A técnica da resolução das equações Relativas à Interpolação da Lei de Mitscherlich pelo Método dos Quadrados Mínimos

IZAIAS RANGEL NOGUEIRA
Assistente substituto da 16a. cadeira da E. S. A.
"Luiz de Queiroz"

Conforme mostraram *Pimentel Gomes* e *Malavolta, a interpolação da equação de Mitscherlich*

$$y = A\left[1 - 10^{-c\,(x+b)}\right]$$

pelo método dos quadros mínimos conduz á equação em c:

$$\text{(I)} \quad \begin{vmatrix} \Sigma y_i & n & \Sigma 10^{-cx_i} \\ \Sigma x_i y_i 10^{-cx_i} & \Sigma x_i 10^{-cx_i} & \Sigma 10^{-2cx_i} . x_i \\ \Sigma y_i 10^{-cx_i} & \Sigma 10^{-cx_i} & \Sigma 10^{-2cx_i} \end{vmatrix} = 0$$

cuja resolução se consegue mais fàcilmente tomando:

$x_i = q.m_i$ $(i = 1,2,\ldots\ldots, n)$, sendo m_i um número inteiro, e fazendo:

$$Z = 10^{-cq}$$ obtem-se assim a equação algébrica em Z

$$\text{(II)} \quad \begin{vmatrix} \Sigma y_i & n & \Sigma Z^{m_i} \\ \Sigma x_i y_i Z^{m_i} & \Sigma x_i Z^{m_i} & \Sigma Z^{2m_i} . x_i \\ \Sigma y_i Z^{m_i} & \Sigma Z^{m_i} & \Sigma Z^{2m_i} \end{vmatrix} = 0$$

cujo desenvolvimento pode ser feito por qualquer dos métodos conhecidos.

Achamos preferivel, porém, desenvolver o determinante segundo os elementos da primeira coluna, e isso pelos motivos seguintes:

1) Com excessão desta 1a. coluna todos demais elementos do determinante não contêm valores de y.

Isto significa que se as mesmas doses de fertilisantes foram usadas para diversas experiências, aquêles elementos têm o mesmo valor para tôdas elas, de sorte que os complementos algébricos dos elementos da 1a. coluna são sempre os mesmos.

2) Observando o que acontece ao determinante quando $Z = 1$, temos:

$$\text{(III)} \quad \Delta_{(1)} = \begin{vmatrix} \Sigma y_i & n & n \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i & \Sigma x_i \\ \Sigma y_i & n & n \end{vmatrix}$$

concluimos que os menores correspondentes à 1a. coluna são nulos (pois tem cada um dêles 2 colunas iguais).

Se êles são nulos, os polinômios dêles oriundos, por desenvolvimento, se anulam para $Z = 1$, isto é, a soma de seus coeficientes deve ser nula. Dai se conclui que são divisíveis por $(Z - 1)$.

Esta propriedade nos auxilia muito no desenvolvimento, pois que nos permite tirar a prova dos nossos cálculos, simplesmente somando os coeficientes de Z em cada polinômio.

Êstes devem, como vimos acima, ter soma nula.

O 1o. desenvolvimento, segundo a 1a. coluna, conduz então à equação:

$$P_1(Z)\ \Sigma y_i + P_2(Z)\ \Sigma x_i y_i Z^{mi} + P_3(Z)\ \Sigma y_i Z^{mi} = 0$$

* onde $P_1(Z)$, $P_2(Z)$ e $P_3(Z)$ são nulos para $Z = 1$

Efetuando agora êsses produtos, chegamos ao polinômio P (Z) de gráu geralmente elevado.

Êste também para Z igual a 1, deve dar uma soma de coeficiente nula, pois (I) deve anular-se para êsse valor de Z.

Mas uma vez portanto, podemos tirar a prova dos nossos cálculos.

Vamos a seguir determinar o valor da raiz Z da equação (I), que como se sabe (Pimentel Gomes e Malavolta, 1949, pg. 15), deve estar compreendida entre *0* e *1*.

A localização da raiz de uma equação de grau elevado é feita por tentativa, localizando-se primeiramente o intervalo onde ela se encontra.

No nosso caso, como acima referimos, ela já está localizada. Procuraremos então no intervalo citado, o valor mais aproximado da raiz, seguindo para tal o processo de Briot-Ruffini (um exemplo numérico esclareceria bem a marcha a seguir).

Uma vez localizada a raiz, calculamos os outros parâmetros da equação de Mitscherlich, pelo processo já referido por *Pimentel Gomes* e *Malavolta*.

Como um exemplo, apresentamos um trabalho por nós pesquizados, em dados de calagem de trigo, realizado em *Ponta Grossa*, em 1947.

As doses de cal utilizadas foram de 2, 4, 6 e 8 toneladas por Ha, e as médias dos valores obtidos, 2378, 2658, 2724 e 2798 Kg/Ha, sendo que a testemunha deu 2.040 Kg.

Se tomarmos como unidade, para facilitar o cálculo, 2 toneladas/Ha, as doses de cal serão 0, 1, 2, 3 e 4.

Em resumo teremos

(*) Evidentemente os polinômios P1 (Z), P2 (Z) e P3 (Z) podem ser tabulados, trazendo êste fato grande vantagem para o cálculo de Z

Doses	Valores obtidos
0	2040
1	2378
2	2658
3	2724
4	2798
Soma total:	12.598

Utilizando a equação (II) e desenvolvendo o determinante segundo os elementos da 1a. coluna obtemos:

$$12.5988\ (1 + Z + 3Z^2 + 3Z^3 + Z^4 - Z^6 - 3Z^7 - 3Z^8 - Z^9 - Z^{10}) - (2378 + 5316Z + 8172Z^2 + 11.192Z^3)\ (4 - 2Z + 2Z^2 - 4Z^3 - 4Z^5 + 2Z^6 - 2Z^7 + 4Z^8) + (2040 + 2378Z + 2658Z^2 + 2724Z^3 + 2798Z^4)\ (-1 + 2Z - 6Z^2 - 10Z^4 + 6Z^5 - 7Z^6 + 16Z^7) = 0$$

Os têrmos grifados dão, conforme podemos verificar, um valor nulo para $Z = 1$.

Efetuando os produtos acima obtemos a equação final:

$$1096Z^{10} + 346Z^9 - 444Z^8 - 6280Z^7 + 5298Z^6 - 2472Z^5 + 6204Z^4 - 3426Z^3 + 840Z^2 - 2208Z + 1046 = 0$$

Esta equação também tem valor nulo para $Z = 1$.

Efetuaando a pesquisa da raiz pelo método de Briot-Ruffini, encontramos $Z = 0{,}5614$

Utilizando as fórmulas: $10^{-2c} = Z$, $A = \dfrac{\begin{vmatrix} \Sigma y_i & \Sigma Z^{m_i} \\ \Sigma x_i y_i Z^{m_i} & \Sigma x Z^{2m_i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \Sigma Z^{m_i} \\ \Sigma x_i Z^{m_i} & \Sigma x_i Z^{2m_i} \end{vmatrix}}$

e $b = \dfrac{1}{c} \log \left| \dfrac{A \cdot \Sigma Z^{m_i}}{nA - \Sigma y_i} \right|$

(Fórmulas estas indicadas no trabalho de Pimentel Gomes e Malavolta, pg 7), encontramos:

$c = 0{,}12536$ $A = 2.887{,}3$ e $b = 4{,}22$

Substituindo êsses valores na equação $y = A\left[1 - 10^{-c(x+b)}\right]$

temos

$$y = 2.887{,}3 \left[1 - 10^{-0{,}12536\ (x\ +\ 4{,}22)} \right]$$

Substituindo os valores de x (doses de fertilisantes), nesta equação, encontramos os seguintes valores:

Em resumo:

	Valores Observados	Valores esperados
	2040	2.033,3
	2378	2.407,8
	2658	2.618,1
	2724	2.736,2
	2798	2.802,5
Somas totais	12.598	12.597,9

BIBLIOGRAFIA CITADA

PIMENTEL Gomes Frederico e Euripedes MALAVOLTA — Considerações Matemáticas sôbre a Lei de Mitscherlich. Piracicaba 1949.