

Análise de métricas de risco na otimização de portfólios de ações

Alcides Carlos de Araújo

Universidade de São Paulo – São Paulo/SP, Brasil

Alessandra de Ávila Montini

Universidade de São Paulo – São Paulo/SP, Brasil

RESUMO

Os trabalhos de Markowitz e Sharpe formaram as bases da chamada Moderna Teoria do *Portfolio*. Com o passar dos anos, os trabalhos desses autores foram revisados e medidas alternativas para formação de carteiras foram propostas. Diante disso, há necessidade de avaliar quais as diferenças entre tais medidas. Segundo Roman e Mitra, esse problema constitui uma nova fase de estudos, denominada de Teoria do *Portfolio* Pós-Moderna. Neste artigo, o objetivo é comparar os modelos de otimização com a utilização das medidas de risco desvio padrão (DP), momento parcial inferior (LPM) e valor em risco condicional (CVaR), para o estudo de suas diferentes formas de alocações em carteiras de ações negociadas na BM&FBovespa. A realização do artigo foi dividida em duas etapas: na primeira, houve a seleção das medidas de risco e a definição do período de análise; na segunda, houve a divisão dos ativos de acordo com a forma da distribuição de probabilidade dos retornos, um grupo composto por ações com retornos normalmente distribuídos e outro grupo por ações com retornos que não possuem distribuição normal. Quanto às medidas de risco, os testes apresentaram características similares entre os modelos; em relação aos retornos, os modelos que minimizaram o LPM e o CVaR demonstraram resultados superiores em comparação ao DP. Esses resultados são relevantes porque põem em contraposição os trabalhos que defendem não existir diferenças significativas entre os modelos.

Palavras-chave: teoria do *portfolio*, *downside risk*, valor em risco.

1. INTRODUÇÃO

O artigo pioneiro de Markowitz (1952) provocou uma mudança radical na forma de analisar o problema da formação de *portfolios* (grupos ou carteiras) de ativos financeiros. Diversos direcionamentos formados na teoria, conjuntamente explorados por outros pesquisadores clássicos como Sharpe (1964) e Lintner

Recebido em 13/abril/2012

Aprovado em 27/setembro/2014

Sistema de Avaliação: *Double Blind Review*

Editor Científico: Nicolau Reinhard

DOI: 10.5700/rausp1195

Alcides Carlos de Araújo, Mestre em Administração pela Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, é Doutorando em Administração no Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo (CEP 05508-010 – São Paulo/SP, Brasil). E-mail: alcides.carlos@yahoo.com.br

Alessandra de Ávila Montini, Mestre em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, Doutora em Administração de Empresas na Área de Métodos Quantitativos pela Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, é Professora de Métodos Quantitativos do Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo (CEP 05508-010 – São Paulo/SP, Brasil).

E-mail: amontini@usp.br

Endereço:

Universidade de São Paulo

FEA – Departamento de Administração

Avenida Professor Luciano Gualberto, 908

Cidade Universitária – Butantã

05508-010 – São Paulo – SP

(1965), provocaram dúvidas, discussões e questionamentos, tendo como produto uma gama de livros e artigos que formaram a Moderna Teoria do *Portfolio*.

Nas últimas décadas, autores como Rom e Ferguson (1994), Grootveld e Hallerbach (1999) e Roman e Mitra (2009) argumentam que essa teoria está em fase de transição para a chamada Teoria do *Portfolio* Pós-Moderna (*Post Modern Portfolio Theory*). Segundo esses autores, o desenvolvimento de novas formas de otimizar carteiras de investimentos viabilizadas pela grande capacidade computacional traz novos dilemas e questões para os gestores de carteiras. Kato (2004) cita a necessidade de estudar métodos para comparar os resultados de cada uma das medidas.

O presente artigo é uma extensão dos trabalhos de Araújo, Montini e Securato (2010) e Araújo e Montini (2011). No primeiro, os autores comparam as medidas de risco desvio padrão e semivariância na otimização de carteiras de ações e recomendam a comparação dessas medidas quando aumenta o número de ativos na carteira. No segundo estudo, Araújo e Montini (2011) analisam três medidas: desvio padrão, momento parcial inferior de ordem 2 (*Lower Partial Moment* [LPM] ou semivariância) e o valor em risco condicional (*Conditional Value-at-Risk* [CVaR]). Os autores recomendam avaliar as diferenças quanto à forma de distribuição de probabilidade dos retornos das ações e ao impacto do grau de assimetria na formação de carteiras.

Diante das recomendações citadas, no presente artigo o objetivo é investigar as alocações de investimentos em ações com uso de diferentes métricas de minimização de riscos (desvio padrão, momento parcial inferior de ordem 2 [LPM] e valor em risco condicional [CVaR]), buscando responder à seguinte questão de pesquisa:

- Quais as características das carteiras de ações quando são utilizadas diferentes métricas de mensuração de riscos, considerando normalidade e ausência de normalidade na distribuição de probabilidade dos retornos das ações?

O foco das análises foi verificar se os *portfolios* apresentam características de riscos e retornos diferenciadas. Para essa tarefa, empregam-se as seguintes métricas de risco: desvio padrão (Markowitz, 1952); LPM, utilizando a medida de semivariância proposta em Estrada (2008); e CVaR, proposta por Rockafellar e Uryasev (2000). As medidas foram selecionadas com base no estudo de Roman e Mitra (2009), que apresentam, para pesquisas futuras, a importância do foco nas medidas de risco baseadas no lado inferior da distribuição dos retornos (*downside risk*), como semivariância e CVaR. De acordo com esses autores, essas métricas são os pilares da teoria do *portfolio* pós-moderna.

Jarrow e Zhao (2006) ainda citam mais três justificativas para a crescente atenção às medidas de *downside risk*. A primeira diz respeito aos debates correntes por causa das numerosas catástrofes financeiras e aos acordos da Basileia. Nessas discussões, mensurações de *downside risk*, como o valor em risco (*Value at Risk* [VaR]), têm importância considerável. A

segunda relaciona-se com as utilizações mais frequentes de derivativos na gestão de *portfolios*, que alteram a distribuição de probabilidade da carteira, passando de simétrica para assimétrica. Por último, em momentos de desaceleração do mercado de capitais, a utilização de ativos de renda fixa é crucial. Contudo, nesses produtos, verifica-se a existência de **caudas pesadas** nas distribuições de probabilidade, o que dificulta a análise por média-variância.

O próximo tópico é dedicado à revisão bibliográfica, em que são abordadas questões sobre medidas de risco, avaliação das métricas e conceituação das medidas comparadas no trabalho. Posteriormente, detalham-se os métodos para a obtenção dos objetivos, descrevem-se as análises e resultados e apresentam-se as considerações finais.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

O tema risco tem bastante impacto na literatura da área financeira. Um dos principais trabalhos nessa linha é *Against the gods: the remarkable story of risk*, o *best seller* de Peter L. Bernstein (1996). Outros pesquisadores publicaram artigos de importância significativa para o desenvolvimento do tema, como Nawrocki (1999) que realizou uma revisão bibliográfica para descrever o desenvolvimento das mensurações do chamado *downside risk*, e Roman e Mitra (2009), que escreveram um breve histórico das medidas de risco.

No Brasil, existem trabalhos como o elaborado por Saito, Savoia e Famá (2006) que descrevem a evolução da função financeira, desde os primeiros artigos de Markowitz (1952), Tobin (1958) e Sharpe (1964), até a ascensão das finanças comportamentais no célebre trabalho de Kahneman e Tversky (1979). Outro autor, Kato (2004), adiciona à literatura uma breve revisão a respeito do desenvolvimento das medidas de risco.

Segundo Kato (2004), a chamada teoria do risco teve origem no estudo de Tetens (1789), em que o autor realizou diversas análises e discussões a respeito de dados relacionados a anuidades e direitos de pensão; algumas delas utilizavam como medida a média e o desvio padrão. Kato (2004) também cita Keynes (1937), ao descrever sobre o risco ser medido a partir dos desvios em relação a um retorno médio, devendo um prêmio pelo risco ser atribuído aos investimentos nos ativos representados com altas dispersões. Outros autores, como Domar e Musgrave (1944), definem o risco como possibilidades de perdas, dado que estaria associado à probabilidade de a taxa de retorno ser menor do que zero.

Como se percebe, os diversos autores associam termos como variação, dispersão, perda e incerteza ao risco. Entretanto, o conhecimento de como representar esse **risco** de forma que seja possível ordená-lo é alvo de discussões entre pesquisadores. Segundo Kato (2004), não existe consenso entre os autores sobre uma medida de risco financeiro.

Kato (2004), Alexander (2008) e Roman e Mitra (2009) citam duas categorias para mensuração do risco financeiro

na otimização de *portfolios*. A primeira é caracterizada pelas medidas que consideram a dispersão em relação a um retorno-alvo e podem somente assumir valores positivos; nesse caso, a categoria é dividida em dois grupos: medidas simétricas e assimétricas. A segunda categoria é formada pelas medidas de risco baseadas em quantis.

Na primeira categoria, o grupo das medidas simétricas é representado pela variância (ou desvio padrão) e pelo desvio médio absoluto. Como retorno-alvo utiliza-se o valor esperado. Nesse caso, os riscos são considerados como dispersões acima ou abaixo das expectativas. No segundo grupo, o risco é mensurado somente em relação aos desvios abaixo do retorno-alvo (*downside risk*), podendo ser o valor esperado ou algum *benchmarking*. Os principais representantes do grupo são a semivariância e o conjunto de medidas baseadas no momento parcial inferior da distribuição de probabilidade dos retornos (*Lower Partial Moment* [LPM]).

A segunda categoria é formada pelas medidas de risco baseadas em quantis (percentis). Nesse campo, são classificadas as medidas *Value-at-Risk* (VaR) e *Conditional Value-at-Risk* (CVaR). A dimensão é caracterizada pelo foco no chamado *tail risk measures*, ou seja, o objetivo é estimar o risco a partir da área da cauda esquerda da distribuição de probabilidade dos retornos do ativo, dado certo nível de confiança (1%, 5% ou 10%). De acordo com Alexander (2008), o estudo da cauda esquerda é muito importante para explicar as perdas de um ativo.

2.1. Avaliação das medidas de risco

Roman e Mitra (2009) utilizaram algumas propriedades matemáticas das medidas de risco para verificar conceitualmente a consistência de cada uma delas; os conceitos norteadores foram os de dominância estocástica (DE) e coerência. Essas propriedades foram discutidas por autores como Hadar e Russell (1969), Aharony e Loeb (1977), Artzner, Delbaen, Eber e Heath (1999), Clemen e Reilly (2001) e Kato (2004), o que mostra a relevância do tema.

Roman e Mitra (2009) conceituam dominância estocástica como um processo realizado para classificar variáveis aleatórias abaixo de suposições gerais do comportamento econômico modelado pela função utilidade. As principais regras são as seguintes: dominância estocástica de primeira ordem (*First-degree Stochastic Dominance* [FSD]) e dominância estocástica de segunda ordem (*Second-degree Stochastic Dominance* [SSD]).

Considerem-se $F(x)$ e $G(x)$ funções de probabilidade acumuladas nas carteiras F e G , em que X é uma variável aleatória que representa os retornos. As dominâncias estocásticas de primeira e segunda ordens foram definidas por Hadar e Russell (1969) e Aharony e Loeb (1977) como:

- o *portfolio* F possui FSD em relação a G se $F(X) \leq G(X)$;
- o *portfolio* F possui SSD em relação a G se $\int_{-\infty}^x [G(x) - F(x)] dt \geq 0$.

No caso de seleção de carteiras de ativos, F será eficiente em relação à carteira G , se F tiver um retorno esperado maior do que G e F tiver variância menor do que a de G . Essa proposição é apresentada na expressão [1]. Essa relação é caracterizada exatamente pela dominância estocástica de segunda ordem.

$$E_F(X) > E_G(X) \text{ e } Var_F(X) \leq Var_G(X) \quad [1]$$

O segundo conceito norteador relacionado às propriedades matemáticas das medidas de risco é a coerência. Segundo Rockafellar e Uryasev (2000), o trabalho de Artzner *et al.* (1999) é a principal referência sobre os axiomas (propriedades) de uma medida de risco coerente.

Sejam X e Y dois ativos, uma medida de risco ρ é chamada de medida de risco coerente quando satisfaz os axiomas de coerência enunciados a seguir.

- **Axioma 1** (subaditividade) – para todos os X e Y , $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$. Esta propriedade ocorre pela diversificação, isto é, o risco de dois ativos combinados não deve ser maior do que os riscos individuais.
- **Axioma 2** (homogeneidade positiva) – para todo X e $\lambda \geq 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$. O risco de uma variável aleatória (como a taxa de retorno em porcentagem) multiplicada por um escalar (como algum valor monetário) deve ser o mesmo que multiplicar o escalar pelo risco individual da variável aleatória.
- **Axioma 3** (monotonicidade) – para todos os X e Y tais que $X \leq Y$, $\rho(X) \leq \rho(Y)$. Caso um ativo X sempre apresente retornos menores em relação a outro ativo Y , esse ativo X deve possuir risco menor em relação ao Y .
- **Axioma 4** (invariância à translação) – para todo X e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\rho(X + \alpha r_f) = \rho(X) - \alpha$. Adicionar à quantia inicial um valor α e investir no ativo livre de risco (sendo $r_f = 1$) torna o risco da carteira ainda menor. Isso ocorre pelo fato de as propriedades do ativo livre de risco não possuírem risco. Mediante as diversas medidas de risco existentes na otimização de carteiras, Roman e Mitra (2009) apresentam as principais propriedades atendidas por essas mensurações, como apresentado na Figura 1. Como se percebe nessa figura, somente o CVaR atende às três características principais de uma medida de risco, conforme demonstraram Roman e Mitra (2009). Tanto o VaR quanto a família LPM apresentam problemas de coerência, e o desvio padrão não apresenta dominância estocástica.

2.2. Otimização de carteiras pelo desvio padrão (DP)

O foco da análise de carteiras está na estimação de riscos e retornos de ativos a partir da descrição de suas distribuições de probabilidades. Um dos métodos mais conhecidos é o modelo média-variância (Varian, 2006), proposto por Markowitz

Medida de Risco	Dominância Estocástica de Primeira Ordem	Dominância Estocástica de Segunda Ordem	Coerência
Desvio padrão	Não	Não	Sim*
Desvio médio absoluto	Não	Não	Sim*
LPM	Sim	Sim	Não
VaR	Sim	Não	Não
CVaR	Sim	Sim	Sim

Nota: *Coerentes, ao supor-se distribuição normal.

Fonte: Adaptado de Roman e Mitra (2009, p. 83).

Figura 1: Propriedades das Medidas de Risco

(1952). Luenberger (1998) discute de forma minuciosa os aspectos desse modelo, desde a estimação dos retornos até a otimização de carteiras, utilizando a variância como medida de risco. No que tange à estimação do retorno da carteira, considerou-se a equação [2].

$$E(r_c) = \sum_{k=1}^n w_k E(r_i) \quad [2]$$

em que $E(r_c)$ é o retorno esperado da carteira; $E(r_i)$ é o retorno esperado do ativo i ; w_i é o percentual do valor total investido no ativo i .

A variância pode ser estimada a partir da dispersão dos resultados das ações em relação a seus retornos médios, como é apresentado na equação [3].

$$\sigma_c^2 = \sum_{j,i=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j \quad [3]$$

em que w_i é o percentual do valor investido no ativo i ; σ_c^2 é a variância da carteira; σ_{ij} é a covariância entre ativos i e j .

A construção e a administração de carteiras de ações baseiam-se na busca de altos retornos e baixos níveis de risco; esse esforço pode ser chamado de **problema de portfolio** ou, segundo Luenberger (1998), o **problema de Markowitz**.

A construção do *portfolio* sugerido por Markowitz tornou-se possível por meio de programação quadrática, com a qual se buscou otimizar o modelo exibido na equação [4] (Cassarotto Filho & Kopittke, 1998; Luenberger, 1998; Costa & Assunção, 2005).

$$\text{Min} \sum_{j,i=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j \quad [4]$$

sujeito às restrições

$$\sum_{k=1}^n w_k = 1$$

e

$$0 \leq w_i \leq 1$$

Essa otimização, que será denominada de modelo M.1, implica a minimização do risco dado um nível de retorno desejado, devendo os percentuais alocados obterem somatório igual a 1.

2.3. Otimização pelo momento parcial inferior

O modelo proposto por Estrada (2008) torna-se importante pelo conjunto de trabalhos que utilizou a heurística para estimar o chamado *downside beta*; o próprio autor faz uma sequência de artigos nos anos de 2002, 2006 e 2007 (Estrada, 2002; 2006; 2007) utilizando a simplificação; somente em 2008 discute especificamente a técnica de otimização (Estrada, 2008). No Brasil, encontram-se os trabalhos de Lucena e Motta (2004), Lucena e Figueiredo (2008) e Fortunato, Motta e Russo (2010), que também utilizaram a heurística, porém não compararam essa medida de risco com outras.

Segundo a divisão citada por Nawrocki e Cumova (2010), na solução proposta por Estrada (2008) o objetivo é transformar a matriz assimétrica em simétrica; a principal justificativa desse tipo de solução seria a chamada **endogeneidade** dos algoritmos heurísticos. Em outras palavras, muitas vezes o investidor necessita conhecer o grau de associação entre os ativos, mas as proposições baseadas em heurísticas desconsideram essas informações. A matriz assimétrica é apresentada na expressão [5]:

$$CSV_{ij} = 1/T \sum_{i=1}^{R_f} [(R_i - R_f) \text{Min}(R_j - R_f, 0)] \quad [5]$$

em que R_i é o retorno do ativo i ; R_f é o retorno do ativo livre de risco; e T , o tamanho da amostra.

Pela equação [5], percebe-se que a matriz é assimétrica ($CSV_{ij} \neq CSV_{ji}$), uma vez que os elementos da diagonal superior são diferentes daqueles da diagonal inferior; isso ocorre porque o termo $(R_i - R_j)$ é multiplicado por $Min(R_j - R_j, 0)$. A partir disso, Estrada (2008) propôs a formulação apresentada na equação [6]:

$$CSV_{ij} = 1/T \sum_{i=1}^{R_f} [min(R_i - R_j) Min(R_j - R_j, 0)] \quad [6]$$

Por meio da modificação proposta por Estrada (2008), os problemas da assimetria e da matriz endógena foram resolvidos; a partir disso, torna-se possível a otimização conforme os direcionamentos de Markowitz. Pesquisadores como Nawrocki (1999) e Sing e Ong (2000) tratam a semivariância sob a ótica da família LPM. No caso discreto, o modelo pode ser representado pela expressão [7]:

$$LPM_{k,\tau}(X) = E(|min(X - \tau, 0)|^k)^{\frac{1}{k}} \quad [7]$$

em que $X = R_i$ é o retorno do ativo i ; τ é o retorno mínimo aceitável; k é a ordem do modelo (grau de aversão ao risco).

Andrade (2006) e Alexander (2008) citam algumas ordens específicas: $LPM_{1,\tau}$ como primeira ordem; $LPM_{2,\tau}$ chamado de segunda ordem; $LPM_{3,\tau}$ chamado de semiassimetria; e $LPM_{4,\tau}$ como semicurtose. Diante da relação entre os conceitos da semivariância e do LPM, neste artigo o termo LPM, quando utilizado, estará relacionado à estimação da semivariância apresentada em Estrada (2008). A otimização que utiliza o LPM como medida de risco é apresentada na expressão [8] e será denominada de modelo M.2.

$$Min \sum_{j,i=1}^n CSV_{ij} w_i w_j \quad [8]$$

sujeito às restrições

$$\sum_{k=1}^n w_i = 1$$

e

$$0 \leq w_i \leq 1$$

2.4. Otimização pelo valor em risco condicional

O modelo mais utilizado para a otimização do CVaR (*Conditional Value-at-Risk*) para carteiras de investimentos foi proposto por Rockafellar e Uryasev (2000). Alguns trabalhos no Brasil também utilizaram a metodologia, como os de Montini (2003) e Ribeiro, Ferreira e Santos (2007). O método tem bastante praticidade, por minimizar o CVaR e estimar o VaR (*Value-at-Risk*) ao mesmo instante.

O CVaR é uma medida de risco estimada pela média das perdas desde o pior resultado até o percentil (*Value-at-Risk* – VaR) selecionado (geralmente 1%, 5% ou 10%), o que possibilita conhecer a informação a respeito da extensão das perdas (Alexander, 2008). Para o caso de distribuição contínua, o CVaR é apresentado por meio da equação [9]:

$$CVaR_{\alpha}(X) = -\alpha^{-1} \int_{-\infty}^{x_{\alpha}} x \cdot f(x) \cdot dx \quad [9]$$

em que x é uma carteira de ativos; x_{α} é o VaR; α é o percentil da distribuição de x ; e $f(x)$ é uma função de perda associada a x .

Para a estimação do CVaR, podem ser utilizadas metodologias como as simulações por Monte-Carlo, análise de séries históricas e realização de aproximações da distribuição de probabilidade na função de perda por meio da distribuição normal ou da t de Student.

A representação do CVaR na equação [9] sofreu uma modificação proposta por Rockafellar e Uryasev (2000); a mudança pode ser visualizada na expressão [10]:

$$\phi_{\beta}(x) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(x,y) \geq \alpha_{\beta}(x)} f(x,y) \cdot p(y) \cdot dy \quad [10]$$

em que $p(y)$ é a função densidade de probabilidade de variáveis de mercado; β é o nível de probabilidade a ser escolhido; e $f(x,y)$ é uma função de perda associada à carteira x e a variáveis de mercado y .

Posteriormente, Rockafellar e Uryasev (2000) definiram a fórmula do VaR como a expressão [11]:

$$VaR = \alpha_{\beta}(x) = \min \{ \alpha \in \mathbb{R} : \Psi(x, \alpha) \geq \beta \} \quad [11]$$

em que $\Psi(x, \alpha)$ é a função de distribuição acumulada para a perda associada a x .

Desse modo, Rockafellar e Uryasev (2000) propuseram a combinação das expressões [10] e [11] em termos de uma função F_{β} , como é demonstrado na equação [12].

$$F_{\beta}(x, \alpha) = \alpha + (1 - \beta)^{-1} \int_{y \in \mathbb{R}^m} [f(x, y) - \alpha]^+ \cdot p(y) \cdot dy \quad [12]$$

A expressão [12] é aplicada para distribuições contínuas de probabilidade. No caso discreto, na fórmula há algumas modificações (equação [13]):

$$\tilde{F}_{\beta}(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{n(1 - \beta)} \sum_{k=1}^n [f(x, y) - \alpha]^+ \quad [13]$$

A partir da definição do CVaR para o caso discreto, na expressão [14] é definida a forma para a otimização de uma carteira de ações utilizando o CVaR como medida de risco.

$$\text{Min: } \alpha + \frac{1}{n(1-\beta)} \sum_{k=1}^n [-w_i R_i - \alpha]^+ \quad [14]$$

sujeito às restrições

$$\sum_{k=1}^n w_i = 1$$

e

$$0 \leq w_i \leq 1$$

em que n é o tamanho da amostra.

A expressão [14] e as restrições serão utilizadas para o modelo de otimização M.3.

Diferentemente da análise proposta por Markowitz (1952), que utiliza o desvio padrão como medida de risco e em que a otimização ocorre por programação quadrática, tomando o caso do CVaR como medida de risco a otimização ocorre por meio de programação linear.

2.5. Comparação entre as medidas de risco na otimização de carteiras de ativos

Nos tópicos anteriores, foram apresentados os conceitos dos modelos de otimização utilizados no presente artigo. Nesta seção, apresentam-se artigos em que se pesquisou a mesma temática. Vale ressaltar que somente no trabalho de Konno, Waki e Yuuki (2002) foi encontrada a análise das três medidas de risco.

Um dos trabalhos relevantes sobre a comparação entre as medidas de desvio padrão e a medida de risco LPM quanto à eficiência da carteira foi realizado por Rom e Ferguson (1994). Foi utilizada nesse trabalho, possivelmente pela primeira vez, a expressão **teoria do *portfolio*** pós-moderna.

Nesse estudo, apresentam-se resultados relevantes sobre a fronteira eficiente. No caso, quando os autores analisaram a curva de Retorno *versus* Risco, demonstraram que o modelo de otimização que contém a medida de risco baseada no LPM possuiu domínio estocástico em relação aos demais modelos estudados.

Também se verificaram maiores alocações nos ativos de renda variável quando utilizadas as medidas de LPM, enquanto a medida de desvio padrão realizou maiores posições em ativos de renda fixa.

Conforme Rom e Ferguson (1994), esses resultados demonstraram que as otimizações de carteiras que tomam como medida de risco o LPM são mais adequadas à gestão de carteiras do que o desvio padrão proposto por Markowitz (1952). Rom e Ferguson (1994) também explicaram que as alocações em

maiores quantidades nos ativos de renda variável ocorreram pelo maior grau de assimetria observada nos retornos desses ativos que, segundo os autores, apresentaram maiores retornos.

Os resultados apresentados por Rom e Ferguson (1994) geraram discussões nas pesquisas científicas da área: um grupo de autores concordou com as análises, e outro contrapôs-se aos resultados. Em relação aos autores que obtiveram resultados semelhantes aos de Rom e Ferguson (1994), podem ser citados Grootveld e Hallerbach (1999), Andrade (2006) e Nawrocki e Cumova (2010).

Grootveld e Hallerbach (1999) realizaram uma investigação utilizando três índices de renda variável e três índices de renda fixa do mercado norte-americano no período de janeiro de 1980 a dezembro de 1994. O trabalho tornou-se relevante por diversificar a quantidade de análises na pesquisa em relação ao trabalho de Rom e Ferguson (1994). Segundo Grootveld e Hallerbach (1999), os retornos das carteiras foram maiores quando utilizado o LPM como medida de risco nas otimizações.

A pesquisa realizada por Nawrocki e Cumova (2010), que utiliza o LPM como medida de risco, é muito importante porque os autores apresentaram uma simplificação efetiva em custo computacional e facilidade de aprendizagem para a otimização de carteiras. Os resultados demonstrados também foram obtidos por Rom e Ferguson (1994); segundo os autores, as carteiras otimizadas, tomando-se como medida de risco o LPM, apresentaram maiores retornos.

Andrade (2006) investigou os modelos de otimização considerando o LPM para o mercado brasileiro. No estudo foram selecionadas 24 ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) no período de janeiro de 1995 a março de 2001. O autor analisou o comportamento da carteira dentro do período de formação e após a formação e constatou maiores retornos nas carteiras com o LPM minimizado.

Alguns autores obtiveram resultados favoráveis ao LPM; outros, desfavoráveis. Uma das críticas mais fortes é encontrada em Estrada (2008). Segundo esse autor, a fronteira eficiente formada pelo LPM aparenta ser mais eficaz em relação ao modelo que considera o desvio padrão. Todavia, isso ocorre simplesmente pelo fato de o LPM ser somente uma medida de mensuração de risco focada em um único lado da distribuição de probabilidade dos retornos.

O LPM mensura somente uma parte do risco em comparação com o desvio padrão, que contempla tanto o lado superior quanto o inferior da distribuição de probabilidade dos retornos. Dessa forma, seria indiferente para o investidor a escolha de uma fronteira eficiente formada a partir do desvio padrão ou pelo momento parcial inferior (LPM), dado que em qualquer uma das escolhas o risco estaria minimizado.

Jarrow e Zhao (2006) também contrapõem os resultados a respeito das medidas de risco focadas no lado inferior. Após compararem os métodos de otimização em dois grupos de carteiras – o primeiro por ativos de renda fixa e o segundo por ativos de renda variável –, os autores concluem que não há

diferenças significativas entre os métodos de minimização por meio do desvio padrão e por meio do LPM tanto no grupo com ativos de renda fixa quanto no grupo de ativos de renda variável.

O trabalho de Brito Neto e Volkmer (2001) é relevante por apresentar uma metodologia diferente em relação aos autores citados anteriormente. Em vez de utilizar todos os ativos para minimização do risco da carteira ou separar os ativos por tipo (renda fixa ou variável), Brito Neto e Volkmer (2001) os separaram pelo formato da distribuição de probabilidade. Desse modo, compararam os métodos de otimização de uma carteira formada somente por ativos que apresentaram distribuição normal com os de outra carteira formada por ativos que demonstraram retornos com distribuição não normal. Os resultados também são díspares em relação ao trabalho de Rom e Ferguson (1994), não existindo diferenças significativas entre os métodos, considerando-se o desvio padrão e o LPM.

Quanto à comparação desvio padrão *versus* CVaR, podem ser apresentados os trabalhos de Rockafellar e Uryasev (2000) e Bertsimas, Lauprete e Samarov (2004). No primeiro artigo, foram gerados retornos por meio de simulação, e as comparações ocorreram pela composição da carteira segundo os níveis de confiança selecionados (90%, 95% e 99%) e pelo cálculo do VaR e CVaR em ambos os modelos de otimização. Pelos resultados de Rockafellar e Uryasev (2000), as carteiras e os cálculos do VaR e CVaR tenderam à convergência em ambos os métodos.

No segundo artigo, Bertsimas *et al.* (2004) buscaram maior aprofundamento nas análises ao variar, por meio de simulações, o grau de assimetria das distribuições dos retornos dos ativos a serem impostos na carteira. Quando foram utilizadas distribuições simétricas, o modelo com CVaR apresentou maior volatilidade em relação ao desvio padrão, principalmente quando níveis de significância (α) baixos foram determinados. As carteiras tenderam à semelhança quando o tamanho da amostra aumentou. Ao simular distribuições assimétricas, o modelo com CVaR demonstrou dominância em relação ao desvio padrão, e as diferenças foram consideradas significativas. Contudo, as distâncias foram acentuadas quando se modificaram os valores de (α).

No artigo de Konno *et al.* (2002), apresentam-se comparações entre as três medidas de risco abordadas na presente pesquisa. Os autores realizaram simulações de fronteiras eficientes com dados da bolsa de valores de Tóquio e buscaram evidenciar as diferenças entre os retornos que cada uma das carteiras produziu utilizando as diferentes medidas de risco em cada otimização. Os autores criaram dois grupos para comparação das medidas: o primeiro continha os ativos com distribuição normal; o segundo, com distribuição não normal. Em ambos os grupos, as diferenças quanto aos retornos não foram significativamente diferentes.

Existe uma vasta literatura a respeito do tema otimização de carteiras. Desde o modelo proposto no artigo de Markowitz (1952), o assunto é exaustivamente tratado no meio científico. Conforme apresentaram Roman e Mitra (2009), o conteúdo

está numa fase de transição em que o objetivo é minimizar os riscos de uma carteira de ativos levando em consideração os aspectos comportamentais dos investidores. Diante disso, existe a discussão sobre quais medidas de risco melhor se ajustam ao padrão comportamental do investidor. No presente artigo, comparam-se as medidas de risco que levam em conta somente o lado das perdas com a medida que considera tanto as perdas quanto os ganhos. Na Figura 2, são resumidos os principais artigos que tratam das medidas – desvio padrão (DP), LPM (momento parcial inferior) e CVaR (valor em risco condicional) – e que foram apresentados na revisão bibliográfica.

3. METODOLOGIA

Neste artigo, apresenta-se uma comparação entre as medidas de risco desvio padrão (DP), momento parcial inferior (LPM) e valor em risco condicional (CVaR), considerando retorno de ações oriundas e não oriundas da distribuição normal.

O processo de pesquisa foi dividido em duas etapas: na primeira determinaram-se as medidas de risco a serem utilizadas e dividiram-se os períodos de análise; na segunda, dividiram-se os ativos conforme a distribuição de probabilidade (um grupo tem ativos normalmente distribuídos e outro, ativos não normalmente distribuídos), aplicaram-se os algoritmos de otimização e analisaram-se os resultados.

3.1. Etapa 1

Após a revisão bibliográfica, foi possível identificar algumas medidas de risco mais utilizadas (DP, LPM e CVaR). Na Figura 1, levantaram-se as propriedades matemáticas (dominância estocástica e coerência) associadas a essas medidas de risco. Por meio do referencial teórico, definiram-se as funções objetivo e restrições suficientes para otimização das funções apresentadas nas expressões [4] (modelo M.1), [8] (modelo M.2) e [14] (modelo M.3). A síntese das expressões a serem minimizadas é apresentada na Figura 3.

Neste artigo, considerou-se para a análise os retornos diários de ações presentes na Bovespa de janeiro de 2006 a dezembro de 2013. Esse período foi selecionado devido ao volume relativamente baixo entre os anos de 2002 e 2005, conforme apresenta Araújo (2012). Buscou-se, também, analisar períodos diferentes em relação a outros autores, como Brito Neto e Volkmer (2001) que utilizaram o período entre 2000 e 2001, Andrade (2006) que utilizou uma série entre 1995 e 2001, e Araújo *et al.* (2010) que analisaram períodos entre 2009 e 2010.

Participaram das análises as ações presentes no índice Bovespa com presença em bolsa acima de 90% e liquidez em bolsa acima de 0,29. A presença em bolsa leva em consideração o número de dias em que houve pelo menos um negócio com a ação dentro do período estudado (janeiro de 2006 a dezembro de 2013). Esse critério também foi utilizado em Rubesam e Beltrame (2013). A liquidez em bolsa pondera o número de dias em que

Autor	Amostra	Períodos	Comparações	Análises	Resultados
Rom e Fergusom (1994)	Cinco ativos – <i>large capitalization, small-capitalization, non-US, bonds e cash</i>	Jan. 1978 – Dez. 1992	DP x LPM	Índice Sharpe, Índice Sortino e Fronteira eficiente	LPM maiores retornos
Grootveld e Hallerbach (1999)	Três ativos <i>US industry</i> e três <i>US bond</i>	Jan. 1980 – Dez. 1994	DP x LPM	Análise da assimetria dos ativos, análise das fronteiras eficientes	LPM maiores retornos
Nawrocki e Cumova (2010)	150 ativos selecionados aleatoriamente do banco de dados da Center of Research in Security Prices (CRSP)	Jan. 2001 – Dez. 2009	DP x LPM	Fronteira eficiente e test t	LPM maiores retornos
Andrade (2006)	24 ações negociadas na Bovespa	Jan. 1995 – Mar. 2001	DP x LPM	Fronteira eficiente e test z	LPM maiores retornos <i>ex post</i>
Estrada (2008)	Cinco classes de ativos – <i>US, EAFE, Emerging Markets, US bonds, US real state</i>	Jan. 1998 – Dez. 2006	DP x LPM	Fronteira eficiente	Não há retornos diferentes
Brito Neto e Volkmer (2001)	Dois ativos – dólar e Ibovespa	Nov. 2000 – Mar. 2001	DP x LPM	Teste qui-quadrado, teste de Wilcoxon	Não há retornos diferentes
Jarrow e Zhao (2006)	Simularam carteiras formadas somente por ativos de renda variável e outras carteiras formadas somente por ativos de renda fixa	Simulações diárias para horizonte de um ano	DP x LPM	Simulação	Não há retornos diferentes
Rockafellar e Uryasev (2000)	Três ativos – <i>S&P500, US bonds e small caps</i>	Simulações de amostras de tamanho 1000, 3000, 5000, 10000 e 20000	DP x CVaR	Simulação	Não há retornos diferentes
Bertsimas <i>et al.</i> (2004)	96 ativos com dados mensais	Jan. 1996 – Dez. 1999	DP x CVaR	Simulações de fronteiras eficientes	Não há diferenças (distribuição simétrica), CVaR maiores retornos (distribuição assimétrica)
Konno <i>et al.</i> (2002)	1.100 ações da <i>Tokyo Stock Exchange</i> com dados mensais e diários	Jan. 1995 – Dez. 1999	DP x LPM x CVaR	Simulações de fronteiras eficientes	Não há diferenças (DP x LPM/CVaR), não há diferenças (LPM x CVaR)

Figura 2: Quadro Comparativo dos Estudos Realizados

houve negócios da ação na bolsa e o volume financeiro negociado; o critério de liquidez é comumente utilizado nos estudos em finanças, como apresentado por Caldeira e Moura (2013).

A utilização desses critérios é importante dado que o uso de ações menos líquidas envolvem, na prática, maiores custos

operacionais e dificuldades de negociação, conforme citam Caldeira e Moura (2013). Portanto, utilizar as ações de maior liquidez é uma amostra representativa para o estudo; o uso desses critérios permitiu a seleção de 50 ações. Os preços das ações foram ajustados para dividendos e desdobramentos,

M.1 – Markowitz (1952)	M.2 – Estrada (2008)	M.3 – Rockafellar e Uryasev (2000)
$\text{Min: } \sum_{j,i=1}^n \sigma_{ij} w_i w_j$	$\text{Min: } \sum_{j,i=1}^n \text{CSV}_{ij} w_i w_j$	$\text{Min: } \alpha + \frac{1}{n(1-\beta)} \sum_{k=1}^n [-w_i R_i - \alpha]^+$
Sujeito a:	Sujeito a:	Sujeito a:
$\sum_{k=1}^n w_j = 1$ $0 \leq w_j \leq 1$	$\sum_{k=1}^n w_j = 1$ $0 \leq w_j \leq 1$	$\sum_{k=1}^n w_j = 1$ $0 \leq w_j \leq 1$

Fontes: Markowitz (1952), Estrada (2008) e Rockafellar e Uryasev (2000).

Figura 3: Modelos de Otimização

conforme Broussard e Vaihekoski (2012). Esses ajustes evitam problemas de sinais falsos, que podem causar viés na estimação das taxas de retornos, para negociação nos preços, os quais foram coletados no sistema Economatica.

Após as fases de escolha do período e levantamento dos ativos, foi necessário realizar o tratamento dos dados. Nessa fase, primeiramente foram calculadas as taxas de retorno dos ativos por meio da expressão [15].

$$R_i = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{15}$$

em que P_t é o preço da ação no tempo t .

Na última fase da primeira etapa, houve a divisão da amostra em dois períodos. Foram analisados períodos que tivessem no mínimo cem dias, pois, dado que alguns dos testes estatísticos utilizados têm propriedades assintóticas, número menor poderia afetar seus desempenhos.

Um ponto importante a ser considerado é o limite máximo do tamanho da janela de estimação dos parâmetros. Segundo Souza (1999), a seleção de períodos longos estimaria parâmetros que poderiam não representar o comportamento do ativo. Diante disso, a escolha de períodos semestrais possibilitou atingir os objetivos traçados com a análise de 16 semestres (1º semestre de 2006, 2º semestre de 2006; 1º semestre de 2007, 2º semestre de 2007; 1º semestre de 2008, 2º semestre de 2008; 1º semestre de 2009, 2º semestre de 2009; 1º semestre de 2010, 2º semestre de 2010, 1º semestre de 2011, 2º semestre de 2011, 1º semestre de 2012, 2º semestre de 2012, 1º semestre de 2013 e 2º semestre de 2013).

3.2. Etapa 2

Na segunda etapa, buscou-se delinear como obter informações a partir dos dados; diante disso, as análises dos dados foram selecionadas. Mediante a necessidade de escolher as

ferramentas de análise, tornou-se importante especificar as principais perguntas da pesquisa:

- As métricas de risco para otimização de carteiras de ações podem apresentar retornos e riscos diferentes?
- As métricas de risco na otimização de carteiras apresentam resultados divergentes na presença de diferentes distribuições de probabilidade nos retornos das ações?

A segunda etapa foi iniciada com a divisão do banco de dados em dois conjuntos: no primeiro, concentraram-se as ações que apresentaram seus retornos com distribuição normal; no segundo, as ações que apresentaram retornos não normalmente distribuídos. Essa divisão foi importante para realizar análises de forma semelhante à dos trabalhos de Brito Neto e Volkmer (2001) e Konno *et al.* (2002). O teste de Jarque-Bera (expressão [16]) – que, conforme Brooks (2008), é comumente utilizado para avaliar a normalidade das distribuições de probabilidade na área financeira – foi utilizado para definir em qual dos dois conjuntos a ação seria classificada.

$$W = q \left[\frac{b_1^2}{6} + \frac{(b_2 - 3)}{24} \right] \tag{16}$$

em que b_1 é apresentada na expressão [17]; e b_2 é apresentada na expressão [18].

$$b_1 = \frac{E(R_i^3)}{(\sigma^2)^{3/2}} \tag{17}$$

$$b_2 = \frac{E(R_i^4)}{(\sigma^2)^2} \tag{18}$$

Após a divisão do banco de dados, foi iniciado o processo de otimização pelo seguinte procedimento: primeiramente, duas ações foram selecionadas de forma aleatória; depois,

minimizou-se o risco com a utilização dos modelos M.1, M.2 e M.3, obtendo-se as carteiras em cada respectivo modelo. Em seguida, mais uma ação foi selecionada de forma aleatória e uma nova minimização foi realizada com as ações anteriores e a nova ação, formando a nova carteira com o risco minimizado. Esse processo é realizado até a obtenção do número máximo de ações classificadas com distribuição normal. O mesmo procedimento foi realizado no grupo das ações com retornos não normalmente distribuídos.

A partir das carteiras formadas no processo de otimização, buscou-se conhecer as características de riscos e retornos de cada *portfolio*. No caso dos retornos, estimou-se a média da carteira por meio da média ponderada dos retornos de cada ação presente na carteira. No caso dos riscos, estimou-se o desvio padrão, o LPM grau 2 com retorno mínimo aceitável igual a zero e o CVaR a 95% de confiança. Para comparar as medidas de risco, utilizou-se o teste F para verificar a igualdade de variâncias (somente realizado nas carteiras com distribuição normal).

Em resumo, o banco de dados foi dividido em dois grupos (ações normalmente distribuídas e não normalmente distribuídas), e para cada grupo foram considerados três modelos de otimização, propostos por Markowitz (1952), Estrada (2008) e Rockafellar e Uryasev (2000). Após as carteiras formadas pelos três modelos, estimaram-se três medidas de risco: desvio padrão (DP), momento parcial inferior (LPM) e valor em risco condicional (CVaR). Dessa forma, obtiveram-se nove combinações de análise para cada grupo com ações normalmente distribuídas e não normalmente distribuídas descritas na Figura 4.

Para comparar os retornos das carteiras baseadas nas diferentes medidas de risco, foram utilizados: teste *t* para amostras relacionadas (para as carteiras com distribuição normal) e teste de Postos Sinalizados de Wilcoxon para amostras relacionadas (para as carteiras que não apresentaram distribuição normal). Os resultados dos testes foram baseados nos intervalos de confiança e nos níveis descritivos obtidos por meio do processo de reamostragens (*bootstrap*), conforme apresentam Efron e Tibshirami (1993). A análise foi viabilizada por meio do *software* de simulação, otimização e análise de dados MatLab (*Matrix Laboratory*).

4. ANÁLISES E RESULTADOS

Como descrito na metodologia, por meio do teste de Jarque-Bera (nível descritivo de 10%) para testar normalidade, o banco de dados foi dividido em dois grupos: o primeiro formado pelos retornos que apresentaram distribuição normal (grupo 1) e o segundo, pelas ações que não aderiram à normalidade (grupo 2). As análises buscaram comparar o resultado entre as medidas de risco e o retorno das carteiras, como pode ser observado nos tópicos a seguir.

4.1. Análises dos riscos e retornos

Em conformidade com a metodologia proposta por Markowitz (1952) para avaliar carteiras de ativos, no presente trabalho buscou-se analisar as características dos *portfolios* segundo

Combinações	Modelo de Otimização	Distribuição das Ações na Carteira	Medidas de Risco
1	M.1	Normal	Desvio padrão
2	M.1	Normal	LPM
3	M.1	Normal	CVaR
4	M.2	Normal	Desvio padrão
5	M.2	Normal	LPM
6	M.2	Normal	CVaR
7	M.3	Normal	Desvio padrão
8	M.3	Normal	LPM
9	M.3	Normal	CVaR
10	M.1	Não Normal	Desvio padrão
11	M.1	Não Normal	LPM
12	M.1	Não Normal	CVaR
13	M.2	Não Normal	Desvio padrão
14	M.2	Não Normal	LPM
15	M.2	Não Normal	CVaR
16	M.3	Não Normal	Desvio padrão
17	M.3	Não Normal	LPM
18	M.3	Não Normal	CVaR

Figura 4: Combinações Analisadas

seus riscos e retornos. Dado que os modelos foram baseados em medidas de risco diferentes, foi necessário estimar o risco da carteira formada por meio das três medidas de risco (DP, LPM e CVaR) descritas.

As comparações entre as medidas de risco mensuradas nos grupos detalhados na Figura 4 são apresentadas nas Figuras 5 e 6. Na Figura 5, são demonstradas as análises nas combinações em que as carteiras aderiram à normalidade, enquanto na Figura 6 são visualizados os resultados referentes às combinações em que as ações presentes nas carteiras não aderiram à normalidade. Nas figuras são apresentados os resultados para o primeiro semestre de 2012, mas esse comportamento foi o mesmo em todos os semestres analisados; desse modo, o semestre apresentado serve como referência de interpretação para os demais.

Nas Tabelas 1, 2 e 3 são observadas as seguintes características: nas colunas 1 e 2, o ano e o semestre em estudo; na coluna 3, os modelos comparados; na coluna 4, o número de ações na carteira para o grupo normalmente distribuído; na coluna 5, os resultados do teste F realizado para testar a hipótese de igualdade entre os riscos obtidos pelos dois modelos; na coluna 6, apresenta-se a mediana do retorno da carteira com retornos normalmente distribuídos; na coluna 7, o nível descritivo do teste t realizado para comparar o retorno médio entre os modelos com ações normalmente distribuídas; na coluna 8, o número de ações na carteira para o grupo não normalmente distribuído; na coluna 9, a mediana do retorno da carteira para ações não oriundas da normalidade; e na coluna 10, apresenta-se o Teste de Wilcoxon para amostras relacionadas a fim de comparar as medianas dos retornos entre os modelos com retornos não precedentes da normalidade.

4.1.1. Análises dos riscos

Nas Figuras 5(a) e 6(a), observa-se o comportamento das combinações analisadas pela medida desvio padrão, de acordo com o aumento da quantidade de ações presentes nas carteiras. Nas Figuras 5(b) e 6(b), observa-se o comportamento das combinações analisadas pela medida de momento parcial inferior (LPM), e nas Figuras 5(c) e 6(c), apresenta-se a análise das combinações mensuradas pelo valor em risco condicional (CVaR). Percebe-se o decaimento do risco em todas as combinações com o aumento do número de ações presentes na carteira. Esse tipo de resultado era esperado devido ao efeito da diversificação, conforme demonstrou Markowitz (1952), pois com o aumento do número de ativos, devidamente selecionados na carteira, há uma redução do risco.

No presente artigo, demonstra-se que o decaimento do risco parece ocorrer de forma diferenciada para cada grupo analisado. Nas Figuras 5(a) e 6(a), as combinações 1 e 10, respectivamente, tiveram decaimento mais rápido. Na Figura 5(b), as combinações apresentaram decaimento semelhante. Na Figura 6(b), a combinação 14 decaiu mais rapidamente.

Por último, nas Figuras 5(c) e 6(c), as combinações 9 e 18 apresentaram menor nível de risco com o aumento do número de ações na carteira.

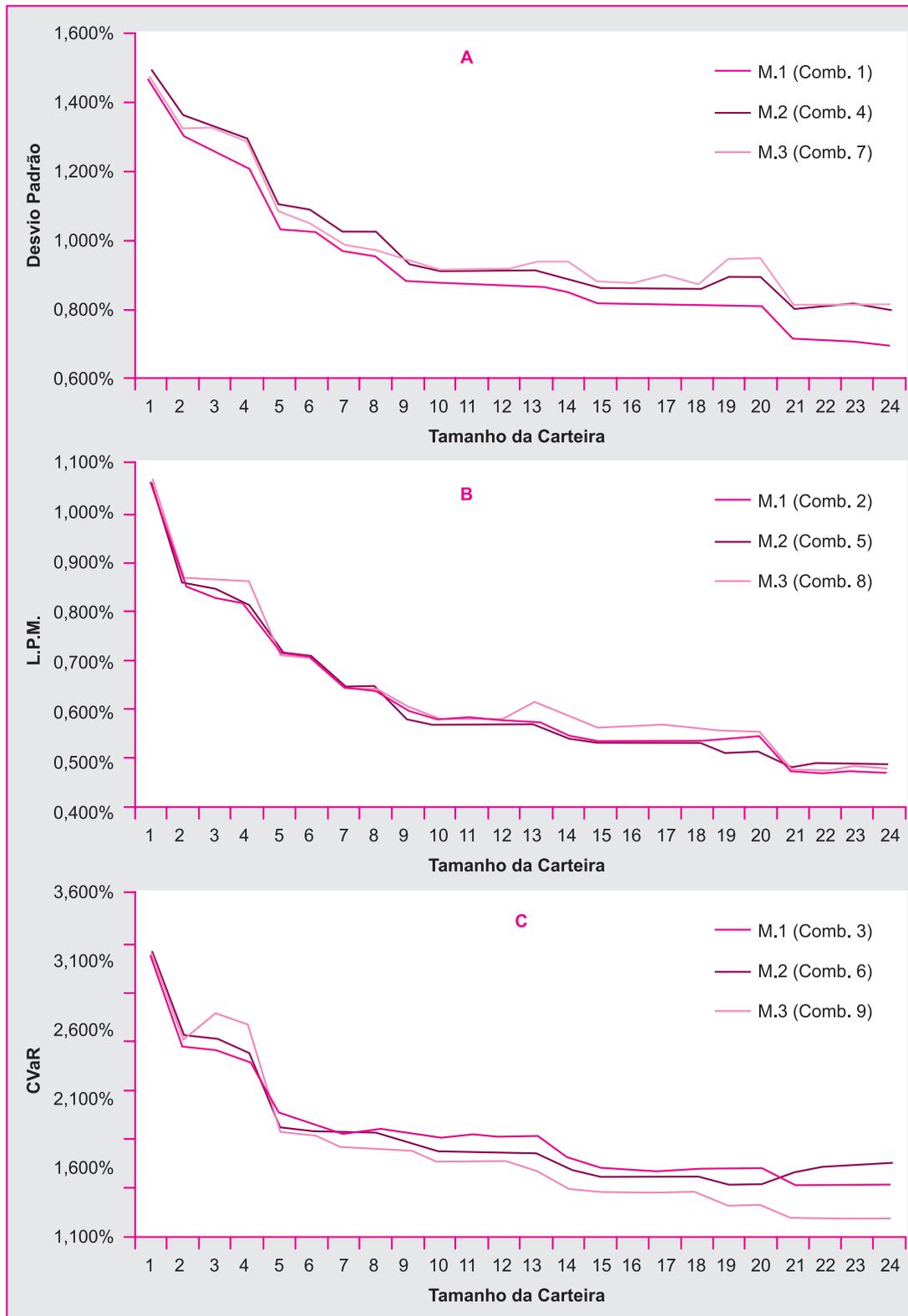
Apesar das possíveis diferenças apresentadas nas Figuras 5 e 6, os testes F não as confirmaram nas combinações das ações que aderiram à normalidade (ver na coluna 5 das Tabelas 1, 2 e 3). Nos testes F , os resultados foram idênticos em todos os semestres, apresentando níveis descritivos acima de 10% (valor $p > 10\%$). No caso das combinações em que as ações não aderiram à normalidade, os testes F não puderam ser realizados porque a estatística de teste apresenta viés para conjunto de dados que têm distribuição diferente da normal, conforme cita Brooks (2008). Desse modo, nenhum teste foi realizado nas combinações apresentadas na Figura 6; contudo, ao comparar-se com a Figura 5, visualmente percebe-se que as diferenças de decaimento foram maiores na Figura 6.

Para finalizar as comparações a respeito das mensurações de riscos entre os grupos, ressaltam-se os seguintes resultados. Nota-se pelas Figuras 5(a) e 6(a) que, independentemente da distribuição dos retornos (normal e não normal), quando se considera o desvio padrão, o decaimento mais rápido ocorre para o modelo de otimização M.1 proposto por Markowitz (1952) – combinações 1 e 10. Verifica-se pela Figura 5(b) que, para os retornos com distribuição normal considerando a medida LPM, os três métodos foram equivalentes. No entanto, ao observar-se a Figura 6(b), para retornos não normalmente distribuídos, o modelo de otimização de Estrada (M.2) apresentou os menores valores de LPM.

Nota-se pelas Figuras 5(c) e 6(c) que, independentemente da distribuição dos dados (normal e não normal), quando se considera o CVaR o decaimento mais rápido ocorre para o modelo de otimização M.3 proposto por Rockafellar e Uryasev (2000) – combinações 9 e 18. Quando os dados não possuem distribuição normal, o CVaR é muito menor quando o método de Rockafellar e Uryasev (2000), modelo M.3, é utilizado para formar as carteiras.

Esses resultados estão em parte de acordo com os comentários de Estrada (2008). Conforme o autor, seria indiferente a escolha de algum modelo de otimização baseando-se em alguma medida de risco específica. Por exemplo, caso o investidor “A” escolha o desvio padrão como medida de risco de sua carteira, o modelo de Markowitz (1952) formaria uma carteira com o desvio padrão mínimo; caso o investidor “B” escolha o CVaR como medida de risco, o modelo de Rockafellar e Uryasev (2000) proporcionaria ao investidor uma carteira com CVaR mínimo. Diante disso, não importaria a escolha de um modelo específico, porque tanto o investidor “A” quanto o investidor “B” teriam uma carteira de risco mínimo.

Entretanto, quando Estrada (2008, p. 67) comenta que “tudo deve ser resumido ao que determinado investidor perceber como a medida de risco mais adequada”, podem-se demonstrar algumas contraposições. Apesar de os riscos das carteiras terem demonstrado características semelhantes mediante os

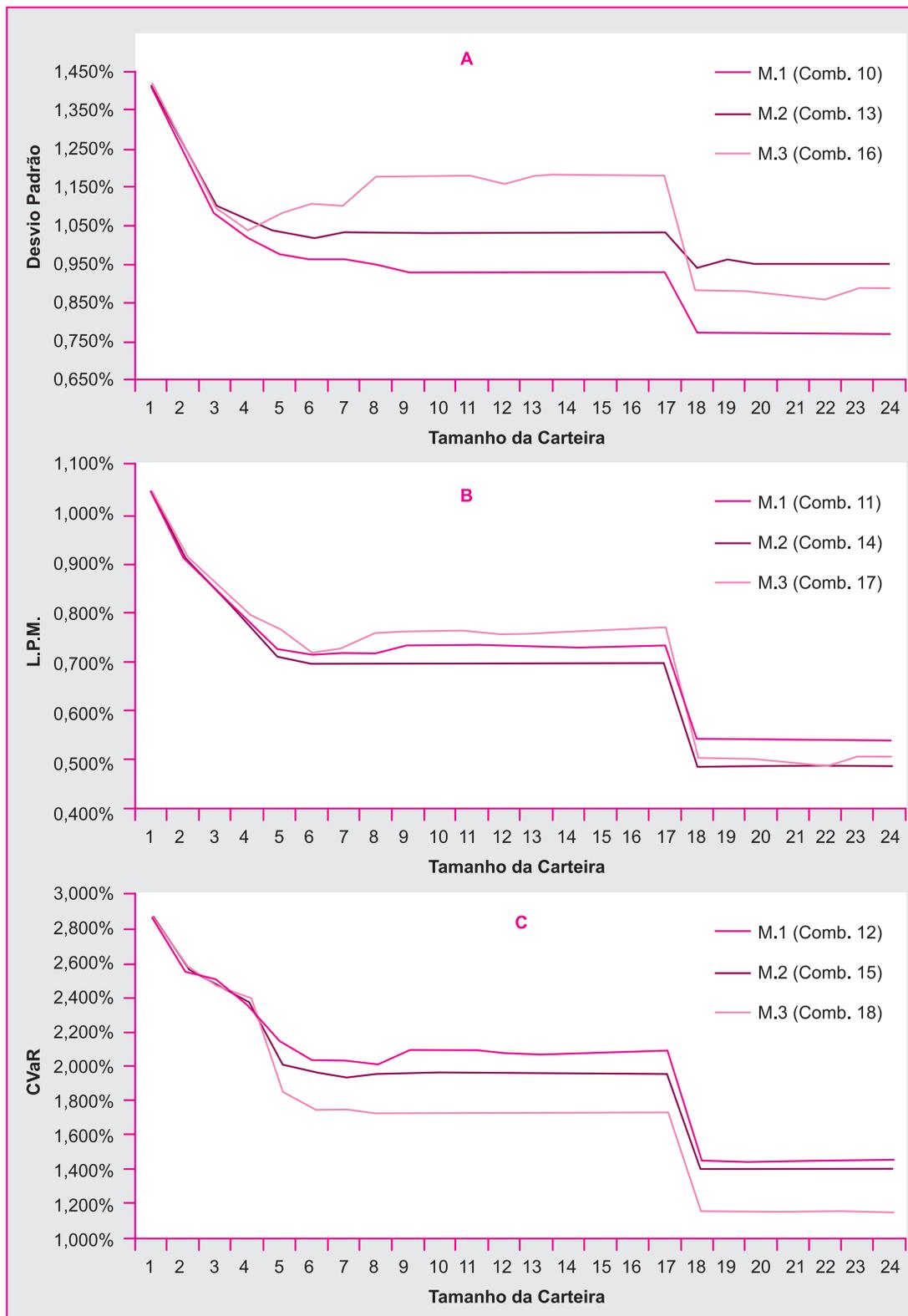


(A) Riscos mensurados pelo desvio padrão nos grupos com distribuição normal (1º semestre 2012)

(B) Riscos mensurados pelo LPM nos grupos com distribuição normal (1º semestre 2012)

(C) Riscos mensurados pelo CVaR nos grupos com distribuição normal (1º semestre 2012)

Figura 5: Comparações entre as Medidas de Risco nas Carteiras com Distribuição Normal



(A) Riscos mensurados pelo desvio padrão com distribuição não normal (1º semestre 2012)
 (B) Riscos mensurados pelo LPM nos grupos com distribuição não normal (1º semestre 2012)
 (C) Riscos mensurados pelo CVaR nos grupos com distribuição não normal (1º semestre 2012)

Figura 6: Comparações entre as Medidas de Risco nas Carteiras com Distribuição Não Normal

Tabela 1

Comparação das Distribuições dos Retornos dos Modelos M.1 e M.2

Distribuição			Normal				Não Normal		
Ano	Semestre	Modelos	<i>n</i>	Teste <i>F</i>	Mediana	Teste 1 (<i>p</i>) ¹	<i>n</i>	Mediana	Teste 2 (<i>p</i>) ²
2006	1	M.1	22	<i>F</i> = 0,603	-0,025%	0,001	20	0,114%	0,000
2006	1	M.2	22	<i>p</i> = 0,422	0,054%		20	0,135%	
2006	2	M.1	23	<i>F</i> = 0,609	0,172%	0,001	21	0,175%	0,000
2006	2	M.2	23	<i>p</i> = 0,457	0,242%		21	0,184%	
2007	1	M.1	20	<i>F</i> = 0,639	0,164%	0,001	28	0,161%	0,000
2007	1	M.2	20	<i>p</i> = 0,619	0,215%		28	0,254%	
2007	2	M.1	30	<i>F</i> = 0,619	0,024%	0,001	18	-0,018%	0,000
2007	2	M.2	30	<i>p</i> = 0,516	0,230%		18	0,020%	
2008	1	M.1	15	<i>F</i> = 0,644	-0,163%	0,001	33	0,052%	0,000
2008	1	M.2	15	<i>p</i> = 0,658	-0,056%		33	0,081%	
2008	2	M.1	3*				45	-0,119%	0,000
2008	2	M.2	3				45	-0,108%	
2009	1	M.1	22	<i>F</i> = 0,670	0,161%	0,001	26	0,299%	0,000
2009	1	M.2	22	<i>p</i> = 0,816	0,167%		26	0,321%	
2009	2	M.1	18	<i>F</i> = 0,643	0,188%	0,001	30	0,235%	0,000
2009	2	M.2	18	<i>p</i> = 0,641	0,218%		30	0,327%	
2010	1	M.1	27	<i>F</i> = 0,607	0,014%	0,001	21	0,047%	0,000
2010	1	M.2	27	<i>p</i> = 0,457	0,077%		21	0,077%	
2010	2	M.1	25	<i>F</i> = 0,651	0,207%	0,001	23	0,136%	0,000
2010	2	M.2	25	<i>p</i> = 0,679	0,239%		23	0,158%	
2011	1	M.1	31	<i>F</i> = 0,618	0,044%	0,001	17	0,075%	0,000
2011	1	M.2	31	<i>p</i> = 0,506	0,084%		17	0,120%	
2011	2	M.1	15	<i>F</i> = 0,637	0,071%	0,001	33	0,110%	0,000
2011	2	M.2	15	<i>p</i> = 0,591	0,118%		33	0,114%	
2012	1	M.1	24	<i>F</i> = 0,610	0,043%	0,001	24	0,105%	0,000
2012	1	M.2	24	<i>p</i> = 0,470	0,093%		24	0,199%	
2012	2	M.1	21	<i>F</i> = 0,563	0,089%	0,001	27	0,131%	0,000
2012	2	M.2	21	<i>p</i> = 0,254	0,199%		27	0,193%	
2013	1	M.1	17	<i>F</i> = 0,675	-0,027%	0,002	31	-0,024%	0,000
2013	1	M.2	17	<i>p</i> = 0,848	-0,017%		31	0,060%	
2013	2	M.1	19	<i>F</i> = 0,667	0,041%	0,001	29	0,094%	0,000
2013	2	M.2	19	<i>p</i> = 0,773	0,067%		29	0,181%	

Notas: ¹Teste *t* para amostras relacionadas. ²Teste de Wilcoxon para amostras relacionadas. Resultados baseados em 1.000 reamostragens.

*Amostra insuficiente para análises.

Tabela 2

Comparação das Distribuições dos Retornos dos Modelos M.1 e M.3

Distribuição			Normal				Não Normal		
Ano	Semestre	Modelos	<i>n</i>	Teste F	Mediana	Teste 1 (<i>p</i>) ¹	<i>n</i>	Mediana	Teste 2 (<i>p</i>) ²
2006	1	M.1	22	<i>F</i> = 0,576	-0,025%	0,001	20	0,114%	0,013
2006	1	M.3	22	<i>p</i> = 0,313	0,039%		20	0,142%	
2006	2	M.1	23	<i>F</i> = 0,615	0,172%	0,005	21	0,175%	0,001
2006	2	M.3	23	<i>p</i> = 0,501	0,192%		21	0,200%	
2007	1	M.1	20	<i>F</i> = 0,588	0,164%	0,05	28	0,161%	0,000
2007	1	M.3	20	<i>p</i> = 0,365	0,202%		28	0,202%	
2007	2	M.1	30	<i>F</i> = 0,595	0,024%	0,001	18	-0,018%	0,354
2007	2	M.3	30	<i>p</i> = 0,403	0,187%		18	0,000%	
2008	1	M.1	15	<i>F</i> = 0,658	-0,163%	0,003	33	0,052%	0,004
2008	1	M.3	15	<i>p</i> = 0,745	-0,085%		33	0,023%	
2008	2	M.1	3*				45	-0,119%	0,000
2008	2	M.3	3				45	-0,076%	
2009	1	M.1	22	<i>F</i> = 0,643	0,161%	0,001	26	0,299%	0,000
2009	1	M.3	22	<i>p</i> = 0,652	0,181%		26	0,301%	
2009	2	M.1	18	<i>F</i> = 0,566	0,188%	0,002	30	0,235%	0,001
2009	2	M.3	18	<i>p</i> = 0,325	0,261%		30	0,349%	
2010	1	M.1	27	<i>F</i> = 0,608	0,014%	0,001	21	0,047%	0,380
2010	1	M.3	27	<i>p</i> = 0,471	0,063%		21	0,057%	
2010	2	M.1	25	<i>F</i> = 0,625	0,207%	0,001	23	0,136%	0,001
2010	2	M.3	25	<i>p</i> = 0,523	0,210%		23	0,146%	
2011	1	M.1	31	<i>F</i> = 0,630	0,044%	0,001	17	0,075%	0,016
2011	1	M.3	31	<i>p</i> = 0,573	0,063%		17	0,103%	
2011	2	M.1	15	<i>F</i> = 0,598	0,071%	0,612	33	0,110%	0,000
2011	2	M.3	15	<i>p</i> = 0,416	0,090%		33	0,077%	
2012	1	M.1	24	<i>F</i> = 0,603	0,043%	0,001	24	0,105%	0,000
2012	1	M.3	24	<i>p</i> = 0,455	0,070%		24	0,163%	
2012	2	M.1	21	<i>F</i> = 0,586	0,089%	0,005	27	0,131%	0,000
2012	2	M.3	21	<i>p</i> = 0,396	0,132%		27	0,178%	
2013	1	M.1	17	<i>F</i> = 0,648	-0,027%	0,171	31	-0,024%	0,000
2013	1	M.3	17	<i>p</i> = 0,687	-0,025%		31	0,016%	
2013	2	M.1	19	<i>F</i> = 0,597	0,041%	0,001	29	0,094%	0,000
2013	2	M.3	19	<i>p</i> = 0,391	0,106%		29	0,177%	

Notas: ¹Teste *t* para amostras relacionadas. ²Teste de Wilcoxon para amostras relacionadas. Resultados baseados em 1.000 reamostragens.

*Amostra insuficiente para análises.

Tabela 3

Comparação das Distribuições dos Retornos dos Modelos M.2 e M.3

Distribuição			Normal				Não Normal		
Ano	Semestre	Modelos	<i>n</i>	Teste <i>F</i>	Mediana	Teste 1 (<i>p</i>) ¹	<i>n</i>	Mediana	Teste 2 (<i>p</i>) ²
2006	1	M.2	22	<i>F</i> = 0,668	0,054%	0,580	20	0,135%	0,645
2006	1	M.3	22	<i>p</i> = 0,741	0,039%		20	0,142%	
2006	2	M.2	23	<i>F</i> = 0,707	0,242%	0,001	21	0,184%	0,175
2006	2	M.3	23	<i>p</i> = 0,841	0,192%		21	0,200%	
2007	1	M.2	20	<i>F</i> = 0,643	0,215%	0,015	28	0,254%	0,045
2007	1	M.3	20	<i>p</i> = 0,652	0,202%		28	0,202%	
2007	2	M.2	30	<i>F</i> = 0,672	0,230%	0,001	18	0,020%	0,009
2007	2	M.3	30	<i>p</i> = 0,691	0,187%		18	0,000%	
2008	1	M.2	15	<i>F</i> = 0,714	-0,056%	0,001	33	0,081%	0,000
2008	1	M.3	15	<i>p</i> = 0,885	-0,085%		33	0,023%	
2008	2	M.2	3*				45	-0,108%	0,000
2008	2	M.3	3				45	-0,076%	
2009	1	M.2	22	<i>F</i> = 0,671	0,167%	0,068	26	0,321%	0,004
2009	1	M.3	22	<i>p</i> = 0,823	0,181%		26	0,301%	
2009	2	M.2	18	<i>F</i> = 0,615	0,218%	0,371	30	0,327%	0,234
2009	2	M.3	18	<i>p</i> = 0,492	0,261%		30	0,349%	
2010	1	M.2	27	<i>F</i> = 0,702	0,077%	0,002	21	0,077%	0,000
2010	1	M.3	27	<i>p</i> = 0,710	0,063%		21	0,057%	
2010	2	M.2	25	<i>F</i> = 0,674	0,239%	0,001	23	0,158%	0,000
2010	2	M.3	25	<i>p</i> = 0,807	0,210%		23	0,146%	
2011	1	M.2	31	<i>F</i> = 0,714	0,084%	0,001	17	0,120%	0,002
2011	1	M.3	31	<i>p</i> = 0,793	0,063%		17	0,103%	
2011	2	M.2	15	<i>F</i> = 0,661	0,118%	0,098	33	0,114%	0,000
2011	2	M.3	15	<i>p</i> = 0,757	0,090%		33	0,077%	
2012	1	M.2	24	<i>F</i> = 0,692	0,093%	0,001	24	0,199%	0,000
2012	1	M.3	24	<i>p</i> = 0,795	0,070%		24	0,163%	
2012	2	M.2	21	<i>F</i> = 0,727	0,199%	0,001	27	0,193%	0,316
2012	2	M.3	21	<i>p</i> = 0,715	0,132%		27	0,178%	
2013	1	M.2	17	<i>F</i> = 0,670	-0,017%	0,019	31	0,060%	0,000
2013	1	M.3	17	<i>p</i> = 0,817	-0,025%		31	0,016%	
2013	2	M.2	19	<i>F</i> = 0,629	0,067%	0,001	29	0,181%	0,057
2013	2	M.3	19	<i>p</i> = 0,563	0,106%		29	0,177%	

Notas: ¹Teste *t* para amostras relacionadas. ²Teste de Wilcoxon para amostras relacionadas. Resultados baseados em 1.000 reamostragens.

*Amostra insuficiente para análises.

testes F , ainda é necessário avaliar o quanto de retorno cada carteira apresentou. Uma vez que o grau de risco é similar nos modelos, um investidor precisaria testar se os retornos tendem a ser iguais. Caso isso ocorra, certamente o comentário de Estrada (2008) pode ser mantido e difundido, caso contrário, realmente é necessário o procedimento para seleção de modelos de otimização.

4.1.2. Análises dos retornos

Após a análise dos riscos das carteiras, buscou-se verificar suas características quanto aos retornos; os principais resultados são apresentados nas Tabelas 1, 2, 3. Ao proceder à revisão bibliográfica a respeito de comparações entre os modelos que utilizaram como medida de risco o desvio padrão (M.1) e o LPM (M.2), verificou-se um grupo de pesquisadores que encontrou diferenças significativas entre os modelos – Rom e Ferguson (1994), Grootveld e Hallerbach (1999), Andrade (2006) e Nawrocki e Cumova (2010) –, e outro que não encontrou significância estatística – Brito Neto e Volkmer (2001), Konno *et al.* (2002), Jarrow e Zhao (2006) e Estrada (2008) –, conforme é visto na Figura 3.

No grupo que apresentou diferenças significativas, defende-se o domínio do modelo LPM em relação àquele que utiliza o desvio padrão (DP) como medida de risco, isto é, nas análises dos resultados, demonstrou-se que o modelo LPM apresenta retornos maiores em relação ao DP quando se deseja minimizar o risco. Entretanto, esses autores não testaram a igualdade de variâncias das carteiras formadas, o que é exibido no presente artigo.

As medianas dos retornos e os testes utilizados para verificar as diferenças entre os retornos são apresentados nas Tabelas 1, 2 e 3. A mediana foi escolhida para representar a centralidade da distribuição dos retornos, porque, no caso das distribuições não normais, a média não é um estimador eficiente para demonstrar a tendência central da distribuição de probabilidade, conforme citam Moretin e Bussab (2010).

Dado que as carteiras foram construídas pelas mesmas ações, mas utilizando métodos diferentes (por construção), existe correlação entre elas; desse modo, o uso de um teste que desconsidere esse efeito pode apresentar resultados viesados, conforme apresentam Moretin e Bussab (2010). Diante disso, no caso dos modelos estudados no conjunto de dados que aderiram à normalidade, foram realizados os testes t para amostras relacionadas. Para o conjunto de dados que não demonstrou distribuição normal, foram realizados os testes de Wilcoxon para amostras relacionadas.

Na Tabela 1, são visualizadas as análises dos retornos nos modelos M.1 e M.2. Percebe-se que em todos os semestres analisados, no caso dos retornos com distribuição normal, o modelo M.2 apresentou retornos superiores em relação ao M.1, sendo todos significativos. Para o caso das distribuições não normalmente distribuídas, observa-se que as medianas

dos retornos foram maiores quando estimadas nas carteiras formadas pelo modelo M.2, tendo esse resultado ocorrido em todos os semestres.

Diante desses resultados, dado que o modelo M.2 forma uma carteira que minimiza o risco mensurado pelo momento parcial inferior da distribuição de probabilidade e que essa carteira apresentou maiores retornos em relação àquela formada pelo modelo de Markowitz (modelo M.1), o presente trabalho pode ser adicionado ao grupo de estudos que afirma que o modelo de otimização de carteiras que utiliza o LPM apresenta retornos superiores àquele que utiliza o desvio padrão como medida de risco.

Quanto às comparações entre desvio padrão e CVaR, há os trabalhos de Rockafellar e Uryasev (2000) e Bertsimas *et al.* (2004). No primeiro, os autores apresentaram resultados em que os retornos praticamente não se diferenciavam. No segundo trabalho, ao verificarem as diferenças entre os retornos com distribuições simétricas e assimétricas, Bertsimas *et al.* (2004) complementam as análises.

Em suas pesquisas, Bertsimas *et al.* (2004) demonstraram que, no caso em que a distribuição foi simétrica, os retornos não se diferenciaram. Contudo, ao verificarem as assimétricas, o modelo baseado no CVaR apresentou retornos maiores, isto sugere que os investidores deveriam escolher o modelo baseado no CVaR para otimização de carteiras quando os retornos históricos dos ativos não apresentem aderência à normalidade.

Na Tabela 2, são demonstradas as comparações entre os modelos M.1 e M.3. Observa-se que em todos os semestres analisados o modelo M.3 apresentou medianas superiores ao M.1 para o grupo com distribuição normal, e em 14 períodos as diferenças foram significativas. No caso dos retornos não normalmente distribuídos, o modelo M.3 apresentou retornos superiores aos do modelo M.1 em 14 dos 16 períodos, mas em dois deles a diferença não foi significativa.

Percebem-se, nas análises, algumas diferenças nos resultados em relação ao estudo de Bertsimas *et al.* (2004). Enquanto esses autores demonstraram diferenças significativas somente no conjunto de retornos não normalmente distribuídos, no presente artigo houve diferenças significativas nos dois conjuntos de dados, tanto nas ações com normalidade dos retornos quanto naquelas com ausência de normalidade. Esses resultados também foram diferenciados em relação ao estudo de Araújo e Montini (2011), no qual o modelo que utilizou o desvio padrão como medida de risco apresentou maiores retornos no período analisado (2009 e 2010); no presente artigo, as carteiras analisadas pelo modelo que minimiza o CVaR apresentaram os maiores retornos.

Foram encontrados poucos trabalhos em que os modelos LPM e CVaR são comparados. O trabalho em que os resultados são detalhados é o de Konno *et al.* (2002). Em sua pesquisa, os autores demonstram que as diferenças entre ambos os modelos não foram significativas. Tais resultados foram justificados pelas características dos modelos, que buscam minimizar o risco

do lado inferior da distribuição de probabilidade dos retornos, variando somente a forma de estimação.

As comparações entre os modelos M.2 e M.3 são apresentadas na Tabela 3. No caso das distribuições normais, o modelo M.2 apresentou retornos maiores em todos os períodos. Contudo, em quatro deles as diferenças não foram significativas ao nível de 5%. No caso das distribuições não normais, em 12 semestres dos 16 analisados, o modelo M.2 apresentou superioridade quanto aos retornos, mas em somente um semestre a diferença não foi significativa. Esses resultados indicam que, apesar de os modelos buscarem minimizar o lado inferior das distribuições de probabilidade dos retornos, a forma de estimação pode alterar o comportamento das carteiras.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A necessidade de os investidores buscarem formas de comparar os modelos desenvolvidos para a otimização de carteiras, dado que o modelo de Markowitz (1952) foi revisado durante os anos, é muito importante para a tomada de decisão no mercado financeiro. Segundo Kato (2004), faltam trabalhos que auxiliem os investidores a escolherem qual modelo de otimização de carteiras deveria ser adotado na gestão de seus investimentos, principalmente na forma de como mensurar o risco financeiro da carteira.

Na literatura, foram revisadas algumas medidas de risco, como LPM (*Lower Partial Moment*) e CVaR (*Conditional Value-at-Risk*), cujas estimações foram facilitadas pela capacidade computacional da atualidade. Diante disso, as metodologias para comparação do desempenho de modelos de seleção de ativos formam a bases da *Post-Modern Portfolio Theory* (PMPT) (Rom & Ferguson, 1994; Grootveld & Hallerbach, 1999; Roman & Mitra, 2009).

Mediante a contextualização do trabalho, delimitaram-se os objetivos da pesquisa. No principal deles – Quais as características das carteiras de ações, quando utilizadas diferentes métricas para a mensuração de riscos, considerando-se retorno com distribuição normal e não normalmente distribuído? – propunha-se comparar as alocações de investimentos com uso de diferentes modelos de otimização, em cada um deles buscando-se minimizar as seguintes medidas de risco adotadas para análise: o desvio padrão, o momento parcial inferior e o valor em risco condicional.

A partir das análises, percebeu-se que os retornos das carteiras apresentaram características diferenciadas, dependendo do modelo de otimização utilizado e da medida de risco estimada. Essas diferenças foram observadas tanto para retornos com distribuição normal quanto para aqueles não normalmente distribuídos. Desse modo, esses resultados contrapõem-se às análises de Brito Neto e Volkmer (2001), Jarrow e Zhao (2006) e Estrada (2008), segundo as quais seria indiferente a escolha de algum modelo de otimização, baseando-se em alguma medida

de risco específica. Portanto, selecionar de forma adequada a medida de risco durante o processo de otimização de carteiras é uma tarefa necessária na atividade de análise de investimentos e gestão de carteiras.

Discutida a importância de preocupar-se com os modelos de otimização para aferir riscos e retornos, sua necessidade na análise de investimentos foi comprovada do ponto de vista estatístico. Do ponto de vista prático, no artigo apresenta-se uma metodologia em que programadores podem desenvolver uma rotina automatizada, que não compromete a adoção, tanto por analistas quanto por investidores, de ferramentas robustas para tomadas de decisões. Com o advento dos algoritmos para a realização de negócios em alta frequência, esse tipo de rotina pode até ser realizada em tempo real sem prejuízo do tempo necessário para as tomadas de decisões por esses atores.

Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se avaliar os comportamentos dos modelos de otimização e as medidas de mensuração de risco em outros espaços de tempo, como subdivisões anuais, mensais ou trimestrais. Isso se torna importante para verificar a robustez dessas medidas para períodos de tempo maiores ou menores. Como exemplos, Jarrow e Zhao (2006) realizaram simulações diárias para o horizonte de tempo de um ano, e no presente artigo utilizaram-se períodos semestrais; portanto, sugere-se a verificação dos métodos em espaços de tempo diferentes.

Outra recomendação para trabalhos futuros seria incluir outros tipos de ativos, como renda fixa e câmbio. Essa inclusão é importante porque, tanto no presente artigo quanto no artigo de Konno *et al.* (2002), foi utilizado somente retorno de ações para comparar as medidas de risco. Comparar os métodos contendo esses outros tipos de ativos é uma contribuição importante para a literatura, pois possibilita a utilização de ativos diferenciados na comparação entre as medidas de momento parcial inferior e valor em risco condicional.

No presente artigo, contribuiu-se, de forma relevante, para aprofundar a discussão levantada por Estrada (2008), segundo a qual não importa a medida de risco na seleção de ativos. Neste trabalho, foram obtidos resultados que mostram a grande importância de escolher a métrica adequada na otimização de carteira de ações.

Como pode ser visto na Figura 2, este artigo também contribui de forma relevante nos seguintes aspectos:

- no Brasil, não havia trabalhos em que as medidas desvio padrão, LPM e CVaR tivessem sido discutidas no mesmo artigo;
- no mundo, essas três medidas não foram comparadas num mesmo estudo em carteiras de ações contendo normalidade e não normalidade.

Como contribuição prática, os gestores de carteiras podem utilizar a metodologia apresentada para avaliar seus resultados num ambiente dinâmico. ♦

- Aharony, J., & Loeb, M. (1977, June). Mean-variance v.s. stochastic dominance: some empirical findings on efficient sets. *Journal of Banking and Finance*, 1(1), 95-102. DOI: 10.1016/0378-4266(77)90020-6
- Alexander, C. (2008). *Market risk analysis volume IV: Value at risk models*. London: John Wiley & Sons.
- Andrade, F. W. M. (2006, abril/junho). Alocação de ativos no mercado acionário brasileiro segundo o conceito de *downside risk*. *Revista de Gestão USP*, 13(2), 27-36.
- Araújo, A. C. (2012). *Comparação entre métricas de risco para otimizar carteiras de investimentos em ações*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Administração, Departamento de Administração, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, SP, Brasil.
- Araújo, A. C., & Montini, A. A. (2011). Teoria do portfólio: comparações entre modelos alternativos para alocação de recursos em ativos de risco. *Anais do Encontro Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração*, 35, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Araújo, A. C., Montini, A. A., & Securato, J. R. (2010). Teoria do portfólio pós-moderna: um estudo sobre a semivariância. *Anais dos Seminários em Administração – Semead*. São Paulo, SP, Brasil, 13.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J., & Heath, D. (1999, July). *Coherent measures of risk*. *Mathematical Finance*, 9(3), 203-228. DOI: 10.1111/1467-9965.00068
- Bernstein, P. L. (1996). *Against the gods: the remarkable story of risk*. New York: John Wiley and Sons.
- Bertsimas, D., Lauprete, G., & Samarov, A. (2004). Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 28(7), 1353-1381. DOI: 10.1016/S0165-1889(03)00109-X
- Brito Neto, C. T., & Volkmer, J. F. (2001). As carteiras de investimento e a semivariância. *Anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção – Enegep*, 21, Salvador, BA, Brasil.
- Brooks, C. (2008). *Introductory econometrics for finance* (2nd ed.). New York: Cambridge University Press.
- Broussard, J. P., & Vaihekoski, M. (2012). Profitability of pairs trading strategy in an illiquid market with multiple share classes. *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money*, 22, 1188-1201. DOI: 10.1016/j.intfin.2012.06.002
- Cassarotto Filho, N., & Kopitke, B. H. (1998). *Análise de investimentos: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial* (8a ed.). São Paulo: Atlas.
- Caldeira, J. F., & Moura, G. V. (2013). *Selection of a portfolio of pairs based on cointegration: a statistical arbitrage strategy*. *Revista Brasileira de Finanças*, 11(1), 49-80. DOI: 10.2139/ssrn.2196391
- Clemen, R. T., & Reilly, T. (2001). *Making hard decisions with decision tools* (2nd ed.). Duxbury, USA: Thompson Learning.
- Costa, O. L. V., & Assunção, H. G. V. (2005). *Análise de risco e retorno em investimentos financeiros*. São Paulo: Manole.
- Domar, E., & Musgrave, R. A. (1944, May). Proportional income taxation and risk taking. *Quarterly Journal of Economics*, 58(3), 388-422. DOI: 10.2307/1882847
- Efron, B., & Tibshirami, R. J. (1993). *An introduction to the bootstrap*. New York: Chapman & Hall.
- Estrada, J. (2002). Systematic risk in emerging markets: the D-CAPM. *Emerging Markets Review*, 3(4), 365-379. DOI: 10.1016/S1566-0141(02)00042-0
- Estrada, J. (2006, Winter). Downside risk in practice. *Journal of Applied Corporate Finance*, 18(1), 117-125. DOI: 10.1111/j.1745-6622.2006.00080.x
- Estrada, J. (2007). Mean-semivariance behavior: Downside risk and capital asset pricing. *International Review of Economics and Finance*, 16(2), 169-185. DOI: 10.1016/j.iref.2005.03.003
- Estrada, J. (2008, Spring-Summer). Mean-semivariance optimization: A heuristic approach. *Journal of Applied Finance*, 18(1), 57-72. DOI: 10.2139/ssrn.1028206
- Fortunato, G. X., Motta, L. F. J., & Russo, G. (2010, janeiro-fevereiro). Custo de capital próprio em mercados emergentes: uma abordagem empírica no Brasil com o *downside risk*. *Revista de Administração Mackenzie - RAM*, 11(1), 92-116.
- Grootveld, H., & Hallerbach, W. (1999). Variance vs downside risk: is there really that much difference? *European Journal of Operational Research*, 114(2), 304-319. DOI: 10.1016/S0377-2217(98)00258-6
- Hadar, J., & Russell, W. R. (1969, March). Rules for ordering uncertain prospects. *The American Economic Review*, 59(1), 25-34.
- Jarrow, R., & Zhao, F. (2006, April). Downside loss aversion and portfolio management. *Management Science*, 52(4), 558-566. DOI: 10.1287/mnsc.1050.0486
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1979, March). An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47(2), 263-291. DOI: 10.2307/1914185
- Kato, F. H. (2004). *Análise de carteiras em tempo discreto*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, SP, Brasil.

- Keynes, J. M. (1937). *The general theory of employment interest and money*. London: Macmillan.
- Konno, H., Waki, H., & Yuuki, A. (2002). Portfolio optimization under lower partial risk measures. *Asia-Pacific Financial Markets*, 9(2), 127-140.
- Lintner, J. (1965, February). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics*, 47(1), 13-37.
DOI: 10.2307/1924119
- Lucena, P., & Figueiredo, A. C. (2008, maio-agosto). Prevendo retornos de ações através de movimentos passados: uma modificação no modelo de Grinblatt e Moskowitz. *Revista Eletrônica de Administração – REAd*, 14(2).
- Lucena, P., & Motta, L. F. J. (2004, setembro-outubro). Aplicação de um novo modelo de análise de risco na Bovespa: o D-CAPM. *Revista Eletrônica de Administração – REAd*, 10(5), 1-13.
- Luenberger, D. G. (1998). *Investment science*. New York: Oxford University Press.
- Markowitz, H. M. (1952, March). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
DOI: 10.2307/2975974/ e DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x
- Montini, A. A. (2003). *Análise bayesiana da volatilidade da distribuição dos retornos de ativos financeiros e otimização do valor em risco condicional – CVaR*. Tese de Doutorado, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, SP, Brasil.
- Moretin, P. A., & Bussab, W. O. (2010). *Estatística básica* (6a ed.). São Paulo: Saraiva.
- Nawrocki, D. (1999, Fall). A brief history of downside risk measures. *Journal of Investing*, 8(3), 9-25.
DOI: 10.3905/joi.1999.319365
- Nawrocki, D., & Cumova, D. (2010). A symmetric LPM model for heuristic mean-semivariance analysis. *Journal of Economics Business*, 63(3), 217-236.
DOI: 10.1016/j.jeconbus.2011.01.004
- Ribeiro, C. O., Ferreira, F. A. C., & Santos, B. L. M. (2007). O valor em risco condicional na otimização de carteiras com derivativos. *Anais do Encontro Nacional de Engenharia de Produção*, 27, Foz do Iguaçu, PR, Brasil.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21-41.
- Rom, B. M., & Ferguson, K. W. (1994, Fall). Post-modern portfolio theory comes of age. *Journal of Investing*, 3(3), 11-17.
DOI: 10.3905/joi.3.3.11
- Roman, D., & Mitra, G. (2009, April). Portfolio selection models: a review and new directions. *Wilmott Journal*, 1(2), 69-85.
DOI: 10.1002/wilj.4
- Rubesam, A., & Beltrame, A. L. (2013). Carteira de mínima variância no Brasil. *Revista Brasileira de Finanças*, 11(1), 81-118.
- Saito, A. T., Savoia, J. R. & Famá, R. (2006). A evolução da função financeira. *Revista de Gestão USP - Rege USP*, 13(número especial), 31-44.
- Sharpe, W. F. (1964, September). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425-442.
DOI: 10.2307/2977928
- Sing, T., & Ong, S. (2000). Asset allocation in a downside risk framework. *Journal of Real Estate Portfolio Management*, 6(3), 213-223.
- Souza, L. A. R. (1999). *Valor em risco em épocas de crise*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, SP, Brasil.
- Tetens, J. N. (1789). *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften*. Leipzig: Weidmanns Erben und Ruch.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *Review of Economic Studies*, 25(2), 65-86.
DOI: 10.2307/2296205
- Varian, H. R. (2006). *Microeconomia: conceitos básicos*. Rio de Janeiro: Elsevier.

Analysis of risk metrics in share portfolio optimization

Markowitz and Sharpe's studies formed the basis of the so-called Modern Portfolio Theory. Over the years, their papers were reviewed and alternative measures for portfolios optimization were presented. In view of this fact, there is a need to evaluate what are the differences between these measures. According to Roman and Mitra, this problem constitutes a new phase of studies, called Post-Modern Portfolio Theory. The purpose of this article is to compare the optimization models using risk measures such as standard deviation (SD), lower partial moment (LPM) and conditional value at risk (CVaR) to study their different forms of allocations in portfolios comprised of stocks traded on the BM&FBovespa. The article is divided into two stages: the first begun with the selection of risk measures and

ABSTRACT

the definition of the analysis period; in the second stage, there was the division of assets according to the shape of the probability distribution of returns, with a group of stocks with returns normally distributed and another group of stocks with returns without normal distribution. As for risk measures, tests showed similar characteristics between models; as for the returns, the models that minimized LPM and CVaR showed superior results compared to the SD. Such results are relevant because they oppose the studies according to which there are no significant differences between the models.

Keywords: portfolio theory, downside risk, value-at-risk.

RESUMEN

Análisis de métricas de riesgo en la optimización de carteras de acciones

Los estudios de Markowitz y Sharpe formaron las bases de la Teoría Moderna del Portafolio. Los trabajos de estos autores fueron revisados y medidas alternativas para la formación de carteras fueron propuestas. Así, hay una necesidad de evaluar qué diferencias existen entre dichas medidas. Según Roman y Mitra, este problema constituye una nueva fase de estudios denominada Teoría Postmoderna de Portafolio. El objetivo en este artículo es comparar los modelos de optimización con la utilización de las medidas de riesgo de desviación estándar (DE), momento parcial inferior (LPM) y valor en riesgo condicional (CVaR) para estudiar las diferentes formas de asignación en carteras de acciones negociadas en la BM&FBovespa. El trabajo se divide en dos partes, en la primera, se llevó a cabo la selección de las medidas de riesgo y la definición del periodo de análisis; en la segunda, se dividieron los activos de acuerdo con la distribución de probabilidad de los rendimientos, un grupo compuesto por acciones con retornos normalmente distribuidos y otro grupo por acciones con rendimientos que no tienen distribución normal. En cuanto a las medidas de riesgo, las pruebas presentaron características similares entre los modelos; en relación con los retornos, los modelos que minimizaron el LPM y el CVaR demostraron resultados superiores en comparación con la DE. Estos resultados son relevantes porque ponen en contraposición los trabajos que defienden la no existencia de diferencias significativas entre los modelos.

Palabras clave: teoría del portafolio, *downside risk*, valor en riesgo.

RAUSP
Revista de Administração

Visite o site da RAUSP. Acadêmicos e profissionais ligados ao estudo da Administração podem contar com essa importante ferramenta de pesquisa.

Pesquise, envie seu artigo, entre em contato com a RAUSP.

www.rausp.usp.br

RAUSP

