Fórmulas diretas de Ansheles (*)

EDUARDO A. SALGADO

Escola Superior de Agricultura «Luiz de Queiroz»

* Recebido para publicação em 14 de junho de 1960.

1 — INTRODUÇÃO

Na Cristalografia de BOLDYREV (1934), Professor da Escola de Minas e Diretor do Instituto Fedorow de Leningrado, tradução para o espanhol de Candel Vila, Editorial Labor, são publicadas, sem dedução, fórmulas devidas ao Professor Ansheles e que integram o seu "método das fórmulas diretas».

Limita-se BOLDYREV (1934) a fazer menção de um trabalho de Padurov, pela qual ficamos sabendo que as fórmulas diretas de Ansheles podem ser obtidas a partir de fórmulas de projetividade.

O presente trabalho tem por objetivo deduzir as fórmulas de Ansheles, não se valendo o autor de equações de projetividade e sim da projeção estereográfica, de fórmulas que dão os ângulos entre faces de poliedros cristalográficos, de fórmulas da trigonometria esférica e, ainda, para o sistema triclínico, do teorema de cosenos de Wulff.

Aqui, como em BOLDYREV (1934), P = (100), Q = (010), R = (001), U = (111), X = face qualquer do cristal, sendo φ e ρ coordenadas esféricas das faces em jôgo.

Em lugar das letras p, q, r usaremos h, k, l para os índices do símbolo de Miller, recebendo as fórmulas deduzidas os mesmos números que se encontram na Cristalografia de BOLDYREV (1934).

2 — DEDUÇÃO

SISTEMA CÚBICO

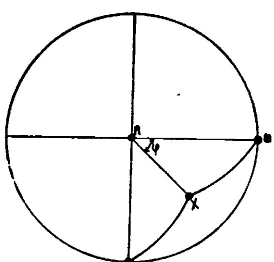

Fig. 1

Temos (fig. 1):

$$\cos^2 PX = \operatorname{sen}^2 \rho X . \operatorname{sen}^2 \varphi X = \frac{h^2}{m}$$

$$\cos^2 QX = \operatorname{sen}^2 \rho X . \cos^2 \varphi X = \frac{k^2}{m}$$

$$\cos^2 RX = \cos^2 \rho X = \frac{l^2}{m},$$

sendo $m = h^2 + k^2 + l^2$.

Vem:

$$h^2 = m . \operatorname{sen}^2 \rho X . \operatorname{sen}^2 \varphi X \quad (1)$$

$$k^2 = m . \operatorname{sen}^2 \rho X . \cos^2 \varphi X \quad (2)$$

$$l^2 = m . \cos^2 \rho X \quad (3)$$

Dividindo (1) por (2) e extraindo a raiz quadrada:

$$\operatorname{tg} \varphi X = \frac{h}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [21]$$

Somando (1) e (2) temos:

$h^2+k^2 = m.\operatorname{sen}^2 \rho X$ (4). Dividindo (4) por (3), vem:

$$\operatorname{tg} \rho X = \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [22]$$

De [21] tira-se: $h = T \operatorname{sen} \varphi X$

$k = T \cos \varphi X$, donde $h^2+k^2 = T^2$, sendo T um coeficiente de proporcionalidade. De [22] tira-se:

$l = T \operatorname{cotg} \rho X$. E, finalmente:

$h:k:l = \operatorname{sen} \varphi X : \cos \varphi X : \operatorname{cotg} \rho X$ .... [20]

SISTEMA QUADRÁTICO

Temos (fig. 1):

$$\cos^2 PX = \operatorname{sen}^2 \rho X . \operatorname{sen}^2 \varphi X = \frac{h^2 c^2}{m}$$

$$\cos^2 QX = \operatorname{sen}^2 \rho X . \cos^2 \varphi X = \frac{k^2 c^2}{m}$$

$$\cos^2 RX = \cos^2 \rho X = \frac{l^2}{m}, \text{ sendo } m = h^2 c^2 + k^2 c^2 + l^2.$$

Vem:

$h^2 c^2 = m.\operatorname{sen}^2 \rho X . \operatorname{sen}^2 \varphi X$ (1)

$k^2 c^2 = m.\operatorname{sen}^2 \rho X . \cos^2 \varphi X$ (2)

$l^2 = m.\cos^2 \rho X$ (3). Dividindo (1) por (2), temos:

$$\operatorname{tg} \varphi X = \frac{h}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [18]$$

Somando (1) e (2):

$c^2 (h^2+k^2) = m.\operatorname{sen}^2 \rho X$ (4). Dividindo (3) por (4) e levando em conta [18], vem:

$l = c.\operatorname{cotg} \rho X$ (5)

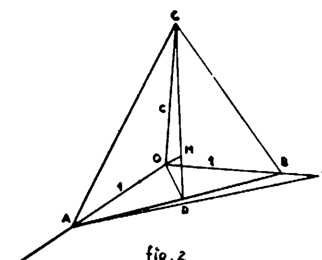

fig. 2

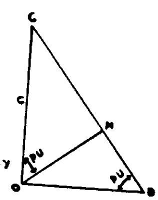

fig. 3

A figura 2 representa os eixos cristalográficos do sistema e a face parametral ABC e a figura 3 o plano COD que, passando pelo eixo OZ, é perpendicular à face (111), sendo OM normal a CD.

No triângulo AOD: $AD = \frac{\sqrt{2}}{2}$

No triângulo OMD: $OM = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ sen } \rho \text{ U}$ (6)

No triângulo COM: $OM = c \quad \cos \rho \text{ U}$ (7)

Dividindo (6) por (7) obtém-se:

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2 \text{ cotg } \rho U} \quad (8)$$

Levando êste valor de *c* em (5):

$$1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\text{cotg } \rho X}{\text{cotg } \rho U}$$

E, como sen $45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, vem, finalmente:

$$h:k:l = \text{sen } \varphi X : \cos \varphi X : \frac{\sqrt{2} \text{ cotg } \rho X}{2 \text{ cotg } \rho U} =$$

$$= \frac{\text{sen } \varphi X}{\text{sen } 45^0} : \frac{\cos \varphi X}{\cos 45^0} : \frac{\text{cotg } \rho X}{\sqrt{2} \text{ cotg } \rho U} \quad \ldots\ldots \quad [17]$$

De [17] tira-se, imediatamente:

$$\text{cotg } \rho X = \frac{l.\text{cotg } \rho U.\text{sen } \varphi X}{\text{hsen}45} = \frac{l.\text{cotg } \rho U.\cos \varphi X}{\text{kcos}45} \quad \ldots\ldots \quad [19]$$

SISTEMA RÔMBICO

De maneira análoga ao quadrático, temos (fig. 1):

$h^2 \, c^2 = m.\text{sen}^2 \, \rho X.\text{sen}^2 \, \varphi X$ (1)

$k^2 \, a^2 \, c^2 = m.\text{sen}^2 \rho X.\cos^2 \, \varphi X$ (2)

$l^2 \, a^2 = m.\cos^2 \, \rho X$ (3), sendo $m = h^2 \, c^2 + k^2 \, a^2 \, c^2 + l^2 \, a^2$.

De (1) e (2) obtém-se:

$$\text{cotg } \varphi X = \frac{ak}{h} \quad (4)$$

As figuras *2* e *3*, que serviram para o quadrático, serão agora utilizadas para o rômbico. Na fig. *2*, OA = a e OB = 1.

No triângulo AOD, OD = a senφU (5)

No triângulo ODB, OD = cosφU (6). Dividindo (5) por (6) obtém-se:

$a = \text{cotg}\varphi U$. Levando êste valor de *a* em (4), vem:

$\text{cotg}\varphi X = \dfrac{k}{h}\text{cotg}\varphi U$ [15]. Desta fórmula obtém-se

$$h : k = \frac{\cos\varphi U}{\text{sen}\varphi U} : \frac{\cos\varphi X}{\text{sen}\varphi X} = \frac{\text{sen}\varphi X}{\text{sen}\varphi U} : \frac{\cos\varphi X}{\cos\varphi U} \quad (7)$$

Somando (1) e (2):

$c^2 (h^2 + k^2 a^2) = m.\text{sen}^2\rho X$ (8). Dividindo (3) por (8):

$$\text{cotg}^2 \rho X = \frac{l^2 a^2}{c^2 (h^2 + k^2 a^2)} \quad (9).$$

Da figura *3* tira-se: $c = OD.\text{tg}\rho U$ e, substituindo OD por $\cos\varphi U$ (ver 6):

$c = \text{tg}\rho U.\cos\varphi U$.

Levando em (9) os valores de *a* e *c*, achados anteriormente, bem como os valores finais de *h* e *k*, tirados de (7), tem-se:

$$\text{cotg}^2\rho X = \frac{l^2 \text{cotg}^2\varphi U}{\text{tg}^2\rho U (\text{cotg}^2\varphi U.\text{sen}^2\varphi X + \text{cotg}^2\varphi U.\cos^2\varphi X)} \therefore$$

$\therefore\ l = \dfrac{\text{cotg}\rho X}{\text{cotg}\rho U}$ (10). De (7) e (10) obtém-se:

$$h : k : l = \frac{\text{sen}\varphi X}{\text{sen}\varphi U} : \frac{\cos\varphi X}{\cos\varphi U} : \frac{\text{cotg}\rho X}{\text{cotg}\rho U} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [14]$$

Desta, tira-se fàcilmente a fórmula [16]:

$$\text{cotg}\rho X = \frac{l\ \text{cotg}\rho U.\text{sen}\varphi X}{h\ \text{sen}\varphi U} = \frac{l\ \text{cotg}\rho U.\cos\varphi X}{k\ \cos\varphi U}.$$

SISTEMA HEXAGONAL

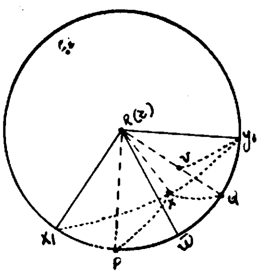

fig. 4

Temos, na figura *4*, onde os eixos cristalográficos de parâmetro *a* são representados por $X_1\ Y_1\ W$:

X = face qualquer de símbolo $(h\,k\,\bar{i}\,l)$, $P = (1\,0\,\bar{1}\,0)$, $Q = (0\,1\,\bar{1}\,0)$, $U = (0\,1\,\bar{1}\,1)$, $R = (0\,0\,0\,1)$.

Temos:

$$\cos PX = \text{sen}\rho X.\cos(60 - \varphi X) = \frac{c\,(2h+k)}{m}$$

$$\cos QX = \text{sen}\rho X.\cos\varphi X = \frac{c\,(h+2k)}{m}$$

sendo $m = \sqrt{3l^2+4c^2\ (h^2+k^2+hk)}$. Vem:
$m\ \text{sen}\rho X . \cos\ (60 - \varphi X) = c\ (2h+k)$ (1)
$m\ \text{sen}\rho X . \cos\varphi X = c\ (h+2k)$ (2)

Dividindo (1) por (2):

$$\frac{\cos 60 . \cos\varphi X + \text{sen}\varphi X . \text{sen}\ 60}{\cos\varphi X} = \frac{2h+k}{h+2k} \therefore \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

$$. \ \text{tg}\varphi X = \frac{2h + k}{h + 2k}$$

$$\therefore \ \text{tg}\varphi X = \frac{\sqrt{3}\ h}{h+2k} \ \ldots\ldots\ldots \ [27]$$

Para a face U, temos:

No triângulo U Y_1 R, $\cos$ U $Y_1 = \text{sen}\rho U . \cos 30^{\circ}$ (3). Sabemos que $\cos$ U $Y_1 = c . \cos$ U R $\therefore c = \dfrac{\cos U\ Y_1}{\cos U\ R}$ (4). Substituindo em (4) $\cos$ U Y_1 pelo valor achado em (3), tem-se:

$$c = \frac{\text{sen}\rho U . \cos 30}{\cos\rho U} = \text{sen}\ 60 . \text{tg}\rho U \ (5). \ \text{Temos ainda:}$$

No triângulo X X_1 R, $\cos$ X $X_1 = \text{sen}\rho X . \cos\ (90 - \varphi X) = \text{sen}\rho X . \text{sen}\varphi X$

No triângulo X Y_1 R, $\cos$ X $Y_1 = \text{sen}\rho X . \cos\ (\varphi X - 30)$.

Podemos escrever, então:

$$\frac{\text{sen}\rho X . \text{sen}\varphi X}{h} = \frac{\text{sen}\rho X . \cos\ (\varphi\ X - 30)}{k} = \frac{c\ \cos\rho X}{l} .$$

Fazendo, nesta expressão, $l = 1$ e substituindo c pelo valor achado em (5):

$$h = \frac{\text{tg}\rho X . \text{sen}\varphi X}{\text{tg}\rho U . \text{sen}\ 60} ,\ k = \frac{\text{tg}\rho X . \cos\ (\varphi\ X - 30)}{\text{tg}\rho U . \text{sen}\ 60} ,\ l = 1 \ (6)$$

Multiplicando os valores achados em (6) por $\dfrac{\text{tg}\rho U}{\text{tg}\rho X}$ e levando em conta que $\cos\ (\varphi\ X - 30) = \text{sen}\ (60 + \varphi X)$, obtem-se:

$$h : k : l = \frac{\text{sen}\varphi X}{\text{sen}\ 60} : \frac{\text{sen}\ (60+\varphi X)}{\text{sen}\ 60} : \frac{\text{cotg}\rho X}{\text{cotg}\varphi U} \ \ldots\ldots \ [26]$$

Observação — O resultado achado aqui em [26] difere do de BOLDYREV (1934), porque êste utiliza, para os índices milerianos do sistema hexagonal, seqüência diversa daquela que é usual em cristalografia e isto se reflete ainda nas fórmulas [27] e [28].

Sabemos que $tg\rho X = \dfrac{c.\sqrt{2/3} \, . \, \sqrt{h^2+k^2+i^2}}{l} \; \ldots \; [7].$

Substituindo c pelo valor achado em (5) e i^2 por $h^2+2hk+k^2$ chega-se a

$$tg\rho X = \frac{\sqrt{h^2+hk+k^2}}{l} \, . \, tg\rho U \; \ldots\ldots.. \; [28]$$

SISTEMA TRIGONAL

As fórmulas dêste sistema podem ser obtidas, a partir das que foram deduzidas para o sistema hexagonal, utilizando-se as conhecidas relações que ligam os índices de Miller do trigonal e os índices de Miller-Bravais do hexagonal:

$\dfrac{h}{p\text{-}q} = \dfrac{k}{q\text{-}r} = \dfrac{i}{r\text{-}p} = \dfrac{l}{p+q+r}$, onde p, q, r são índices do trigonal e h, k, i, l índices correspondentes do hexagonal. Na figura 5 estão assinalados os eixos X_1, Y, W, Z de Miller-Bravais, as faces $P_1 = (10\bar{1}0)$, $Q_1 = (01\bar{1}0)$, $R_1 = (0001)$ e as faces do trigonal P = (100), Q = (010), R = (001). Por ela verifica-se que o ângulo XZQ_1 é igual ao ângulo XZQ menos 60^0 ou seja $\varphi X_6 = \varphi X_3 - 60^0$, sendo φX_6 a coordenada φ da face X no hexagonal (tomada a partir de ZQ_1) e φX_3 idêntica coordenada no trigonal (medida a partir de ZQ).

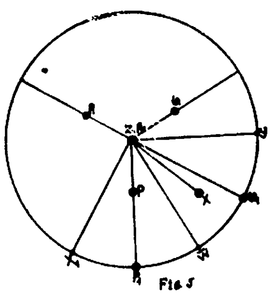

Fig. 5

Vê-se ainda que o ângulo XZY é igual ao ângulo XZQ, menos 30^0 ou seja $\varphi X_6 - 30 = \varphi X_3 - 30$. Façamos, então, nas fórmulas [26], [27] e [28] do hexagonal as substituições cabíveis de índices e de coordenadas.

Tínhamos:

$$h : k : l = \frac{sen\varphi X}{sen\ 60} : \frac{\cos\ (\varphi X - 30)}{sen\ 60} : \frac{cotg\rho X}{cotg\rho U} \; \ldots \; [26]$$

Substituindo, vem:

$$p - q : q\text{-}r : p+q+r = \frac{sen\ (\varphi X - 60)}{sen\ 60} : \frac{\cos\ (\varphi X - 30)}{sen\ 60} :$$

$$: \frac{cotg\rho X}{cotg\rho U} \; \ldots \; (1)$$

De (1) tira-se:

$$p = q + \frac{\text{sen } (\varphi X - 60)}{\text{sen } 60}, \ r = q - \frac{\cos\ (\varphi X - 30)}{\text{sen } 60} \ldots (2)$$

De (1) tira-se ainda:

$$p + q + r = \frac{\text{cotg}\rho X}{\text{cotg}\rho U} \ldots (3).$$ Substituindo em (3) os valores de p e r achados em (2), temos:

$$3q + \frac{\text{sen } (\varphi X - 60)}{\text{sen } 60} - \frac{\cos\ (\varphi X - 30)}{\text{sen } 60} = \frac{\text{cotg}\rho X}{\text{cotg}\rho U} \ldots (4)$$

Como ρU hexagonal $= \rho P$ trigonal, tem-se:

$$3q = \frac{\text{cotg}\rho X}{\text{cotg}\rho P} + \frac{\cos\varphi X . \cos 30 + \text{sen } 60 . \cos\varphi X}{\text{sen } 60} +$$

$$+ \frac{\text{sen}\varphi X . \text{sen } 30 - \text{sen}\varphi X . \cos 60}{\text{sen } 60} \therefore 3q = \frac{\text{cotg}\rho X}{\text{cotg}\rho P} +$$

$$+ 2 \cos\varphi X \therefore q = \frac{\text{tg}\rho P . \text{cotg}\rho X + 2 \cos\varphi X}{3} \ldots (5)$$

Tinhamos: $p = q + \frac{\text{sen } (\varphi X - 60)}{\text{sen } 60} \ldots (2)$. Substituindo em (2) q pelo seu valor tirado de (5), vem:

$$p = \frac{\text{tg}\rho P . \text{cotg}\rho X + 2 \cos\varphi X + \sqrt{3} \text{ sen}\varphi X - 3 \cos\varphi X}{3} =$$

$$= \frac{\text{tg}\rho P . \text{cotg}\rho X + \sqrt{3} \text{ sen}\varphi X - \cos\varphi X}{3}.$$

Como $\sqrt{3} \text{ sen}\varphi X - \cos\varphi X = 2 \text{ sen } (\varphi X - 30)$, vem:

$$p = \frac{\text{tg}\rho P . \text{cotg}\rho X + 2 \text{ sen } (\varphi X - 30)}{3} \ldots (6)$$

Tinhamos $r = q - \frac{\cos\ (\varphi X - 30)}{\text{sen } 60} \ldots (2)$. Feita aqui a substituição de q pelo seu valor achado em (5), vem:

$$r = \frac{\text{tg}\rho P . \text{cotg}\rho X - \cos\varphi X - \sqrt{3} \text{ sen}\varphi X}{3}.$$

Como $\cos\varphi X + \sqrt{3} \text{ sen}\varphi X = 2 \text{ sen } (\varphi X + 30)$, tem-se:

$$r = \frac{\text{tg}\rho P . \text{cotg}\rho X - 2 \text{ sen } (\varphi X + 30)}{3} \ldots (7).$$

De (5), (6) e (7) tira-se, finalmente, a fórmula [23].

Tínhamos a fórmula [28] do hexagonal, da qual chega-se fàcilmente a $\mathrm{tg}_\rho X = \dfrac{\sqrt{p^2+q^2+r^2-pq-pr-qr}}{p+q+r} \cdot \mathrm{tg}_\rho P$ [25].

A fórmula [27] do hexagonal $\mathrm{tg}\varphi X = \dfrac{\sqrt{3}\,h}{h+2k}$ transforma-se, por substituição, em $\mathrm{tg}\,(\varphi X-60) = \dfrac{\mathrm{tg}\varphi X - \mathrm{tg}\,60}{1+\mathrm{tg}\,60.\mathrm{tg}\varphi X} =$
$= \dfrac{p-q}{p-q+2q-2r}$, chegando-se, assim, a: $\mathrm{cotg}\varphi X =$
$= \dfrac{2q-p-r}{(p-r)\sqrt{3}}$ ... [24].

SISTEMA MONOCLÍNICO

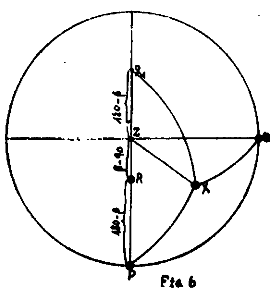

Fig. 6

Primeiro caso — orientação segundo [001].

Temos (figura 6):

$$\cos PX = \mathrm{sen}\rho X.\mathrm{sen}\varphi X = \frac{\frac{h}{a} - \frac{l}{c}\cos\beta}{m}$$

$$\cos QX = \mathrm{sen}\rho X.\cos\varphi X = \frac{k\ \mathrm{sen}\ \beta}{m}$$

$$\cos RX = \cos\rho X = \mathrm{sen}\beta.\cos\rho X - \mathrm{sen}\rho X.\mathrm{sen}\varphi X.\cos\beta = \frac{\frac{l}{c} - \frac{h}{a}\cos\beta}{m},\ \text{sendo}$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 + k^2\ \mathrm{sen}^2\beta + \left(\frac{l}{c}\right)^2 - \frac{2\ hl}{ac}\cos\beta}$$

Vem:

$$m\ \mathrm{sen}\rho X.\mathrm{sen}\varphi X = \frac{h}{a} - \frac{l}{c}\cos\beta \quad (1)$$

$$m\ \mathrm{sen}\rho X.\cos\varphi X = k\ \mathrm{sen}\beta \quad (2).$$

Dividindo (1) por (2):

$$tg\varphi X = \frac{h}{ak\ sen\beta} - \frac{l\ cos\beta}{ck\ sen\beta} \quad .. \ (3)$$

Sendo $\rho R = (\beta - 90)$, temos que $sen\beta = cos\rho R$, $cos\beta = - sen\rho R$.

Substituindo em (3), vem:

$$tg\varphi X = \frac{h}{ak\ cos\rho R} + \frac{l\ tg\rho R}{ck} \quad .... \ (4).$$

Para a face parametral U, tem-se:

$a\ cos U\overline{X_1} = cos\ UY = c\ cos\ UZ\ ...\ (5)$.

No triângulo $ZX\overline{X_1}$ tem-se, quando X é a face parametral: $cos\ U\overline{X_1} = cos\rho U . cos\ (180 - \beta) + sen\rho U . sen\ (180 - \beta) . cos\ (90 + \varphi U)$ $\therefore$ $cos\ U\overline{X_1} = - cos\rho U . cos\beta - sen\rho U . sen\beta . sen\varphi U$.

Do triângulo ZUY tira-se:

$cos UY = sen\rho U . cos\varphi U$.

Podemos escrever então (ver 5):

$a\ (cos\rho U . cos\beta + sen\rho U . sen\beta . sen\varphi U) = sen\rho U . cos\varphi U = c\ cos\rho U ... (6)$.

De (6) tira-se, substituindo $sen\beta$ por $cos\rho R$ e $cos\beta$ por $- sen\rho R$:

$$a = \frac{sen\rho U . cos\varphi U}{sen\rho U . cos\rho R . sen\varphi U - cos\rho U . sen\rho R},$$

$c = tg\rho U . cos\varphi U\ ...\ (7)$.

Levando êstes valores de a e c em (4), vem:

$$tg\varphi X = \frac{h}{k\ cos\rho R} \times \frac{sen\rho U . cos\rho R . sen\varphi U - cos\rho U .\ sen\rho R}{sen\rho U . cos\varphi U} + \frac{l\ tg\rho R}{k\ tg\rho U . cos\varphi U} = \frac{h\ sen\rho U . cos\rho R . sen\varphi U}{k\ sen\rho U . cos\rho R . cos\varphi U} - \frac{h\ sen\rho R . cos\rho U}{k\ cos\rho R . sen\rho U . cos\varphi U} + \frac{l\ tg\rho R}{k\ tg\rho U . cos\varphi U} = \frac{h\ tg\varphi U}{k} - \frac{h\ tg\rho R}{k\ tg\rho U . cos\varphi U} + \frac{l\ tg\rho R}{k\ tg\rho U . cos\varphi U} \therefore$$

$$\therefore tg\varphi X = \frac{h}{k} tg\varphi U + \frac{(l - h)\ tg\rho R}{k . tg\rho U . cos\varphi U} \quad ..... \ [9]$$

Temos: $\frac{cos\ XY}{k} = \frac{c}{l} cos XZ$. Fazendo, nesta expressão, $l = 1$ e substituindo $cos\ XY$, $cos\ XZ$ e c por seus valores, já conhecidos, vem:

$$k = \frac{tg\rho X \, . \, \cos\varphi X}{tg\rho U \, . \, \cos\varphi U} \; \ldots\ldots \; [8]$$

Temos: $\frac{a}{h} \cos XX_1 = \frac{\cos XY}{k}$. Substituindo, nesta expressão, os elementos que nela entram, por seus valores, anteriormente achados, vem:

$$h = \frac{sen\rho X . \cos\rho R . sen\varphi X . sen\rho U . \cos\varphi U - \cos\rho X . sen\rho R . sen\rho U . \cos\varphi U}{sen\rho U . \cos\rho R . sen\varphi U . tg\rho U . \cos\varphi U . \cos\rho X - sen\rho R . \cos\rho U . tg\rho U . \cos\varphi U . \cos\rho X}$$

Dividindo numerador e denominador por *cosρX.cosρR.senρU.cosφU,* vem:

$$h = \frac{tg\rho X . sen\varphi X - tg\rho R}{tg\rho U . sen\varphi U - tg\rho R} \; \ldots \; [8]$$

Tem-se, finalmente:

$$h : k : l = \frac{tg\rho X . sen\varphi X - tg\rho R}{tg\rho U . sen\varphi U - tg\rho R} : \frac{tg\rho X . \cos\varphi X}{tg\rho U . \cos\varphi U} : 1 \; \ldots \; [8]$$

De [8] chega-se fàcilmente a [10].

Segundo caso-orientação segundo (001).

Temos (fig. 7):

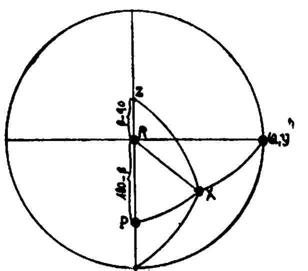

Fig. 7

$$\cos PX = sen\rho X . sen\varphi X . \ sen\beta - \cos\beta . \cos\rho X = \frac{\frac{h}{a} - \frac{l}{c} . \cos\beta}{m} \; .. \; (1)$$

$$\cos QX = sen\rho X . \cos\varphi X = \frac{k \ sen\beta}{m} \; .. \; (2)$$

$$\cos RX = \cos\rho X = \frac{\frac{l}{c} - \frac{h}{a}\cos\beta}{m} \; .. \; (3)$$

Levando-se em (1) os valores de senρX e cosρX, tirados respectivamente de (2) e (3) e multiplicando por *m,* tem-se:

$$k.tg\varphi X.sen^2\beta - \frac{1}{c}\cos\beta + \frac{h}{a}\cos^2\beta = \frac{h}{a} - \frac{1}{c}\cos\beta \therefore$$

$$\therefore\ k.tg\varphi X.sen^2\beta = \frac{h}{a}(1-\cos^2\beta) = \frac{h}{a}sen^2\beta \therefore cotg\varphi X =$$

$$= \frac{ak}{h} \ldots (4)$$

A face parametral dá:

$a.\cos UX_1 = \cos UY = c.\cos UZ \ldots.(5)$. Temos:

No triângulo URX_1, $\cos UX_1 = sen\rho U.sen\varphi U$

No triângulo URY, $\cos UY = sen\rho U.\cos\varphi U$

No triângulo URZ, $\cos UZ = \cos\rho U.sen\beta + sen\rho U.sen\varphi U.\cos\beta$

Levando êstes valores em (5), obtém-se:

$$a = cotg\varphi U,\ c = \frac{sen\rho U.\cos\varphi U}{\cos\rho U.sen\beta + sen\rho U.sen\varphi U.\cos\beta} \ldots (6)$$

Levando o valor obtido para *a* em (4), tem-se:

$$cotg\varphi X = \frac{k}{h}.\ cotg\varphi U\ [12]$$

De [12] tira-se:

$$h : k = \frac{sen\varphi X}{sen\varphi U} : \frac{\cos\varphi X}{\cos\varphi U} \ldots [11]$$

Temos (fig. 7): $\rho P = (180 - \beta) \therefore sen\beta = sen\rho P$, $\cos\beta =$
$= -\cos\rho P$.

Substituindo em *c* (6), vem:

$$c = \frac{sen\rho U.\cos\varphi U}{\cos\rho U.sen\rho P - \cos\rho P.sen\rho U.sen\varphi U} \ldots. (7)$$

Dividindo, membro a membro, (3) por (2), obtém-se:

$$cotg\rho X = \frac{\cos\varphi X\left\{\frac{1}{c} - \frac{h}{a}\cos\beta\right\}}{k.sen\beta} = \frac{\cos\varphi X\left\{\frac{1}{c} + \frac{h}{a}\cos\rho P\right\}}{k.sen\rho P} \quad (8)$$

De [11] tira-se:

$$k = \frac{h.\cos\varphi X.sen\varphi U}{\cos\varphi U.sen\varphi X} \ldots (9)$$

Substituindo em (8), *a*, *c*, *k*, por seus respectivos valores (6), (7), (9), dividindo numerador e denominador por $sen\rho P$ e simplificando, obtém-se:

$$\mathrm{cotg}_\rho X = \frac{\mathrm{sen}_\varphi X \left\{ l\ \mathrm{cotg}_\rho U + (h-l)\,.\,\mathrm{sen}_\varphi U\,.\,\mathrm{cotg}_\rho P \right\}}{h\,.\,\mathrm{sen}_\varphi U} =$$

$$= \frac{\mathrm{sen}_\varphi X}{h} \left\{ (h-l)\ \mathrm{cotg}_\rho P + \frac{l\ \mathrm{cotg}_\rho U}{\mathrm{sen}_\varphi U} \right\} \ldots\ldots \quad [13]$$

De [13] tira-se:

$$h\,.\,\mathrm{cotg}_\rho X = \mathrm{sen}_\varphi X \left\{ (h-l)\,.\,\mathrm{cotg}_\rho P + \frac{l\,.\,\mathrm{cotg}_\rho U}{\mathrm{sen}_\varphi U} \right\} \therefore$$

$$\therefore\ h\ (\mathrm{cotg}_\rho X - \mathrm{sen}_\varphi X\,.\,\mathrm{cotg}_\rho P) =$$

$$= \frac{l\ (\mathrm{sen}_\varphi X\,.\,\mathrm{cotg}_\rho U - \mathrm{sen}_\varphi X\,.\,\mathrm{sen}_\varphi U\,.\,\mathrm{cotg}_\rho P)}{\mathrm{sen}_\varphi U} =$$

$$= \frac{l\,.\,\mathrm{sen}_\varphi X}{\mathrm{sen}_\varphi U} \left\{ \mathrm{cotg}_\rho U - \mathrm{sen}_\varphi U\,.\,\mathrm{cotg}_\rho P \right\}$$

Como $h = \dfrac{\mathrm{sen}_\varphi X}{\mathrm{sen}_\varphi U}$ [11], vem:

$$l = \frac{\mathrm{cotg}_\rho X - \mathrm{sen}_\varphi X\,.\,\mathrm{cotg}_\rho P}{\mathrm{cotg}_\rho U - \mathrm{sen}_\varphi U\,.\,\mathrm{cotg}_\rho P} = \frac{\mathrm{cotg}_\rho P\,.\,\mathrm{sen}_\varphi X - \mathrm{cotg}_\rho X}{\mathrm{cotg}_\rho P\,.\,\mathrm{sen}_\varphi U - \mathrm{cotg}_\rho U} \quad [11]$$

SISTEMA TRICLÍNICO

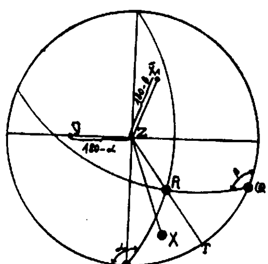

Fig 8

Primeiro caso — orientação segundo [001]

Para êste sistema usaremos a relação de cosenos de Wulff:

$$h : k : l = \frac{\cos XX_1}{\cos UX_1} : \frac{\cos XY}{\cos UY} : \frac{\cos XZ}{\cos UZ} \ \ldots\ldots \quad (1)$$

Temos, para a face X (fig. 8):

No triângulo $XZ\overline{X}_1$, $\cos X\overline{X}_1 = \cos_\rho X\,.\,\cos\,(180-\beta) + {}$ $+ \mathrm{sen}_\rho X\,.\,\mathrm{sen}\,(180-\beta)\,.\,\cos\,(\varphi X + 90) \therefore -\cos XX_1 = -\cos_\rho X\,.\,\cos\beta -$ $- \mathrm{sen}_\rho X\,.\,\mathrm{sen}\beta\,.\,\mathrm{sen}_\varphi X \ \therefore\ \cos XX_1 = \cos_\rho X\,.\,\cos\beta +$ $+ \mathrm{sen}_\rho X\,.\,\mathrm{sen}\beta\,.\,\mathrm{sen}_\varphi X.$

No triângulo $XZ\overline{Y}$,

$\cos X\overline{Y} = \cos_\rho X\,.\,\cos\,(180-\alpha) + \mathrm{sen}_\rho X\,.\,\mathrm{sen}\,(180-\alpha)\,.\,\cos \{ 90 +$ $+ (\varphi P - \varphi X) \} \therefore$

$\therefore \cos XY = -\cos\rho X . \cos\alpha - \text{sen}\rho X . \varphi\text{sen}\alpha . \text{sen}\,(\varphi P - \varphi X.) \therefore$
$\therefore \cos XY = \text{sen}\rho X . \text{sen}\alpha . \text{sen}\,(\varphi P - \varphi X) + \cos\rho X . \cos\alpha .$

Temos, ainda, $\cos XZ = \cos\rho X$.

Para a face parametral, temos, idênticamente:

$\cos UX_1 = \cos\rho U . \cos\beta + \text{sen}\rho U . \text{sen}\beta . \text{sen}\varphi U .$
$\cos UY = \text{sen}\rho U . \text{sen}\alpha . \text{sen}\,(\varphi P - \varphi U) + \cos\rho U . \cos\alpha$
$\cos UZ = \cos\rho U .$

De (1) tira-se: $h = \dfrac{\cos XX_1}{\cos UX_1} \ldots (2)$

Substituindo em (2), $\cos XX_1$ e $\cos UX_1$ pelos valores anteriormente obtidos:

$$h = \frac{\cos\rho X . \cos\beta + \text{sen}\rho X . \text{sen}\beta . \text{sen}\varphi X}{\cos\rho U . \cos\beta + \text{sen}\rho U . \text{sen}\beta . \text{sen}\varphi U}$$

Dividindo por $\dfrac{\cos\rho X}{\cos\rho U}$ vem:

$$h = \frac{\cos\rho X . \cos\beta + \text{sen}\rho X . \text{sen}\beta . \text{sen}\varphi X}{\cos\rho X . \cos\beta + \text{tg}\rho U . \text{sen}\beta . \text{sen}\varphi U . \cos\rho X}$$

Dividindo ambos os têrmos por *senβ.cosρX*, vem:

$$h = \frac{\text{tg}\rho X . \text{sen}\varphi X + \text{cotg}\beta}{\text{tg}\rho U . \text{sen}\varphi U + \text{cotg}\beta} \ldots\ldots (3)$$

No triângulo retângulo TRQ, tem-se:

$\text{cotg}\beta = -\text{sen}\varphi R . \text{tg}\rho R$. Levando êste valor de *cotgβ* em (3), vem:

$$h = \frac{\text{tg}\rho X . \text{sen}\varphi X - \text{tg}\rho R . \text{sen}\varphi R}{\text{tg}\rho U . \text{sen}\varphi U - \text{tg}\rho R . \text{sen}\varphi R} \ldots\ldots [2]$$

De (1) tira-se: $k = \dfrac{\cos XY}{\cos UY} \ldots\ldots (4)$

Substituindo em (4) *cos XY* e *cos UY* por seus valores, anteriormente obtidos, vem:

$$k = \frac{\text{sen}\rho X . \text{sen}\alpha . \text{sen}\,(\varphi P - \varphi X) + \cos\rho X . \cos\alpha}{\text{sen}\rho U . \text{sen}\alpha . \text{sen}\,(\varphi P - \varphi U) + \cos\rho U . \cos\alpha}$$

Dividindo por $\dfrac{\cos\rho X}{\cos\rho U}$, tem-se:

$$k = \frac{\text{sen}\rho X . \text{sen}\alpha . \text{sen}\,(\varphi P - \varphi X) + \cos\rho X . \cos\alpha}{\text{tg}\rho U . \cos\rho X . \text{sen}\alpha . \text{sen}\,(\varphi P - \varphi U) + \cos\rho X . \cos\alpha}$$

Dividindo ambos os têrmos por $\cos\rho X . \text{sen}\alpha$, vem:

$$k = \frac{tg\rho X . sen\ (\varphi P - \varphi X) + cotg\alpha}{tg\rho U . sen\ (\varphi P - \varphi U) + cotg\alpha} \ \ldots \ (5)$$

No triângulo retângulo PRT, obtém-se:
$cotg\alpha = -sen\ (\varphi P - \varphi R) . tg\rho R$. Levando êste valor de *cotgα* em (5):

$$k = \frac{tg\rho X . sen\ (\varphi P - \varphi X) - tg\rho R . sen\ (\varphi P - \varphi R)}{tg\rho U . sen\ (\varphi P - \varphi U) - tg\rho R . sen\ (\varphi P - \varphi R)} \ \ldots \ [2]$$

De (1) tira-se: $l = \frac{cosXZ}{cosUZ} = \frac{cos\rho X}{cos\rho U}$

Dividindo por $\frac{cos\rho X}{cos\rho U}$, obtém-se $l = 1 \ \ldots \ [2]$

Da fórmula [2] obtém-se, fazendo $tg\rho R . sen\varphi R = m$:

$$h = \frac{1\ (tg\rho X . sen\varphi X - m)}{tg\rho U . sen\varphi U - m} \ \therefore \ sen\varphi X = \frac{B}{1 . tg\rho X} \ .. \ (6),$$ em

que $B = h . tg\rho U . sen\varphi U + m(1 - h)$

Da mesma fórmula [2] tira-se, fazendo $tg\rho R . sen\ (\varphi P - \varphi R) = n$:

$$k = \frac{1 . tg\rho X . sen\ (\varphi P - \varphi X) - 1n}{tg\rho U . sen\ (\varphi P - \varphi U) - n} \ \therefore$$

$\therefore \ 1 . tg\rho X . sen\ (\varphi P - \varphi X) = A$ (7), onde:

$A = k . tg\rho U . sen\ (\varphi P - \varphi U) + n\ (1 - k) \ \therefore$

$\therefore \ 1 . tg\rho X . sen\varphi P . cos\varphi X = 1 . tg\rho X . sen\varphi X . cos\varphi P + A$

Dividindo por *senφP.senφX*, vem:

$$1 . tg\rho X . cotg\varphi X = 1 . tg\rho X . cotg\varphi P + \frac{A}{sen\varphi P . sen\varphi X}$$

Dividindo ambos os membros por $1 . tg\rho X$, tem-se:

$$cotg\varphi X = \frac{A}{1 . sen\varphi P . sen\varphi X . tg\rho X} + cotg\varphi P$$

Substituindo *senφX* por seu valor (6), obtém-se:

$$cotg\varphi X = \frac{A}{B . sen\varphi P} + cotg\varphi P \ \ldots \ [3]$$

Das expressões (6) e (7) obtém-se:

$$tg\rho X = \frac{A}{1 . sen\ (\varphi P - \varphi X)} = \frac{B}{1 . sen\varphi X} \ \ldots \ [4]$$

Segundo caso — orientação segundo (001)

Temos: $h : k : l = \frac{\cos XX_1}{\cos UX_1} : \frac{\cos XY}{\cos UY} : \frac{\cos XZ}{\cos UZ} \dots (1)$

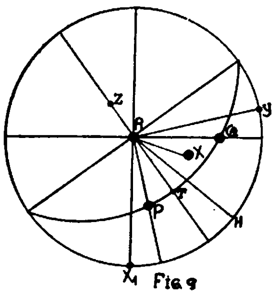

Fig. 9

Temos (fig. 9):

$\cos XX_1 = \text{sen}\rho X . \text{sen}\varphi X$

$\cos XY = \text{sen}\rho X . \text{sen}\ (\varphi P - \varphi X)$

$\cos XZ = \cos\rho X . \cos\rho Z + \text{sen}\rho X . \text{sen}\rho Z . \cos XRZ$

Sendo o ângulo XRZ igual a $\{360 - (\varphi Z - \varphi X)\}$,

$\cos XZ = \cos\rho X . \cos\rho Z + \text{sen}\rho X . \text{sen}\rho Z . \cos\ (\varphi Z - \varphi X)$ (2)

Para a face *U* tem-se, idênticamente:

$\cos UX_1 = \text{sen}\rho U . \text{sen}\varphi U$

$\cos UY = \text{sen}\rho U . \text{sen}\ (\varphi P - \varphi U)$

$\cos UZ = \cos\rho U . \cos\rho Z + \text{sen}\rho U . \text{sen}\rho Z . \cos\ (\varphi Z - \varphi U)$

De (1) tira-se:

$$h = \frac{\cos XX_1}{\cos UX_1} = \frac{\text{sen}\rho X . \text{sen}\varphi X}{\text{sen}\rho U . \text{sen}\varphi U}$$

Multiplicando por $\frac{\text{sen}\rho U}{\text{sen}\rho X}$ vem:

$$h = \frac{\text{sen}\varphi X}{\text{sen}\varphi U} \dots [5]$$

De (1) tira-se:

$k = \frac{\cos XY}{\cos UY} = \frac{\text{sen}\rho X . \text{sen}\ (\varphi P - \varphi X)}{\text{sen}\rho U . \text{sen}\ (\varphi P - \varphi U)}$ e, multiplicando por $\frac{\text{sen}\rho U}{\text{sen}\rho X}$:

$$k = \frac{\text{sen}\ (\varphi P - \varphi X)}{\text{sen}\ (\varphi P - \varphi U)} \dots\dots [5]$$

Do triângulo retângulo TRQ obtém-se:

$$\cos\rho Z = \frac{-\text{sen}\rho Z . \cos\varphi Z}{\text{cotg}\rho Q} \dots (3)$$

Levando êste valor de *cosρZ* em (2) e dividindo por *senρX .senρZ.cosφZ*:

$$\frac{\cos XZ}{\text{sen}\rho X . \text{sen}\rho Z . \cos\varphi Z} =$$

$$= \frac{\text{cotg}_\rho Q . \text{tg}_\varphi Z . \text{sen}_\varphi X - \text{cotg}_\rho X + \text{cotg}_\rho Q . \text{cos}_\varphi X}{\text{cotg}_\rho Q} \quad .. \ (4)$$

Seja RH um nôvo meridiano inicial de referência, bissetando o ângulo PRQ (fig. 9).

Da expressão (2-a), $\text{tg}\rho_1 . \cos(\varphi' P - \varphi'_1) = \text{tg}\rho_2 . \cos(\varphi' P - \varphi'_2)$, deduzida por BOEKE (1911), tira-se para a figura 9:

$$\text{tg}_\rho P . \cos(_\varphi Z - _\varphi P) = \text{tg}_\rho Q . \text{cos}_\varphi Z \ldots (5)$$

Dividindo ambos os membros por $\text{cos}_\varphi Z$, vem:

$$\text{tg}_\rho P . \text{cos}_\varphi P + \text{tg}_\rho P . \text{tg}_\varphi Z . \text{sen}_\varphi P = \text{tg}_\rho Q \ \therefore$$

$$\therefore \ \text{tg}_\varphi Z = \frac{\text{tg}_\rho Q - \text{tg}_\rho P . \text{cos}_\varphi P}{\text{tg}_\rho P . \text{sen}_\varphi P} \quad (6)$$

Levando êste valor de $tg_\varphi Z$ em (4) e fazendo $\text{sen}_\rho Z . \text{cos}_\varphi Z = K$, vem:

$$\frac{\cos XZ}{K . \text{sen}_\rho X} = \frac{\text{cotg}_\rho Q . \text{sen}_\varphi X \ (\text{tg}Q - \text{tg}_\rho P . \text{cos}_\varphi P)}{\text{tg}_\rho P . \text{sen}_\varphi P . \text{cotg}_\rho Q} - \frac{\text{cotg}_\rho X + \text{cotg}_\rho Q . \text{cos}_\varphi X}{\text{cotg}_\rho Q}$$

Multiplicando ambos os membros por $sen_\varphi P$, obtém-se:

$$\cos XZ = \frac{K . \text{sen}_\rho X \left\{ \text{cotg}_\rho P . \text{sen}_\varphi X - \text{cotg}_\rho X . \text{sen}_\varphi P + \right.}{\text{sen}_\varphi P . \text{cotg}_\rho Q} \; \frac{\left. + \ \text{cotg}_\rho Q . \text{sen} \ (_\varphi P - _\varphi X) \right\}}{\text{sen}_\varphi P . \text{cotg}_\rho Q}$$

De modo idêntico, ter-se-á:

$$\cos UZ = \frac{K . \text{sen}_\rho U \ [\text{cotg}_\rho P . \text{sen}_\varphi U - \text{cotg}_\rho U . \text{sen}_\varphi P +}{\text{sen}_\varphi P . \text{cotg}_\rho Q} \; \frac{+ \ \text{cotg}_\rho Q . \text{sen} \ (_\varphi P - _\varphi U)]}{\text{sen}_\varphi P . \text{cotg}_\rho Q}$$

De (1) tira-se:

$1 = \dfrac{\cos XZ}{\cos UZ}$. Substituindo aqui *cos XZ* e *cos UZ* pelos valores anteriormente achados e multiplicando por $\dfrac{\text{sen}_\rho U}{\text{sen}_\rho X}$:

$$1 = \frac{\text{cotg}_\rho P . \text{sen}_\varphi X - \text{cotg}_\rho X . \text{sen}_\varphi P +}{\text{cotg}_\rho P . \text{sen}_\varphi U - \text{cotg}_\rho U . \text{sen}_\varphi P +}$$

$$\frac{+\text{cotg}_\rho Q \ \text{sen} \ (\varphi P - \varphi X)}{+\text{cotg}_\rho Q \ \text{sen} \ (\varphi P - \varphi U)} \ \ldots \ [5]$$

De [5] tira-se:

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{sen}\varphi X \ (\text{sen}\varphi P . \cos\varphi U - \text{sen}\varphi U . \cos\varphi P)}{\text{sen}\varphi U \ (\text{sen}\varphi P . \cos\varphi X - \text{sen}\varphi X . \cos\varphi P)}$$

Dividindo numerador e denominador do segundo membro por $\text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U . \text{sen}\varphi X$: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{\text{cotg}\varphi U - \text{cotg}\varphi P}{\text{cotg}\varphi X - \text{cotg}\varphi P}$ ∴

$$\therefore \ \text{cotg}\varphi X = \frac{q}{p} . \text{cotg}\varphi U + \left(1 - \frac{q}{p}\right) . \text{cotg}\varphi \ P \ . \ [6]$$

Do valor de *r* [5], obtém-se:

$$\text{cotg}_\rho X = \frac{\text{cotg}_\rho P . \text{sen}\varphi X}{\text{sen}\varphi P} - \frac{r . \text{cotg}_\rho P . \text{sen}\varphi U}{\text{sen}\varphi P} + \frac{r . \text{cotg}_\rho U . \text{sen}\varphi P}{\text{sen}\varphi P} +$$
$$+ \frac{\text{cotg}_\rho Q \ [\text{sen} \ (\varphi P - \varphi X) - r . \text{sen} \ (\varphi P - \varphi U)]}{\text{sen}\varphi P} \ \ldots \ (7)$$

Multiplicando e dividindo os têrmos do segundo membro de (7) por *p*, substituindo *p* do numerador dos três últimos têrmos pelo seu valor $\dfrac{\text{sen}\varphi X}{\text{sen}\varphi U}$, tirado de [5], e pondo em evidência $\dfrac{\text{sen}\varphi X}{p}$, obtém-se:

$$\text{cotg}_\rho X = \frac{\text{sen}\varphi X}{p} \left\{ \frac{(p-r) . \text{cotg}_\rho P}{\text{sen}\varphi P} + \frac{r . \text{cotg}_\rho U}{\text{sen}\varphi U} + \right.$$
$$\left. + \frac{\text{cotg}_\rho Q \ [\text{sen} \ (\varphi P - \varphi X) - r . \text{sen} \ (\varphi P - \varphi U)]}{\text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U} \right\} \ \ldots \ (8)$$

O terceiro têrmo, entre chaves, da expressão (8), transforma-se em:

$$\text{cotg}_\rho Q \left\{ \frac{\text{sen} \ (\varphi P - \varphi X)}{\text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U} - r \ (\text{cotg}\varphi U - \text{cotg}\varphi P) \right\} \ \ldots \ (9)$$

Escreva-se a identidade:

$$\text{sen} \ (\varphi P - \varphi U) = \text{sen} \ (\varphi P - \varphi U)$$

Multiplicando e dividindo o primeiro membro por $\text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U$, vem:

$$\frac{\text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U \ (\text{sen}\varphi P . \cos\varphi U - \text{sen}\varphi U . \cos\varphi P)}{\text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U} = \text{sen} \ (\varphi P - \varphi U) \ \therefore$$

$$\therefore \quad \text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U \; (\text{cotg}\varphi U - \text{cotg}\varphi P) = \text{sen}\,(\varphi P - \varphi U) \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U \; (\text{cotg}\varphi U - \text{cotg}\varphi P)} = \frac{1}{\text{sen}\,(\varphi P - \varphi U)}$$

Multiplicando ambos os membros por sen $(\varphi P - \varphi X)$, vem:

$$\frac{\text{sen}\,(\varphi P - \varphi X)}{\text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U \; (\text{cotg}\varphi U - \text{cotg}\varphi P)} = \frac{\text{sen}\,(\varphi P - \varphi X)}{\text{sen}\,(\varphi P - \varphi U)} = q \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \frac{\text{sen}\,(\varphi P - \varphi X)}{\text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U} = q \; (\text{cotg}\varphi U - \text{cotg}\varphi P) \; \ldots \; (10).$$

Substituindo em (9) $\dfrac{\text{sen}\,(\varphi P - \varphi X)}{\text{sen}\varphi P . \text{sen}\varphi U}$ por seu valor, tirado de (10), chega-se, finalmente à fórmula ... [7].

3 — RESUMO

As "fórmulas diretas" do Professor Ansheles, cristalografista russo, são publicadas, sem dedução, na Cristalografia de BOLDYREV (1934), tradução para o espanhol de Candel Vila.

No presente trabalho o autor deduz tais fórmulas, utilizando a projeção estereográfica.

4 — SUMMARY

The "direct formulas" by Professor Ansheles, a Russian crystallographer, are published, without deduction, in the Crystallography by BOLDYREV, (1934), translated into Spanish by Candel Vila.

In the present work the author deduces such formulas, using the stereographic projection.

5 — LITERATURA CITADA

BOLDYREV, A. K. - 1934 — Cristalografia — tradução para o hespanhol de Rafael Candel Vila. — Editorial Labor.

BOEKE, H. E. - 1911 — Die Anwendung der stereographischen Projektion bei kristallographischen Untersuchungen — Verlag von Gebrüder Borntraeger — Berlin.