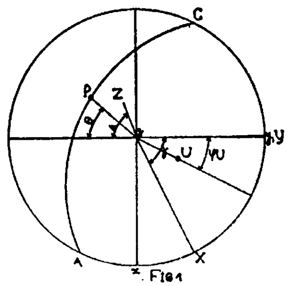
Sôbre a Expressão $hr_1 + kr_2 + lr_3 = 0$ (*)

EDUARDO A. SALGADO

Escola Superior de Agricultura «Luiz de Queiroz»

(*) Recebido para publicação em 14/6/60.

1. — INTRODUÇÃO



A expressão acima, muito conhecida em cristalografia, liga índices milerianos de uma face a índices de aresta nela contida.

Damos mais uma dedução da referida fórmula.

2. — DEDUÇÃO

Na figura 1 temos dois sistemas de eixos, o retangular xyz e o de eixos oblíquos XYZ.

Na mesma figura há o círculo máximo APC, cujo pólo U representa a face que tem o símbolo (hkl) no sistema XYZ e cujas coordenadas esféricas são ρU e φU, esta última a partir do eixo y, Y.

A letra P designa o pólo de uma aresta qualquer contida na face U, fazendo a reta Pz o anguloθ e a reta Zz o ângulo Δ com o eixo y, Y.

O ângulo dos eixos X e Y é representado por γ.

Do triângulo PzU obtém-se:

$$\cos\rho P . \cos\rho U + \operatorname{sen}\rho P . \operatorname{sen}\rho U . \cos\left[(90 + \theta) + (90 - \varphi U)\right] = \cos 90 = 0 \therefore$$

$$\therefore \cos\rho P . \cos\rho U - \operatorname{sen}\rho P . \operatorname{sen}\theta . \operatorname{sen}\rho U . \operatorname{sen}\varphi U - \operatorname{sen}\rho P . \cos\theta . \operatorname{sen} \operatorname{sen}\rho U . \cos\varphi U = 0 \quad (1).$$

Temos, para coordenadas de um ponto qualquer da aresta de pólo P, no sistema retangular:

$$x = -\operatorname{sen}\rho P . \operatorname{sen}\theta;\ y = -\operatorname{sen}\rho P . \cos\theta;\ z = \cos\rho P.$$

Transformemos estas coordenadas nas suas correspondentes, no sistema XYZ, por meio das conhecidas fórmulas de transformação da geometria analítica, que permitem passar de um sistema retangular a um sistema de eixos oblíquos:

$aX + bY + cZ = x$; $áX + b'Y + c'Z = y$; $a''X + b''Y + c''Z = z$, em que, a a' a"; b, b' b"; c, c' c" representam os cosenos diretores, no sistema retangular, dos eixos X, Y, Z, respectivamente. Obtém-se:

$$\operatorname{sen}\gamma . X - \operatorname{sen}\rho Z . \operatorname{sen}\Delta . Z = -\operatorname{sen}\rho P . \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\gamma . X + Y - \operatorname{sen}\rho Z . \cos\Delta . Z = -\operatorname{sen}\rho P . \cos\theta$$

$$\cos\rho Z . Z = \cos\rho P.$$

Substituindo em (1) $-\operatorname{sen}\rho P . \operatorname{sen}\theta$, $-\operatorname{sen}\rho P . \cos\theta$ e $\cos\rho P$ pelos valores anteriormente obtidos, vem:

$$\cos\rho Z . Z . \cos\rho U + \operatorname{sen}\rho U . \operatorname{sen}\varphi U\ (\operatorname{sen}\gamma . X - \operatorname{sen}\rho Z . \operatorname{sen}\Delta . Z) + \operatorname{sen}\rho U . \cos\varphi U\ (\cos\gamma . X + Y - \operatorname{sen}\rho Z . \cos\Delta . Z) = 0 \ldots . (2)$$

Sejam m, n, p os cosenos diretores da face parametral do sistema XYZ, neste sistema, e α_1, β_1, γ_1 os ângulos que o pólo U forma com os eixos X, Y, Z. O teorema dos cosenos de Wulff permite escrever:

$$h:k:l: = \frac{\cos\alpha_1}{m} : \frac{\cos\beta_1}{n} : \frac{\cos\gamma_1}{p} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Do triângulo UzX e de (3) tira-se:

$\cos\alpha = \text{sen}\rho U . \cos(\gamma - \varphi U) = \text{sen}\rho\, U . \cos\varphi U . \cos\gamma + \text{sen}\rho U . \text{sen}\varphi$ $\varphi U . \text{sen}\gamma = hm \ldots . (4)$

Do triângulo UzY e de (3) obtém-se:

$$\cos\beta_1 = \text{sen}\rho U . \cos\varphi U = nk \ldots\ldots\ldots (5)$$

Do triângulo UzZ e de (3) resulta:

$$\cos\gamma_1 = \cos\rho U . \cos\rho Z + \text{sen}\rho U . \text{sen}\rho Z \cos \left\{ (90 + \Delta) + (90 - \varphi U) \right\} =$$

$= \cos\rho U . \cos\rho Z - \text{sen}\rho U . \text{sen}\varphi U . \text{sen}\Delta . \text{sen}\rho Z - \text{sen}\rho U . \cos\varphi U . \text{sen}$ $. \text{sen}\rho Z . \cos\Delta = pl \ldots . (6)$

Substituindo em (4) *senρU.cosφU* pelo seu valor *nk,* tirado de (5), vem:

$$\text{sen}\rho U . \text{sen}\varphi U = \frac{hm - nk . \cos\gamma}{\text{sen}\gamma} \ldots\ldots\ldots (7)$$

De (6) tira-se, fazendo $\text{sen}\Delta . \text{sen}\rho Z = K$ e $\text{sen}\rho Z . \cos\Delta = L$:

$$\cos\rho U = \frac{pl + K . \text{sen}\rho U . \text{sen}\varphi U + L . \text{sen}\rho U . \cos\varphi U}{\cos\rho Z} \ldots (8)$$

Substituindo em (8) $\text{sen}\rho U . \cos\varphi U$ e $\text{sen}\rho U . \text{sen}\varphi U$ pelos valores obtidos em (5) e (7), tem-se:

$$\cos\rho U = \frac{pl}{\cos\rho Z} + \frac{K (hm - nk . \cos\gamma)}{\text{sen}\gamma . \cos\rho Z} + \frac{L . nk}{\cos\rho Z} \ldots (9)$$

Substituindo em (2) $\text{sen}\rho U . \cos\varphi U$, $\text{sen}\rho U . \text{sen}\varphi U$ e $\cos\rho U$ pelos valores de (5), (7), e (9), tem-se:

$$\left\{ pl + \frac{K (hm - nk . \cos\gamma)}{\text{sen}\gamma} + L . nk \right\} +$$

$$+ \frac{hm - nk . \cos\gamma}{\text{sen}\gamma} \left\{ \text{sen}\gamma . X - KZ \right\} +$$

$$+ \ nk \left\{ \cos\gamma . X + Y - LZ \right\} = 0 \ \therefore$$

$$\therefore \ hmX + nkY + plZ = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Temos, para símbolo da aresta P:

$[r_1 : r_2 : r_3] = \frac{X}{a} : \frac{Y}{b} : \frac{Z}{c}$, sendo a, b, c os parametros dos eixos oblíquos, do que resulta: $X = ar_1$, $Y = br_2$, $Z = cr_3$.

Levando êstes valores de X, Y, Z em (10), obtém-se

$$amhr_1 + bnkr_2 + cplr_3 = 0.$$

Sendo $am = bn = cp$, resulta, finalmente:

$$hr_1 + kr_2 + lr_3 = 0.$$

3 — RESUMO

Por meio da projeção estereográfica e geometria analítica é apresentada uma nova dedução da expressão $hr_1 + kr_2 + lr_3 = 0$.

4 — SUMMARY

By means of the stereographic projection and analytic geometry a new deduction of the expression $hr_1 + kr_2 + lr_3 = 0$ is presented.

5 — BIBLIOGRAFIA

1 — BOLDYREV, A. K. - 1934 — Cristalografia — tradução do russo para o espanhol por Rafael Candel Vila — Editorial Labor.

2 — BOEKE H. E. — Die Anwendung der stereographischen Projektion bei kristallographischen Untersuchungen — Berlin — Verlag von Gebrüder Borntraeger.

3 — CARNOY, J. — Cours de Geometrie analytique — Librairie Gauthier Villars.