para construir estatísticas quase-*t* e realizar inferência sobre parâmetros. Os resultados mostram também que a presença de observações de alta alavancagem nos regressores do modelo causa uma deterioração substancial no desempenho dos estimadores considerados.

2. O Modelo e Estimadores

O modelo de interesse é o linear de regressão, onde uma variável de interesse y é associada a um conjunto de variáveis explicativas de forma linear:

$$y = X\beta + u,$$

onde y é um vetor $n \times 1$ de observações da variável dependente, X é uma matriz fixa de posto completo de dimensão $n \times p$ ($p < n$) contendo observações sobre as variáveis explicativas, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$ é um vetor $p \times 1$ de parâmetros desconhecidos e u é um vetor $n \times 1$ de distúrbios aleatórios (erros) com média 0 e matriz de covariância $\Omega = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$. Quando os erros são homocedásticos, então $\sigma_i^2 = \sigma^2 > 0$, ou seja, $\Omega = \sigma^2 I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n . O estimador de mínimos quadrados ordinários de β é dado por $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$, cuja média é β (isto é, ele é não-viesado) e cuja variância é dada por

$$\Psi = (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}.$$

Quando todos os erros possuem a mesma variância, ou seja, $\Omega = \sigma^2 I_n$, esta expressão é simplificada para $\sigma^2(X'X)^{-1}$, podendo ser facilmente estimada como $\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$, onde $\hat{\sigma}^2 = \hat{u}'\hat{u}/(n-p)$. Aqui, $\hat{u} = (I - X(X'X)^{-1}X')y = My$ representa o vetor $n \times 1$ de resíduos de mínimos quadrados, com I denotando a matriz identidade de ordem n .

Muitas aplicações envolvem estruturas de erros que não se caracterizam por variâncias constantes. Nestes casos, torna-se importante a utilização de estimativas mais confiáveis da matriz de variância de $\hat{\beta}$. Um estimador consistente para Ψ foi proposto por White (1980) e pode ser escrito como

$$\hat{\Psi} = (X'X)^{-1}X'\hat{\Omega}X(X'X)^{-1},$$

onde $\hat{\Omega} = \text{diag}(\hat{u}_1^2, \dots, \hat{u}_n^2)$. Ou seja, $\hat{\Omega}$ é uma matriz diagonal formada a partir do vetor contendo os quadrados dos resíduos de mínimos quadrados. Este estimador é tipicamente consistente quando os erros são homocedásticos e quando os erros são heterocedásticos (White, 1980). Entretanto, o estimador de White pode apresentar viés substancial em amostras de tamanho finito, conforme revelado por estudos de simulação, como os de Cribari-Neto e Zarkos (1999a) e MacKinnon e White (1985).

Cribari-Neto, Ferrari e Cordeiro (2000) obtiveram uma seqüência de estimadores aplicando transformações ao estimador de White. Trata-se de uma cadeia de estimadores corrigidos, onde a cada iteração do processo alcança-se uma redução na ordem do viés, esperando-se, assim, que a correção reduza o erro sistemático do estimador. Seja A uma matriz diagonal de ordem n e defina o operador $M^{(1)}(A) = \{HA(H - 2I)\}_d$, onde $H = X(X'X)^{-1}X'$ e o subscrito d indica que os elementos não-diagonais da matriz foram substituídos por zeros (isto é, uma matriz diagonal foi formada a partir da matriz original). Sejam ainda $M^{(2)}(A) = M^{(1)}\{M^{(1)}(A)\}$, $M^{(3)}(A) = M^{(1)}\{M^{(2)}(A)\}$, $M^{(4)}(A) = M^{(1)}\{M^{(3)}(A)\}$ etc., e $M^{(0)}(A) = A$. Esses autores definiram uma seqüência de estimadores para Ψ , $\{\hat{\Psi}^{(k)}, k = 1, 2, \dots\}$, onde

$$\hat{\Psi}^{(k)} = P \left[\sum_{j=0}^k (-1)^j M^{(j)}(\hat{\Omega}) \right] P', \quad k = 1, 2, \dots$$

e $P = (X'X)^{-1}X'$. É possível mostrar que, sob certas condições de regularidade, o viés de $\hat{\Psi}^{(k)}$ é de ordem $\mathcal{O}(n^{-(k+2)})$. Ou seja, quanto maior o número de iterações da seqüência de correção de viés, mais rápida a convergência para 0 do viés do estimador quando $n \uparrow \infty$.

Nas simulações realizadas e descritas na próxima seção, consideramos quatro estimadores analiticamente corrigidos obtidos a partir do estimador de White. Estes estimadores correspondem aos quatro primeiros estágios da seqüência de correção de viés proposta por Cribari-Neto, Ferrari e Cordeiro (2000), isto é, $\hat{\Psi}^{(k)}$ com $k = 1, 2, 3, 4$.

Uma alternativa computacionalmente intensiva reside na utilização do método *bootstrap*, proposto por Bradley Efron em 1979 (Efron, 1979). Este método procura obter medidas estatísticas de precisão baseadas em simulações computacionais e geralmente fornece uma aproximação para a estatística de interesse que é mais precisa do que aquela obtida a partir de sua aproximação assintótica de primeira ordem.¹ Em sua forma mais simples, o algoritmo de *bootstrap* pode ser descrito da seguinte forma:

- a) obtenha uma amostra aleatória u_1^*, \dots, u_n^* de \hat{u} com reposição;
- b) forme uma amostra de *bootstrap*: $y^* = X\hat{\beta} + u^*$, onde $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)'$;
- c) obtenha a estimativa de MQO de β : $\beta^* = (X'X)^{-1}X'y^*$;
- d) repita os passos anteriores um grande número (digamos, B) de vezes;
- e) calcule a variância dos B vetores de estimativas obtidas usando os passos (a) a (d).

Contudo, este esquema de *bootstrap* não leva em consideração o fato que as variâncias das observações são diferentes quando há heterocedasticidade. De fato, estimativas de *bootstrap* obtidas como descrito acima não são nem consistentes nem assintoticamente não-viesadas quando os dados provêm de um mecanismo gerador heterocedástico; (Wu, 1986). Um estimador de *bootstrap* robusto à presença de heterocedasticidade foi proposto por Wu (1986) e pode ser descrito da seguinte forma:

- a) para cada i , $i = 1, \dots, n$, obtenha aleatoriamente t_i^* de uma distribuição com média 0 e variância 1;
- b) forme a amostra de *bootstrap* (y^*, X) , onde $y_i^* = X_i\hat{\beta} + t_i^*\hat{u}_i/\sqrt{1 - h_i}$, h_i sendo o i -ésimo elemento diagonal da “matriz chapéu” $H = X(X'X)^{-1}X'$ e X_i a i -ésima linha da matriz modelo X .

Os passos (c) a (e) permanecem inalterados. Note que a variância (no esquema de *bootstrap*) de $t_i^*\hat{u}_i$ não é constante quando os erros originais não são homocedásticos. Desta forma, este esquema de “*bootstrap* ponderado” leva em consideração a possível não-constância das variâncias dos erros.

¹ Para detalhes, ver Davison e Hinkley (1997) e Efron e Tibshirani (1993).

No que se refere à amostragem de t^* , uma possibilidade é utilizar a seguinte população: a_1, \dots, a_n , onde

$$a_i = \frac{\hat{u}_i - \bar{\hat{u}}}{\sqrt{n^{-1} \sum_{t=1}^n (\hat{u}_t - \bar{\hat{u}})^2}},$$

com $\bar{\hat{u}} = n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t$; quando o modelo de regressão contiver um intercepto, temos que $\bar{\hat{u}} = 0$.

Por fim, é importante ressaltar que há algumas variantes do estimador de White que foram propostas e que incorporam diferentes ajustes para amostras finitas (MacKinnon e White, 1985). Na primeira variante, denotada por HC1, o estimador de White é multiplicado pelo fator $n/(n-p)$. As outras duas variantes, denotadas respectivamente por HC2 e HC3, constroem a matriz $\hat{\Omega}$ utilizada na definição do estimador de White não como $\hat{\Omega} = \text{diag}\{\hat{u}_1^2, \dots, \hat{u}_n^2\}$, como proposto por White, mas como $\hat{\Omega} = \text{diag}\{\hat{u}_1^2/(1-h_1), \dots, \hat{u}_n^2/(1-h_n)\}$ e $\hat{\Omega} = \text{diag}\{\hat{u}_1^2/(1-h_1)^2, \dots, \hat{u}_n^2/(1-h_n)^2\}$. O estimador HC3, em particular, representa uma aproximação para o estimador de *jackknife* considerado por MacKinnon e White (1985).²

3. Resultados

Adotou-se para as simulações um modelo de regressão simples da forma $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \sigma_i u_i$, $i = 1, \dots, n$. Os tamanhos amostrais considerados foram $n = 50, 100, 150, 200$. Para $n = 50$, os valores de x_i foram obtidos exponenciando números aleatórios de uma distribuição normal padrão e foram mantidos constantes ao longo das simulações. Para os demais tamanhos amostrais os valores da covariável foram replicados; ou seja, cada valor de x_i foi replicado duas vezes quando $n = 100$, três vezes quando $n = 150$ e quatro vezes quando $n = 200$. Esta replicação de covariáveis garante que o grau de heterocedasticidade permaneça constante à medida que o número de observações aumenta. Os u_i (erros do modelo de regressão) são independente e identicamente distribuídos seguindo uma distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$ e, para a geração dos

²Para maiores detalhes sobre estes estimadores alternativos, ver Davidson e MacKinnon (1993).

dados, $\beta_0 = \beta_1 = 1$. Quando o modelo utilizado na geração de dados é homocedástico, $\sigma_i = 1$, ao passo que para a geração de dados heterocedásticos utilizou-se

$$\sigma_i = \sqrt{\exp\{\gamma x_i + \gamma x_i^2\}}.$$

O grau de heterocedasticidade pode ser medido usando $\lambda = (\max \sigma_i^2)/(\min \sigma_i^2)$; ou seja, sob homocedasticidade $\lambda = 1$ e sob heterocedasticidade $\lambda > 1$. Quanto mais forte a heterocedasticidade, maior λ . Todas as simulações foram realizadas utilizando 10 mil réplicas de Monte Carlo e 500 réplicas de *bootstrap*, totalizando assim 5 milhões de réplicas por experimento. As simulações foram realizadas utilizando a linguagem de programação C e o compilador GNU C (Stallman, 1999) no sistema operacional Linux (MacKinnon, 1999). O gerador de números pseudo-aleatórios usado foi o gerador proposto por George Marsaglia em 1997, que utiliza o método *multiply-with-carry* e possui período aproximadamente igual a 2^{60} .³ Os estimadores considerados foram o de mínimos quadrados ordinários (MQO), o de White (*white*), o estimador obtido do esquema de *bootstrap* ponderado (*boot*) e os quatro estimadores corrigidos analítica e sucessivamente (BCW1, BCW2, BCW3 e BCW4, respectivamente). Os resultados são apresentados nas tabelas 1 a 3.

A tabela 1 apresenta os vieses relativos totais dos diferentes estimadores, ou seja, a soma dos valores absolutos dos vieses relativos individuais dos elementos diagonais (variâncias) da matriz de covariância das estimativas de mínimos quadrados. O viés relativo individual de um estimador é aqui definido como a média das estimativas menos o valor verdadeiro do parâmetro, sendo esta diferença dividida pelo valor verdadeiro do parâmetro. O viés relativo total mede, assim, o viés agregado das estimativas das variâncias.

Em primeiro lugar, nota-se, como esperado, que o estimador de mínimos quadrados ordinários das variâncias é não-viesado quando $\gamma = 0$ (homocedasticidade) e bastante viesado quando o processo gerador de dados apresenta heterocedasticidade. Por exemplo, quando $\gamma = 0,08$ e $n = 100$, o seu viés relativo total ultrapassa 100%. O viés deste estimador não converge para 0 quando n aumenta.

³ Este gerador passou por testes de aleatoridade bastante estritos, como a bateria de testes DieHard, sem acusar nenhuma detecção de padrões determinísticos e se encontra atualmente implementado em linguagens matriciais, como Ox e R. A fonte original deste gerador é Marsaglia (1997) e seu código fonte em C é dado no anexo deste artigo.

Tabela 1
Vieses relativos totais

n	γ	λ	MQO	<i>white</i>	<i>boot</i>	BCW1	BCW2	BCW3	BCW4
50	0,00	1,0000	0,0034	0,1870	0,0062	0,0403	0,0130	0,0069	0,0054
	0,02	2,1371	0,3557	0,2495	0,0353	0,0637	0,0214	0,0086	0,0043
	0,04	4,5672	0,6376	0,3196	0,0758	0,0949	0,0372	0,0189	0,0125
	0,06	9,7606	0,8741	0,4034	0,1281	0,1393	0,0653	0,0410	0,0324
	0,08	20,8593	1,0615	0,4583	0,1452	0,1499	0,0581	0,0271	0,0161
	0,10	44,5785	1,2170	0,5194	0,1841	0,1775	0,0710	0,0344	0,0211
	0,12	95,2686	1,3186	0,5469	0,1759	0,1774	0,0592	0,0180	0,0030
	0,14	203,5987	1,3938	0,5869	0,2241	0,2056	0,0814	0,0377	0,0218
100	0,00	1,0000	0,0072	0,0851	0,0040	0,0059	0,0075	0,0087	0,0089
	0,02	2,1371	0,3439	0,1205	0,0151	0,0120	0,0014	0,0031	0,0034
	0,04	4,5672	0,6157	0,1618	0,0361	0,0281	0,0102	0,0073	0,0068
	0,06	9,7606	0,8366	0,1822	0,0351	0,0171	0,0070	0,0110	0,0117
	0,08	20,8593	1,0242	0,2333	0,0686	0,0432	0,0139	0,0089	0,0080
	0,10	44,5785	1,1665	0,2644	0,0844	0,0521	0,0182	0,0123	0,0112
	0,12	95,2686	1,2653	0,2728	0,0788	0,0424	0,0047	0,0019	0,0032
	0,14	203,5987	1,3356	0,2915	0,0953	0,0508	0,0107	0,0036	0,0023
150	0,00	1,0000	0,0016	0,0596	0,0007	0,0019	0,0028	0,0031	0,0032
	0,02	2,1371	0,3370	0,0773	0,0059	0,0026	0,0046	0,0052	0,0053
	0,04	4,5672	0,6123	0,1095	0,0279	0,0153	0,0067	0,0058	0,0057
	0,06	9,7606	0,8311	0,1350	0,0384	0,0204	0,0092	0,0080	0,0078
	0,08	20,8593	1,0043	0,1453	0,0338	0,0099	0,0040	0,0056	0,0058
	0,10	44,5785	1,1471	0,1695	0,0518	0,0180	0,0017	0,0001	0,0004
	0,12	95,2686	1,2507	0,1923	0,0585	0,0299	0,0120	0,0099	0,0097
	0,14	203,5987	1,3171	0,1951	0,0608	0,0239	0,0048	0,0025	0,0022
200	0,00	1,0000	0,0010	0,0462	0,0037	0,0020	0,0005	0,0005	0,0005
	0,02	2,1371	0,3425	0,0626	0,0101	0,0046	0,0010	0,0009	0,0009
	0,04	4,5672	0,6095	0,0810	0,0175	0,0083	0,0033	0,0029	0,0029
	0,06	9,7606	0,8234	0,0949	0,0222	0,0059	0,0006	0,0012	0,0012
	0,08	20,8593	0,9976	0,1004	0,0167	0,0048	0,0130	0,0137	0,0138
	0,10	44,5785	1,1392	0,1256	0,0326	0,0084	0,0010	0,0019	0,0019
	0,12	95,2686	1,2335	0,1182	0,0239	0,0096	0,0202	0,0211	0,0212
	0,14	203,5987	1,3071	0,1457	0,0455	0,0132	0,0021	0,0011	0,0010

Segundo, o estimador de White se mostra bastante viesado, independentemente de os dados virem de um mecanismo gerador homo ou heterocedástico. Por exemplo, quando $n = 100$ e $\gamma = 0,08$, o viés relativo total deste estimador fica próximo de 25%.

Terceiro, tanto o estimador de *bootstrap* quanto os estimadores corrigidos analiticamente se mostram superiores ao estimador de White. Quando o

tamanho amostral é pequeno ($n = 50$), o estimador de *bootstrap* apresenta desempenho semelhante ao estimador corrigido de primeira ordem (BCW1). Contudo, quando n aumenta, o viés relativo total do estimador analiticamente corrigido de primeira ordem converge para 0 mais rapidamente do que o do estimador de *bootstrap*. Os estimadores corrigidos de ordem superior apresentam desempenho ainda melhor. Por exemplo, quando $n = 100$ e $\gamma = 0,10$, o viés relativo total do estimador de White é 26,44%, ao passo que a mesma medida para o estimador de *bootstrap* e para os quatro estimadores corrigidos vale 8,44%, 5,21%, 1,82%, 1,23% e 1,12%, respectivamente. Ou seja, o viés relativo total do estimador corrigido de segunda ordem é quase 15 vezes menor do que o do estimador de White e quase cinco vezes menor do que o do estimador de *bootstrap*.

Quarto, os resultados apresentados na tabela 1 sugerem que duas iterações no processo sequencial de correção de viés são suficientes para que se obtenha um estimador com viés baixo em amostras de tamanho pequeno a moderado. Em suma, os resultados na tabela 1 revelam que o estimador de White pode ser muito viesado em amostras finitas, que o estimador de *bootstrap* apresenta um desempenho superior ao de White e que os estimadores corrigidos analiticamente apresentam, em geral, desempenho superior ao do estimador de *bootstrap*. Por exemplo, o estimador corrigido de ordem 2 apresenta viés relativo total, quando $n = 100$ e $\gamma = 0,14$, mais de quatro vezes menor do que o viés relativo total do estimador de *bootstrap* para $\gamma = 0,14$, mas com o estimador de *bootstrap* sendo obtido com base em 200 observações. Ou seja, mesmo com metade do número de observações o estimador corrigido analiticamente alcança uma precisão substancialmente maior do que o estimador de *bootstrap*.

A tabela 2 apresenta as raízes quadradas das somas dos erros quadráticos médios individuais para os diferentes estimadores (REQM). Estas quantidades medem, assim, tanto o viés quanto a variabilidade dos estimadores. Os resultados contidos na tabela 2 revelam que o esquema de correção de viés analítico conduz a um aumento da variância, ou seja, conduz à inflação da variância. O mesmo ocorre com o estimador de *bootstrap*, que apresenta erro quadrático médio total superior ao do estimador de White.

Tabela 2
REQMs totais ($\times 100$)

n	γ	λ	MQO	<i>white</i>	<i>boot</i>	BCW1	BCW2	BCW3	BCW4	
50	0,00	1,0000	0,9642	1,2742	1,4178	1,3832	1,4227	1,4364	1,4413	
	0,02	2,1371	1,4700	1,8619	2,1292	2,0957	2,1937	2,2292	2,2423	
	0,04	4,5672	2,9230	3,2420	3,7964	3,7832	4,0172	4,1037	4,1360	
	0,06	9,7606	6,1323	6,1501	7,2128	7,2589	7,7502	7,9343	8,0033	
	0,08	20,8593	13,0656	12,7121	15,1269	15,2531	16,3521	16,7645	16,9193	
	0,10	44,5785	27,8148	26,6959	32,0234	32,2003	34,5700	35,4657	35,8042	
	0,12	95,2686	58,4193	54,8766	67,4268	66,3567	71,3197	73,2008	73,9119	
	0,14	203,5987	123,5408	118,1838	144,0422	143,3337	154,0907	158,1746	159,7220	
	100	0,00	1,0000	0,3390	0,4665	0,5129	0,4914	0,4957	0,4964	0,4965
		0,02	2,1371	0,6009	0,7000	0,7722	0,7545	0,7654	0,7673	0,7676
		0,04	4,5672	1,2884	1,2152	1,3424	1,3322	1,3568	1,3612	1,3621
		0,06	9,7606	2,8170	2,4154	2,6821	2,6947	2,7531	2,7638	2,7658
		0,08	20,8593	6,1157	4,9383	5,4615	5,5066	5,6272	5,6496	5,6538
		0,10	44,5785	13,0699	10,3038	11,5588	11,5056	11,7608	11,8084	11,8174
0,12		95,2686	27,5962	21,4256	24,1927	24,0132	24,5624	24,6651	24,6845	
0,14		203,5987	58,2210	44,7263	50,8604	50,0835	51,2289	51,4441	51,4848	
150		0,00	1,0000	0,1822	0,2547	0,2832	0,2639	0,2649	0,2650	0,2651
		0,02	2,1371	0,3598	0,3836	0,4205	0,4044	0,4071	0,4074	0,4075
		0,04	4,5672	0,8153	0,6738	0,7322	0,7179	0,7241	0,7248	0,7249
		0,06	9,7606	1,8105	1,3188	1,4243	1,4160	1,4297	1,4314	1,4316
		0,08	20,8593	3,9487	2,7962	3,0506	3,0263	3,0581	3,0620	3,0625
		0,10	44,5785	8,4658	5,7331	6,2327	6,2028	6,2687	6,2769	6,2779
	0,12	95,2686	17,9976	12,1456	13,5480	13,1337	13,2730	13,2903	13,2924	
	0,14	203,5987	38,0023	25,8371	28,9636	28,0022	28,3054	28,3431	28,3479	

continua

Tabela 2
REQMs totais ($\times 100$)

continuação

n	γ	λ	MQO	<i>white</i>	<i>boot</i>	BCW1	BCW2	BCW3	BCW4
200	0,00	1,0000	0,1168	0,1642	0,1846	0,1685	0,1689	0,1689	0,1689
	0,02	2,1371	0,2550	0,2506	0,2749	0,2604	0,2614	0,2615	0,2615
	0,04	4,5672	0,5909	0,4487	0,4856	0,4718	0,4742	0,4744	0,4744
	0,06	9,7606	1,3276	0,8757	0,9413	0,9269	0,9323	0,9327	0,9328
	0,08	20,8593	2,9082	1,8288	1,9756	1,9473	1,9595	1,9606	1,9607
	0,10	44,5785	6,2594	3,8015	4,1462	4,0410	4,0661	4,0685	4,0687
	0,12	95,2686	13,2617	8,0713	8,8008	8,6157	8,6719	8,6771	8,6776
	0,14	203,5987	28,1003	16,9112	18,7370	17,9891	18,1025	18,1130	18,1140

Os resultados apresentados nas tabelas 1 e 2 mostram que tanto o estimador de *bootstrap* quanto os estimadores corrigidos apresentam viés notadamente inferior ao do estimador de White, mas ao custo de um aumento de variância. Desta forma, torna-se importante investigar se há ganhos de inferência em usar os estimadores de *bootstrap* e corrigidos analiticamente para construir estatísticas de teste quase-*t*. Ou seja, considere o teste da hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_j = \beta_j^{(0)}$, $j = 1, \dots, p$, onde $\beta_j^{(0)}$ é uma dada constante, sendo a hipótese alternativa bicaudal. A estatística de teste pode ser escrita como

$$\frac{\widehat{\beta}_j - \beta_j^{(0)}}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\widehat{\beta}_j)}},$$

onde $\widehat{\text{var}}(\widehat{\beta}_j)$ denota a variância estimada de $\widehat{\beta}_j$ obtida a partir de um dos estimadores consistentes considerados.

Sob a hipótese nula, esta estatística de teste possui distribuição assintótica $\mathcal{N}(0, 1)$ e, assim, o teste é realizado comparando o valor da estatística ao valor crítico de nível α obtido de uma tabela normal padrão. O interesse recai sobre a seguinte pergunta: qual estimador consistente da variância conduz a testes quase-*t* com menor distorção de tamanho?

A tabela 3 apresenta os tamanhos estimados dos testes quase-*t* da hipótese nula $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 1$ ao nível nominal (probabilidade de erro do tipo I) $\alpha = 5\%$. (As entradas desta tabela são porcentagens de rejeição da hipótese nula quando esta é de fato verdadeira.) As conclusões que podem ser obtidas destes resultados de simulação são, em primeiro lugar, que o teste que usa o estimador de mínimos quadrados da variância apenas apresenta desempenho confiável sob homocedasticidade, como esperado. Segundo, o teste construído usando o estimador de White da variância apresenta taxas de rejeição consideravelmente superiores ao nível assintótico, independentemente da presença de heterocedasticidade. Por exemplo, quando $n = 100$ e $\gamma = 0, 10$, este teste rejeita a hipótese nula 10,98% das vezes, ou seja, com frequência mais de duas vezes superior à esperada com base no tamanho assintótico selecionado. Em geral, os testes construídos a partir do estimador de *bootstrap* e dos estimadores corrigidos analiticamente apresentam distorções de tamanho ligeiramente inferiores às verificadas para o teste construído a partir do estimador de White. Ou seja, a redução de viés alcançada por estes estimadores domina o aumento de variância no que diz respeito ao desempenho de tamanho de testes quase-*t* associados. Contudo, todos os testes apresentam taxas de rejeição superior ao nível nominal (assintótico, 5%), tendência que é tanto mais acentuada quanto mais forte a heterocedasticidade.

Tabela 3
Níveis de significância de testes quase- t a $\alpha = 5\%$

n	γ	λ	MQO	<i>white</i>	<i>boot</i>	BCW1	BCW2	BCW3	BCW4
50	0,00	1,0000	5,80	9,78	8,22	8,80	8,60	8,58	8,58
	0,02	2,1371	11,67	12,20	10,20	10,63	10,48	10,44	10,40
	0,04	4,5672	20,44	13,57	11,09	11,55	11,21	11,07	11,05
	0,06	9,7606	30,07	14,65	11,73	12,04	11,62	11,45	11,34
	0,08	20,8593	40,19	16,09	12,70	12,88	12,19	12,05	12,03
	0,10	44,5785	49,03	17,03	13,27	13,18	12,57	12,34	12,27
	0,12	95,2686	53,68	17,52	13,87	13,62	12,82	12,73	12,65
	0,14	203,5987	60,21	17,97	13,65	13,41	12,39	12,18	12,04
100	0,00	1,0000	5,39	7,51	6,85	6,87	6,79	6,75	6,75
	0,02	2,1371	10,95	8,34	7,32	7,48	7,40	7,40	7,40
	0,04	4,5672	19,50	9,14	8,21	8,04	7,88	7,88	7,88
	0,06	9,7606	29,45	9,94	8,70	8,58	8,40	8,38	8,38
	0,08	20,8593	38,49	10,78	9,41	9,16	8,94	8,92	8,91
	0,10	44,5785	45,54	10,98	9,47	9,33	9,09	9,05	9,05
	0,12	95,2686	51,92	10,96	9,39	9,14	8,72	8,67	8,66
	0,14	203,5987	54,74	11,49	10,00	9,45	9,17	9,12	9,11
150	0,00	1,0000	5,34	6,74	6,12	6,22	6,19	6,19	6,19
	0,02	2,1371	10,81	7,06	6,54	6,46	6,37	6,36	6,35
	0,04	4,5672	19,35	7,58	6,73	6,70	6,66	6,64	6,64
	0,06	9,7606	29,36	8,39	7,69	7,42	7,36	7,35	7,35
	0,08	20,8593	38,79	8,91	7,89	7,75	7,66	7,65	7,65
	0,10	44,5785	45,04	8,98	8,09	7,89	7,76	7,76	7,76
	0,12	95,2686	49,78	8,40	7,76	7,36	7,26	7,23	7,23
	0,14	203,5987	53,20	8,70	7,95	7,51	7,38	7,38	7,38
200	0,00	1,0000	5,09	6,13	5,82	5,79	5,75	5,75	5,75
	0,02	2,1371	10,89	6,58	6,04	6,15	6,13	6,13	6,13
	0,04	4,5672	19,05	7,02	6,44	6,33	6,28	6,27	6,27
	0,06	9,7606	29,28	7,31	6,65	6,52	6,44	6,43	6,43
	0,08	20,8593	37,92	7,74	7,08	6,83	6,80	6,78	6,78
	0,10	44,5785	45,27	8,08	7,37	7,26	7,23	7,22	7,22
	0,12	95,2686	49,69	8,13	7,38	7,27	7,19	7,18	7,18
	0,14	203,5987	52,57	8,18	7,57	7,22	7,18	7,17	7,17

Nosso interesse central reside na comparação do desempenho dos estimadores corrigidos analiticamente e do estimador de *bootstrap*, já que estes são obtidos a partir de enfoques bem distintos, a saber: correções analíticas *versus* esquemas de reamostragem computacionalmente intensivos. Contudo, torna-se interessante também avaliar o desempenho destes estimadores relativamente às variantes do estimador de White descritas anteriormente. As

tabelas 4 a 6 apresentam resultados similares aos apresentados nas tabelas 1 a 3, respectivamente, mas agora para os estimadores HC1, HC2 e HC3.

Tabela 4
Vieses relativos totais: HC1, HC2, HC3

n	γ	λ	HC1	HC2	HC3
50	0,00	1,0000	0,1115	0,0039	0,2254
	0,02	2,1371	0,1766	0,0325	0,2357
	0,04	4,5672	0,2496	0,0710	0,2398
	0,06	9,7606	0,3369	0,1222	0,2329
	0,08	20,8593	0,3941	0,1396	0,2658
	0,10	44,5785	0,4577	0,1739	0,2682
	0,12	95,2686	0,4863	0,1792	0,2930
	0,14	203,5987	0,5280	0,2113	0,2721
100	0,00	1,0000	0,0482	0,0089	0,1119
	0,02	2,1371	0,0822	0,0095	0,1132
	0,04	4,5672	0,1243	0,0328	0,1104
	0,06	9,7606	0,1451	0,0303	0,1392
	0,08	20,8593	0,1973	0,0637	0,1263
	0,10	44,5785	0,2290	0,0793	0,1287
	0,12	95,2686	0,2375	0,0750	0,1475
	0,14	203,5987	0,2566	0,0872	0,1429
150	0,00	1,0000	0,0333	0,0030	0,0695
	0,02	2,1371	0,0513	0,0035	0,0766
	0,04	4,5672	0,0840	0,0225	0,0708
	0,06	9,7606	0,1098	0,0339	0,0748
	0,08	20,8593	0,1202	0,0297	0,0949
	0,10	44,5785	0,1447	0,0430	0,0934
	0,12	95,2686	0,1679	0,0589	0,0853
	0,14	203,5987	0,1707	0,0561	0,0941
200	0,00	1,0000	0,0265	0,0005	0,0493
	0,02	2,1371	0,0430	0,0067	0,0518
	0,04	4,5672	0,0616	0,0152	0,0540
	0,06	9,7606	0,0756	0,0180	0,0630
	0,08	20,8593	0,0813	0,0125	0,0804
	0,10	44,5785	0,1067	0,0299	0,0714
	0,12	95,2686	0,0992	0,0155	0,0933
	0,14	203,5987	0,1269	0,0404	0,0711

Em termos de viés absoluto total, o estimador HC2 apresenta tipicamente menor viés que HC1 e HC3, com HC3 superando HC1. Por exemplo, quando $n = 100$ e $\gamma = 0,10$, os vieses relativos totais dos estimadores HC1, HC2 e HC3 são, respectivamente, 22,90%, 7,93% e 12,87%. Note que o viés de HC2 é semelhante ao do estimador de *bootstrap* (8,44%) e consideravelmente mais elevado que os vieses dos quatro estimadores corrigidos (5,12%, 1,82%, 1,23%

e 1,12%). Em suma, o estimador HC2 domina os estimadores HC1 e HC3 em termos de erros sistemáticos, ligeiramente supera o estimador de *bootstrap* e apresenta desempenho inferior aos estimadores propostos por Cribari-Neto, Ferrari e Cordeiro (2000).

Tabela 5
REQMS totais ($\times 100$): HC1, HC2, HC3

n	γ	λ	HC1	HC2	HC3
50	0,00	1,0000	1,2980	1,3847	1,6270
	0,02	2,1371	1,8805	2,0902	2,5826
	0,04	4,5672	3,2724	3,7591	4,7965
	0,06	9,7606	6,2153	7,1967	9,2615
	0,08	20,8593	12,9206	15,1092	19,5604
	0,10	44,5785	27,2075	31,8794	41,2551
	0,12	95,2686	55,9965	65,6807	85,1703
	0,14	203,5987	120,7567	141,8367	183,4937
100	0,00	1,0000	0,4721	0,4885	0,5283
	0,02	2,1371	0,7052	0,7451	0,8247
	0,04	4,5672	1,2228	1,3089	1,4698
	0,06	9,7606	2,4384	2,6389	2,9939
	0,08	20,8593	4,9879	5,3893	6,0988
	0,10	44,5785	10,4175	11,2575	12,7324
	0,12	95,2686	21,6815	23,4784	26,6105
	0,14	203,5987	45,2634	48,9699	55,4521
150	0,00	1,0000	0,2565	0,2623	0,2759
	0,02	2,1371	0,3858	0,4000	0,4278
	0,04	4,5672	0,6767	0,7073	0,7627
	0,06	9,7606	1,3260	1,3921	1,5077
	0,08	20,8593	2,8175	2,9709	3,2279
	0,10	44,5785	5,7780	6,0877	6,6094
	0,12	95,2686	12,2431	12,8904	13,9740
	0,14	203,5987	26,0584	27,4723	29,8071
200	0,00	1,0000	0,1650	0,1677	0,1739
	0,02	2,1371	0,2515	0,2581	0,2709
	0,04	4,5672	0,4503	0,4659	0,4931
	0,06	9,7606	0,8798	0,9136	0,9709
	0,08	20,8593	1,8400	1,9168	2,0426
	0,10	44,5785	3,8247	3,9781	4,2305
	0,12	95,2686	8,1274	8,4750	9,0335
	0,14	203,5987	17,0208	17,7049	18,8168

Quando o critério de comparação é o REQM, contudo, o estimador HC1 domina os estimadores HC2 e HC3, com o estimador HC2 apresentando desempenho superior ao estimador HC3. Uma comparação entre as tabelas 2 e 5 revela, ainda, que os estimadores HC1 e HC2 apresentam tipicamente REQMs

ligeiramente inferiores aos dos estimadores de *bootstrap* e corrigidos analiticamente. Em suma, entre as variantes do estimador de White, o estimador HC2 apresenta melhor desempenho em termos de viés e o estimador HC1 supera os outros dois no que diz respeito a erro quadrático médio.

Tabela 6
Níveis de significância de testes quase-*t* a $\alpha = 5\%$: HC1, HC2 e HC3

n	γ	λ	HC1	HC2	HC3
50	0,00	1,0000	9,34	8,33	6,80
	0,02	2,1371	11,53	10,12	8,03
	0,04	4,5672	12,90	11,05	9,00
	0,06	9,7606	13,91	11,64	8,96
	0,08	20,8593	15,39	12,45	9,42
	0,10	44,5785	16,17	12,98	9,94
	0,12	95,2686	16,76	13,38	9,90
	0,14	203,5987	16,95	13,23	9,34
100	0,00	1,0000	7,27	6,72	5,75
	0,02	2,1371	8,05	7,33	6,47
	0,04	4,5672	8,84	8,05	7,05
	0,06	9,7606	9,67	8,62	7,38
	0,08	20,8593	10,43	9,27	7,99
	0,10	44,5785	10,59	9,44	7,81
	0,12	95,2686	10,61	9,29	7,72
	0,14	203,5987	11,10	9,61	7,95
150	0,00	1,0000	6,52	6,12	5,63
	0,02	2,1371	6,87	6,43	5,88
	0,04	4,5672	7,34	6,73	6,05
	0,06	9,7606	8,08	7,42	6,73
	0,08	20,8593	8,70	7,88	6,98
	0,10	44,5785	8,84	7,98	7,00
	0,12	95,2686	8,24	7,53	6,75
	0,14	203,5987	8,51	7,72	6,73
200	0,00	1,0000	6,01	5,76	5,40
	0,02	2,1371	6,48	6,14	5,69
	0,04	4,5672	6,88	6,42	5,84
	0,06	9,7606	7,17	6,63	5,92
	0,08	20,8593	7,52	6,93	6,27
	0,10	44,5785	7,97	7,44	6,78
	0,12	95,2686	7,97	7,42	6,68
	0,14	203,5987	8,05	7,40	6,77

Um cenário completamente diferente, contudo, é obtido quando o critério de comparação passa a ser distorção de tamanho de testes quase-*t* associados aos estimadores (tabela 6). Aqui, verifica-se que o estimador HC3 apresenta desempenho que em muito supera os desempenhos dos estimadores HC1 e

HC2. Por exemplo, quando $n = 100$ e $\gamma = 0,10$, os tamanhos estimados ao nível nominal de 5% dos testes associados aos estimadores HC1, HC2 e HC3 são, respectivamente, 10,59%, 9,44% e 7,81%. O desempenho do estimador HC3 aqui supera, inclusive, os desempenhos do estimador de *bootstrap* e dos estimadores analiticamente corrigidos de Cribari-Neto, Ferrari e Cordeiro (2000). Contudo, testes associados ao estimador HC3 continuam a ser liberais dado o fato de rejeitarem a hipótese nula, quando esta é verdadeira, com frequência maior que a esperada com base no tamanho nominal do teste.

Os valores da covariável x foram gerados de uma distribuição lognormal padrão e apresentam pontos de alta alavancagem, o que pode ter efeito sobre os resultados. Estes pontos podem apresentar uma contribuição substancial para as estimativas dos parâmetros lineares. Uma forma de identificar observações potencialmente influentes é analisando os correspondentes elementos diagonais (h_i) da matriz-chapéu $H = X(X'X)^{-1}X'$. Pode ser mostrado que $0 \leq h_i \leq 1$ para todo i , onde p denota o posto da matriz X . Desta forma, os h_i 's têm valor médio p/n . Uma regra prática usada por econométricos e estatísticos é que valores de h_i superiores a duas ou três vezes a média (ou seja, $2p/n$ e $3p/n$) são tomados como influentes e merecedores de uma análise mais detalhada (Judge et alii, 1988:893). Das 50 observações de x que formam a amostra base, três possuem valores associados diagonais da matriz-chapéu superiores a $3p/n = 0,12$. Um novo conjunto de simulações foi realizado retirando estas observações, substituindo-as por três outras realizações da mesma distribuição, checando se há observações influentes no novo conjunto de valores da covariável, substituindo-as caso sejam detectadas (de acordo com a mesma regra) e repetindo o processo até se obter um conjunto de valores de x que não apresente nenhum h_i superior a $3p/n$. Esta amostra de 50 valores de x foi, então, usada, via replicação de valores, para gerar amostras de tamanho 100, 150 e 200. Os resultados correspondentes aos apresentados nas tabelas 1 a 3 encontram-se apresentados nas tabelas 7 a 9. Os valores de γ foram alterados para evitar que o grau de heterocedasticidade fosse substancialmente reduzido.

Uma comparação entre os resultados apresentados na tabela 1 (vieses relativos totais com pontos de alavancagem) e aqueles na tabela 7 (vieses relativos totais sem pontos de alavancagem) revela que quando a matriz de covariá-

veis não apresenta observações dominantes o desempenho dos estimadores das variâncias apresenta melhora substancial. Considere o caso onde $n = 100$ e $\lambda \approx 204$ na tabela 1. O viés relativo total do estimador de White é de aproximadamente 30%, esta medida valendo cerca de 10% para o estimador de *bootstrap* e 5% para o primeiro estimador corrigido analiticamente. Quando não há pontos de alavancagem na matriz X (tabela 7, com $n = 100$ e $\lambda \approx 253$), o viés do estimador de White é reduzido para aproximadamente 11%, o do estimador de *bootstrap* para menos de 3% e o do estimador BCW1 para menos de 1%. Ou seja, a presença de pontos de alta alavancagem nos regressores deteriora substancialmente o desempenho dos estimadores no que diz respeito a comportamento de viés em amostras finitas.

Tabela 7
Vieses relativos totais, sem pontos de alavancagem

n	γ	λ	MQO	<i>white</i>	<i>boot</i>	BCW1	BCW2	BCW3	BCW4
50	0,00	1,0000	0,0052	0,1108	0,0021	0,0054	0,0027	0,0035	0,0037
	0,50	3,0231	0,2431	0,1350	0,0149	0,0135	0,0020	0,0008	0,0007
	1,00	9,1391	0,4125	0,1683	0,0336	0,0265	0,0106	0,0083	0,0079
	1,50	27,6285	0,4836	0,1845	0,0347	0,0190	0,0019	0,0052	0,0057
	2,00	83,5238	0,6813	0,2039	0,0430	0,0189	0,0065	0,0106	0,0114
	2,50	252,5009	0,8461	0,2275	0,0574	0,0284	0,0005	0,0053	0,0062
100	0,00	1,0000	0,0010	0,0603	0,0068	0,0057	0,0036	0,0035	0,0035
	0,50	3,0231	0,2447	0,0639	0,0042	0,0014	0,0032	0,0034	0,0035
	1,00	9,1391	0,4149	0,0840	0,0182	0,0082	0,0039	0,0036	0,0036
	1,50	27,6285	0,4749	0,0941	0,0212	0,0056	0,0001	0,0005	0,0005
	2,00	83,5238	0,6700	0,1114	0,0310	0,0124	0,0055	0,0049	0,0049
	2,50	252,5009	0,8255	0,1146	0,0264	0,0068	0,0011	0,0018	0,0018
150	0,00	1,0000	0,0015	0,0304	0,0040	0,0069	0,0079	0,0079	0,0079
	0,50	3,0231	0,2439	0,0495	0,0121	0,0062	0,0048	0,0047	0,0047
	1,00	9,1391	0,4161	0,0514	0,0080	0,0005	0,0025	0,0026	0,0026
	1,50	27,6285	0,4772	0,0520	0,0049	0,0090	0,0116	0,0118	0,0118
	2,00	83,5238	0,6609	0,0706	0,0189	0,0027	0,0004	0,0006	0,0006
	2,50	252,5009	0,8188	0,0790	0,0230	0,0054	0,0018	0,0016	0,0016
200	0,00	1,0000	0,0046	0,0229	0,0023	0,0051	0,0057	0,0057	0,0057
	0,50	3,0231	0,2444	0,0315	0,0034	0,0014	0,0022	0,0022	0,0022
	1,00	9,1391	0,4157	0,0410	0,0085	0,0017	0,0006	0,0005	0,0005
	1,50	27,6285	0,4776	0,0372	0,0031	0,0089	0,0104	0,0105	0,0105
	2,00	83,5238	0,6572	0,0524	0,0139	0,0009	0,0009	0,0010	0,0010
	2,50	252,5009	0,8172	0,0615	0,0172	0,0057	0,0036	0,0035	0,0035

Tabela 8
REQM totais ($\times 100$), sem pontos de alavancagem

n	γ	λ	MQO	white	boot	BCW1	BCW2	BCW3	BCW4
50	0,00	1,0000	8,3813	11,4443	12,3736	12,1833	12,2967	12,3129	12,3156
	0,50	3,0231	19,0568	25,3211	27,3226	27,4054	27,7793	27,8413	27,8525
	1,00	9,1391	62,4398	68,8470	74,5827	75,4723	76,7237	76,9448	76,9862
	1,50	27,6285	203,2098	201,4822	221,5258	223,7420	228,0311	228,8147	228,9645
	2,00	83,5238	647,8495	619,2539	685,4183	692,7271	707,0930	709,7834	710,3071
	2,50	252,5009	2036,4772	1928,6601	2157,5189	2165,6376	2212,3076	2221,1463	2222,8778
100	0,00	1,0000	2,9798	4,0987	4,3778	4,2271	4,2371	4,2378	4,2379
	0,50	3,0231	7,9064	9,0132	9,6483	9,4044	9,4390	9,4419	9,4422
	1,00	9,1391	28,4710	24,7665	26,2324	26,0167	26,1347	26,1451	26,1461
	1,50	27,6285	95,4504	74,7350	79,2458	79,0301	79,4418	79,4793	79,4829
	2,00	83,5238	308,2577	228,4839	244,6255	242,2218	243,5705	243,6964	243,7086
	2,50	252,5009	971,1751	706,9147	768,4887	752,2921	756,7861	757,2121	757,2540
150	0,00	1,0000	1,5992	2,2446	2,4381	2,3002	2,3029	2,3030	2,3030
	0,50	3,0231	4,8620	4,9840	5,3397	5,1234	5,1320	5,1324	5,1325
	1,00	9,1391	18,3030	13,9151	14,8224	14,4184	14,4495	14,4513	14,4515
	1,50	27,6285	61,9585	41,9982	44,4072	43,7336	43,8422	43,8487	43,8491
	2,00	83,5238	200,8887	127,0049	134,3198	132,2987	132,6431	132,6645	132,6659
	2,50	252,5009	636,6971	396,9793	423,5432	414,1045	415,2310	415,3022	415,3068
200	0,00	1,0000	1,0367	1,4531	1,6104	1,4799	1,4808	1,4809	1,4809
	0,50	3,0231	3,4638	3,2605	3,5379	3,3349	3,3381	3,3383	3,3383
	1,00	9,1391	13,4816	9,0975	9,7640	9,3408	9,3522	9,3527	9,3528
	1,50	27,6285	45,7631	27,3574	28,9337	28,2197	28,2600	28,2618	28,2619
	2,00	83,5238	148,7535	82,7103	88,1482	85,3259	85,4536	85,4595	85,4598
	2,50	252,5009	473,2489	259,2281	277,8635	267,5866	268,0008	268,0204	268,0214

Tabela 9
Níveis de significância de testes quase- t a $\alpha = 5\%$, sem pontos de alavancagem

n	γ	λ	MQO	<i>white</i>	<i>boot</i>	BCW1	BCW2	BCW3	BCW4
50	0,00	1,0000	5,33	6,39	5,83	5,72	5,68	5,68	5,68
	0,50	3,0231	7,90	7,42	6,75	6,74	6,70	6,69	6,69
	1,00	9,1391	11,57	7,98	7,23	7,15	7,04	7,04	7,04
	1,50	27,6285	16,93	8,81	7,91	7,70	7,60	7,58	7,58
	2,00	83,5238	21,51	9,19	8,09	7,95	7,81	7,81	7,81
	2,50	252,5009	26,05	9,41	8,21	7,94	7,80	7,77	7,76
100	0,00	1,0000	5,50	6,24	5,89	5,81	5,77	5,77	5,77
	0,50	3,0231	7,53	6,16	5,86	5,78	5,74	5,73	5,73
	1,00	9,1391	11,69	6,81	6,43	6,24	6,22	6,22	6,22
	1,50	27,6285	15,81	6,71	6,18	6,07	6,04	6,04	6,04
	2,00	83,5238	20,14	6,86	6,43	6,30	6,23	6,23	6,23
	2,50	252,5009	24,71	7,45	6,86	6,68	6,62	6,62	6,62
150	0,00	1,0000	5,08	5,45	5,34	5,15	5,14	5,14	5,14
	0,50	3,0231	7,64	5,85	5,66	5,58	5,56	5,56	5,56
	1,00	9,1391	11,36	6,08	6,04	5,73	5,72	5,72	5,72
	1,50	27,6285	15,60	6,09	5,95	5,71	5,71	5,71	5,71
	2,00	83,5238	19,12	6,10	5,94	5,68	5,68	5,68	5,68
	2,50	252,5009	24,07	6,88	6,50	6,33	6,32	6,32	6,32
200	0,00	1,0000	4,88	5,33	5,05	5,17	5,17	5,17	5,17
	0,50	3,0231	8,01	6,14	5,96	5,91	5,91	5,91	5,91
	1,00	9,1391	11,27	5,66	5,46	5,49	5,49	5,49	5,49
	1,50	27,6285	16,45	5,91	5,87	5,56	5,55	5,55	5,55
	2,00	83,5238	18,97	5,73	5,68	5,37	5,37	5,37	5,37
	2,50	252,5009	22,52	5,86	5,72	5,63	5,63	5,63	5,63

Uma comparação similar de resultados, mas desta vez entre as tabelas 2 e 8 (raiz quadrada do erro quadrático médio total) revela uma conclusão intrigante: o erro quadrático médio dos estimadores aumentou quando os pontos de alta alavancagem da matriz X foram substituídos por pontos que não são influentes. A explicação se encontra no fato de que os estimadores medem a variabilidade das estimativas dos parâmetros lineares, e esta variabilidade é artificialmente reduzida quando há observações dominantes na matriz X , uma vez que estas observações tendem a dominar o ajuste, resultando, assim, em baixa variabilidade para as estimativas dos parâmetros de regressão.⁴

⁴ Lembre que o erro quadrático médio é dado pela soma do quadrado do viés do estimador com sua variância.

Os resultados nas tabelas 1, 2, 7 e 8, quando contrastados, mostram que a presença de pontos de alta alavancagem nos regressores aumenta o viés dos estimadores e reduz sua variância.⁵ Torna-se, assim, importante investigar qual o efeito que pontos influentes nas covariáveis têm sobre o desempenho em amostras finitas de testes quase- t associados aos diferentes estimadores. Os tamanhos estimados dos testes correspondentes aos realizados para a situação onde estes pontos existem (tabela 3), agora para o caso onde não há observações dominantes, são apresentados na tabela 9, na qual mais uma vez representam porcentagens de rejeições da hipótese nula. Um contraste entre as tabelas 3 e 9 deixa claro que a presença de observações influentes deteriora consideravelmente o desempenho de testes quase- t baseados em estimadores consistentes das variâncias dos estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros de regressão. Esta deterioração vem, como visto através dos resultados nas tabelas 1 e 7, do aumento do viés causado por observações influentes.

Tabela 10

Vieses relativos totais, sem pontos de alavancagem: HC1, HC2 e HC3

n	γ	λ	HC1	HC2	HC3
50	0,00	1,0000	0,0321	0,0036	0,1263
	0,50	3,0231	0,0572	0,0088	0,1275
	1,00	9,1391	0,0920	0,0291	0,1225
	1,50	27,6285	0,1088	0,0313	0,1365
	2,00	83,5238	0,1291	0,0404	0,1396
	2,50	252,5009	0,1537	0,0573	0,1305
100	0,00	1,0000	0,0207	0,0034	0,0555
	0,50	3,0231	0,0244	0,0034	0,0655
	1,00	9,1391	0,0449	0,0135	0,0600
	1,50	27,6285	0,0552	0,0166	0,0645
	2,00	83,5238	0,0729	0,0287	0,0580
	2,50	252,5009	0,0761	0,0276	0,0636
150	0,00	1,0000	0,0041	0,0078	0,0469
	0,50	3,0231	0,0231	0,0072	0,0360
	1,00	9,1391	0,0251	0,0040	0,0447
	1,50	27,6285	0,0256	0,0028	0,0543
	2,00	83,5238	0,0446	0,0150	0,0425
	2,50	252,5009	0,0530	0,0207	0,0395
200	0,00	1,0000	0,0035	0,0057	0,0348
	0,50	3,0231	0,0117	0,0016	0,0327
	1,00	9,1391	0,0212	0,0054	0,0308
	1,50	27,6285	0,0174	0,0021	0,0423
	2,00	83,5238	0,0328	0,0106	0,0323
	2,50	252,5009	0,0420	0,0177	0,0272

⁵ O mesmo ocorre com os estimadores HC1, HC2 e HC3 (ver tabelas 5 e 11).

Os resultados para as simulações envolvendo os estimadores HC1, HC2 e HC3 estão nas tabelas 10 a 12. Os vieses destes estimadores também são reduzidos quando não há pontos de alavancagem nos regressores. O estimador HC2 continua sendo o que possui menor viés, superando os estimadores HC1 e HC3. A tabela 12 apresenta as taxas de rejeição sob a hipótese nula dos testes que utilizam os três estimadores da variância de $\hat{\beta}_2$ e revela que o estimador HC3 é o que fornece as menores distorções de tamanho quando utilizado para construir estatísticas quase- t .

Tabela 11
REQMs totais ($\times 100$), sem pontos de alavancagem: HC1, HC2 e HC3

n	γ	λ	HC1	HC2	HC3
50	0,00	1,0000	11,6916	12,0451	13,2488
	0,50	3,0231	25,8549	26,9415	29,8572
	1,00	9,1391	70,4459	73,8752	81,9858
	1,50	27,6285	206,8968	218,2127	243,1914
	2,00	83,5238	637,1428	674,1197	752,2493
	2,50	252,5009	1986,1593	2104,6600	2348,4526
100	0,00	1,0000	4,1382	4,1958	4,3900
	0,50	3,0231	9,1138	9,3010	9,7945
	1,00	9,1391	25,0580	25,6532	27,0122
	1,50	27,6285	75,7551	77,7603	81,9879
	2,00	83,5238	231,6851	238,0418	250,9164
	2,50	252,5009	717,4995	738,3781	779,4239
150	0,00	1,0000	2,2644	2,2879	2,3653
	0,50	3,0231	5,0155	5,0814	5,2502
	1,00	9,1391	14,0360	14,2675	14,7807
	1,50	27,6285	42,4257	43,2100	44,8266
	2,00	83,5238	128,2375	130,6188	135,3451
	2,50	252,5009	400,9523	408,6151	423,4046
200	0,00	1,0000	1,4625	1,4737	1,5108
	0,50	3,0231	3,2795	3,3136	3,4007
	1,00	9,1391	9,1545	9,2652	9,5089
	1,50	27,6285	27,5703	27,9548	28,7427
	2,00	83,5238	83,3166	84,4775	86,7666
	2,50	252,5009	261,1426	264,8347	271,9122

Tabela 12
Níveis de significância de testes quase- t a $\alpha = 5\%$
sem pontos de alavancagem: HC1, HC2 e HC3

n	γ	λ	HC1	HC2	HC3
50	0,00	1,0000	5,88	5,68	5,03
	0,50	3,0231	6,98	6,72	5,94
	1,00	9,1391	7,53	7,14	6,13
	1,50	27,6285	8,20	7,75	6,71
	2,00	83,5238	8,64	8,03	6,91
	2,50	252,5009	8,74	8,03	6,97
100	0,00	1,0000	6,00	5,77	5,37
	0,50	3,0231	5,91	5,79	5,38
	1,00	9,1391	6,53	6,28	5,85
	1,50	27,6285	6,31	6,10	5,69
	2,00	83,5238	6,54	6,35	5,92
	2,50	252,5009	7,13	6,81	6,22
150	0,00	1,0000	5,26	5,13	4,97
	0,50	3,0231	5,71	5,59	5,25
	1,00	9,1391	5,91	5,76	5,47
	1,50	27,6285	5,90	5,75	5,44
	2,00	83,5238	5,90	5,73	5,41
	2,50	252,5009	6,69	6,45	6,07
200	0,00	1,0000	5,25	5,17	5,02
	0,50	3,0231	6,02	5,94	5,72
	1,00	9,1391	5,56	5,49	5,30
	1,50	27,6285	5,75	5,61	5,38
	2,00	83,5238	5,58	5,40	5,17
	2,50	252,5009	5,80	5,68	5,45

4. Conclusões

É prática comum a utilização de variâncias estimadas das estimativas de mínimos quadrados de parâmetros lineares de regressão quando se suspeita da presença de heterocedasticidade nos dados. Este artigo investiga o desempenho deste estimador e de testes construídos a partir dele quando o tamanho amostral é pequeno ou moderado. Os resultados de simulação apresentados revelam que o estimador de White pode ser bastante viesado em amostras de tamanho típico. O viés ocorre no sentido de se subestimar as variâncias verdadeiras, conduzindo, assim, a testes quase- t liberais.

Investigou-se também o desempenho do estimador de *bootstrap*, obtido a partir de esquemas de reamostragem de resíduos e construção de pseudo-amostras, e também de estimadores de White corrigidos, ou seja, estimadores obtidos a partir do estimador originalmente proposto por Halbert White aplicando-se transformações a este estimador que visam a reduzir o seu viés em amostras finitas. Tanto os estimadores de *bootstrap* quanto os corrigidos se mostraram superiores ao estimador de White em amostras de tamanho pequeno a moderado no que diz respeito ao seu viés e à inferência associada a partir de testes quase-*t*.

Os resultados revelaram, ainda, que os estimadores corrigidos propostos por Cribari-Neto, Ferrari e Cordeiro (2000) apresentam desempenho superior ao do estimador de *bootstrap* em amostras finitas. Entre as variantes do estimador de White consideradas, o estimador HC1 mostrou melhor desempenho no que diz respeito a erro quadrático médio, o estimador HC2 dominou quando o critério era viés e o estimador HC3 se mostrou o mais confiável para utilização em testes quase-*t*.

Os resultados neste artigo mostraram que a presença de pontos de alta alavancagem na matriz de regressores exerce um papel central no desempenho dos diversos estimadores, este desempenho claramente deteriorando quando tais pontos existem.

Por fim, vale notar que as simulações sugerem duas linhas futuras de pesquisa. Em primeiro lugar, parece importante obter estimadores analiticamente corrigidos a partir dos estimadores HC1, HC2 e HC3, generalizando assim os resultados de Cribari-Neto, Ferrari e Cordeiro (2000), principalmente porque o estimador HC3 é o que apresenta melhor desempenho quando utilizado na construção de testes quase-*t*, mas apresenta viés bem superior ao dos estimadores corrigidos a partir do estimador de White. A segunda linha de pesquisa é a obtenção de estimadores da matriz de covariância que sejam “robustos” à presença de pontos de alavancagem na matriz de variáveis explicativas do modelo. Estas duas pesquisas estão sendo desenvolvidas pelo primeiro autor.

Referências Bibliográficas

Cribari-Neto, F.; Ferrari, S. L. P. & Cordeiro, G. M. Improved heteroscedasticity-consistent covariance matrix estimators. *Biometrika*, 87:907-18, 2000.

_____ & Zarkos, S. G. Bootstrap methods for heteroskedastic regression models: evidence on estimation and testing. *Econometric Reviews*, 18:211–28, 1999a.

_____ & _____. R: yet another econometric programming environment. *Journal of Applied Econometrics*, 14:319–29, 1999b.

Davidson, R. & MacKinnon, J. G. *Estimation and inference in econometrics*. New York, Oxford University Press, 1993.

Davison, A. C. & Hinkley, D. V. *Bootstrap methods and their application*. New York, Cambridge University Press, 1997.

Doornik, J. A. *Object-oriented matrix programming using Ox*. 3 ed. Kent, Timberlake Consultants, 1999. <http://www.nuff.ox.ac.uk/Users/Doornik>.

Efron, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7:1–26, 1979.

_____ & Tibshirani, R. J. *An introduction to the bootstrap*. New York, Chapman & Hall, 1993.

Judge, G. C.; Hill, R. C.; Griffiths, W. E.; Lutkepohl, H. & Lee, T.-C. *Introduction to the theory and practice of econometrics*. 2 ed. New York, Wiley, 1988.

MacKinnon, J. G. The Linux operating system: Debian GNU/Linux. *Journal of Applied Econometrics*, 14:443–52, 1999.

_____ & White, H. Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties. *Journal of Econometrics*, 29:305–25, 1985.

Marsaglia, G. A random number generator for C. In: Sci. stat. Math. 1997. (Mensagem circulada no grupo de discussão.)

Stallman, R. M. *Using and porting the GNU compiler collection*. Boston, The Free Software Foundation, 1999.

White, H. A heteroskedasticity-consistent covariance matrix and a direct test for heteroskedasticity. *Econometrica*, 48:817–38, 1980.

Wooldridge, J. M. *Introductory econometrics: a modern approach*. Cincinnati, South-Western College Publishing, 2000.

Wu, C. F. J. Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis. *Annals of Statistics*, 14:1261–95, 1986.

Anexo

Este anexo contém o código fonte em C do gerador de números aleatórios utilizado nas simulações de Monte Carlo. Este gerador se encontra, ainda, implementado nas linguagens matriciais de programação Ox (Doornik, 1999) e R (Cribari-Neto & Zarkos, 1999b).

```
#define s1new (s1=(18000*(s1&0xFFFF)+(s1>>16)))
#define s2new (s2=(30903*(s2&0xFFFF)+(s2>>16)))
#define UNI (((s1new<<16)+(s2new&0xFFFF))*2.32830643708e-10)
static unsigned long s1=362436069, s2=521288629;
#define setseed(seed1,seed2) {s1=seed1;s2=seed2;}
```