

UMA APROXIMAÇÃO DA FRONTEIRA EFICIENTE PARA UM PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO HIERÁRQUICO DE MÁXIMA COBERTURA

Luis Gonzalo Acosta Espejo

Depto. Industrias / Facultad de Ingeniería

Universidad de Tarapacá

Arica – Chile

lacosta@uta.cl

Roberto Diéguez Galvão *

Programa de Engenharia de Produção / COPPE

Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Rio de Janeiro – RJ

galvao@pep.ufrj.br

* *Corresponding author*/autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 12/2003; aceito em 03/2004

Received December 2003; accepted March 2004

Resumo

Este artigo considera uma extensão de um problema hierárquico de localização de máxima cobertura, na qual as coberturas para os dois níveis de serviço oferecidos são maximizadas independentemente. Apresentamos o modelo matemático e buscamos obter uma aproximação para a fronteira eficiente do problema bi-objetivo correspondente. O modelo bi-objetivo é resolvido através do método das ponderações, utilizando-se uma heurística lagrangeana. Os resultados mostram que as soluções geradas pela mesma fornecem uma aproximação da fronteira eficiente, incluindo soluções eficientes “suportadas” e “não-suportadas”.

Palavras-chave: localização hierárquica multi-objetivo; heurística lagrangeana; fronteira eficiente.

Abstract

This paper addresses an extension of an hierarchical covering location problem, in which the covers for the two levels of service are maximized independently. We present the mathematical model and seek an approximation for the efficient frontier of the corresponding bi-objective problem. The bi-objective model is solved by the weighting method, through a lagrangean heuristic. The computational results show that the solutions generated by this heuristic provide an approximation of the efficient frontier, including supported and non-supported efficient solutions.

Keywords: multi-objective hierarchical location; lagrangean heuristic; efficient frontier.

1. Introdução

No processo de solução dos problemas multi-objetivo uma das atividades a ser realizada é a determinação da fronteira eficiente. Esta fronteira é definida pelo conjunto das soluções eficientes ou não dominadas. Uma solução é eficiente ou não dominada se uma melhora em um dos objetivos pode ser conseguida unicamente em detrimento de pelo menos um dos outros objetivos; o leitor interessado em aprofundar os conceitos sobre problemas multi-objetivo pode consultar, por exemplo, Steuer (1986).

Na literatura especializada podem ser encontrados diversos métodos que permitem determinar a fronteira eficiente em sua totalidade, ou, caso este processo seja computacionalmente caro, buscar uma aproximação para a mesma. Um dos fatores que influencia o processo de busca da fronteira eficiente é o tipo de problema multi-objetivo tratado: problema linear multi-objetivo ou problema combinatório multi-objetivo. Estes problemas podem ser considerados extensões dos problemas de programação linear ou dos problemas combinatórios correspondentes.

Para solucionar problemas combinatórios multi-objetivo freqüentemente utilizam-se métodos desenvolvidos para problemas lineares multi-objetivo. Nem sempre estes métodos podem no entanto ser diretamente aplicados para solucionar problemas combinatórios multi-objetivo. Um exemplo deste tipo de situação é o uso do método das ponderações para determinar a fronteira eficiente de um problema combinatório multi-objetivo. Nos problemas combinatórios o método das ponderações encontra unicamente um subconjunto das soluções eficientes, chamadas de *soluções eficientes “suportadas”*. Há no entanto um subconjunto das soluções eficientes que o método das ponderações não consegue encontrar, denominadas de *soluções eficientes “não suportadas”*.

Neste trabalho propomo-nos utilizar soluções geradas durante o processo de busca da solução ótima do dual lagrangeano para encontrar uma aproximação da fronteira eficiente de um problema combinatório, incluindo as soluções eficientes “suportadas” e “não suportadas”. Esta estratégia é utilizada para encontrar uma aproximação da fronteira eficiente para uma extensão do Problema de Localização Hierárquico de Máxima Cobertura (HCLP), na qual coberturas para os dois níveis de serviço são maximizadas independentemente.

Na próxima seção apresentamos o modelo HCLP de Moore & ReVelle (1982) e a extensão bi-objetivo correspondente (BHCLP). Existem diversos métodos para resolver problemas combinatórios multi-objetivo, com especial ênfase no uso dos métodos das ponderações e das restrições; isto é visto na Seção 3. Na Seção 4 descrevemos a metodologia utilizada para encontrar uma aproximação da fronteira eficiente para o BHCLP. Os resultados computacionais obtidos com esta metodologia são mostrados na Seção 5. A Seção 6 contém as conclusões do artigo.

2. Problemas de Localização Hierárquicos

Um problema de localização hierárquico consiste em determinar simultaneamente a combinação apropriada de níveis (ou tipos) de serviços e o local onde esses conjuntos de serviços devem ser instalados (formando uma facilidade), e realizar a atribuição dos pontos de demanda às facilidades. Mirchandani (1987) e Eitan *et al.* (1991) descrevem um enfoque generalizado para modelar problemas de localização hierárquicos. Narula (1984) propõe um esquema de classificação para esses problemas.

Na literatura existem diversos modelos matemáticos desenvolvidos para problemas de localização hierárquicos. Exemplos destes tipos de modelos podem ser encontrados em Narula & Ogbu (1985), Alminyana *et al.* (1998), Galvão *et al.* (2002), Boffey *et al.* (2003). Modelos do tipo Máxima Cobertura buscam maximizar a população coberta, sujeito a restrições de cobertura. Ver por exemplo Moore & ReVelle (1982), Church & Eaton (1987), Rahman & Smith (1999), Branas & ReVelle (2001), Jayaraman *et al.* (2003). Serra *et al.* (1992) e Miliotis *et al.* (2002) tratam de problemas hierárquicos em um ambiente competitivo.

2.1 O Problema de Localização Hierárquico de Máxima Cobertura (HCLP)

Moore & ReVelle (1982) descreveram um sistema com localização hierárquica da seguinte maneira. Considere um sistema que fornece k níveis de serviços e que possui k níveis de facilidades. Neste sistema um nível de serviço s está disponível somente em uma facilidade de nível igual ou maior que s . O problema a ser resolvido é o de localizar um dado número de facilidades, para cada um dos k níveis definidos, de maneira que se maximize a população com acesso a todos os k níveis de serviço.

No caso de facilidades de dois níveis, uma área de demanda é considerada coberta se ela tem acesso, dentro das distâncias de serviço pré-definidas, a ambos os níveis de serviço, nível 1 e nível 2. As distâncias críticas dos serviços definidas por Moore & ReVelle (1982) são diferentes para os dois níveis de serviço, e as distâncias críticas para o serviço de nível 1 são diferentes para os dois tipos de facilidades.

Moore & ReVelle (1982) formularam o problema como um problema de programação 0-1. A seguir apresenta-se a formulação deste problema de localização hierárquico de dois níveis.

Sejam:

$J = \{1, \dots, m\}$ conjunto de áreas de demanda;

$I = \{1, \dots, n\}$ conjunto de locais onde as facilidades podem ser instaladas;

f_j : população da área de demanda $j \in J$;

R_1 : distância crítica para o serviço de nível 1 oferecido pela facilidade de nível 1;

T_1 : distância crítica para o serviço de nível 1 oferecido pela facilidade de nível 2;

R_2 : distância crítica para o serviço de nível 2 (oferecido apenas pela facilidade de nível 2);

$a_{ij} = 1$ se a área de demanda $j \in J$ puder ser coberta pelo nível de serviço 1 (dentro da distância crítica R_1), oferecido pela facilidade de nível 1 localizada em $i \in I$ ($a_{ij} = 0$ caso contrário);

$b_{ij} = 1$ se a área de demanda $j \in J$ puder ser coberta pelo nível de serviço 1 (dentro da distância crítica T_1), oferecido pela facilidade de nível 2 localizada em $i \in I$ ($b_{ij} = 0$ caso contrário);

$c_{ij} = 1$ se a área de demanda $j \in J$ puder ser coberta pelo nível de serviço 2 (dentro da distância crítica R_2), oferecido pela facilidade de nível 2 localizada em $i \in I$ ($c_{ij} = 0$ caso contrário);

p : número de facilidades de nível 1 a serem localizadas;

q : número de facilidades de nível 2 a serem localizadas;

$x_j = 1$ se a área de demanda $j \in J$ é coberta ($x_j = 0$ caso contrário);

$y_i = 1$ se uma facilidade de nível 1 é localizada em $i \in I$ ($y_i = 0$ caso contrário);

$z_i = 1$ se uma facilidade de nível 2 é localizada em $i \in I$ ($z_i = 0$ caso contrário).

Por hipótese as facilidades de nível superior são as mais atraentes; assume-se portanto que $R_1 < T_1 < R_2$. Utilizando esta nomenclatura o modelo matemático para o HCLP pode ser escrito como:

(HCLP)

$$v(\text{HCLP}) = \text{Max} \left\{ \sum_{j \in J} f_j x_j \right\} \quad (1)$$

sujeito a

$$\sum_{i \in I} a_{ij} y_i + \sum_{i \in I} b_{ij} z_i - x_j \geq 0, j \in J; \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} c_{ij} z_i - x_j \geq 0, j \in J; \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p; \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I} z_i = q; \quad (5)$$

$$x_j \in \{0,1\}, j \in J; \quad (6)$$

$$y_i, z_i \in \{0,1\}, i \in I. \quad (7)$$

A função objetivo a ser maximizada representa a população total coberta pelos serviços de níveis 1 e 2. As restrições (2) estabelecem que uma área de demanda $j \in J$ é coberta pelo serviço de nível 1 se existe pelo menos **ou** uma facilidade de nível 1 a menos de uma distância R_1 **e/ou** uma facilidade de nível 2 a menos de uma distância T_1 . As restrições (3) estabelecem que uma área de demanda $j \in J$ é coberta pelo serviço de nível 2 se existe pelo menos uma facilidade de nível 2 a menos de uma distância R_2 . A restrição (4) limita em p o número de facilidades de nível 1 e a restrição (5) em q o número de facilidades de nível 2 na solução do problema. As restrições (6) e (7) definem a natureza 0-1 das variáveis de decisão.

Moore & ReVelle (1982) resolveram o problema utilizando a relaxação de programação linear da formulação acima. Nos casos em que é obtida uma solução fracionária, os autores recomendam que se obtenha uma solução ótima por inspeção ou utilizando um algoritmo *branch-and-bound*. Os resultados computacionais reportados pelos autores são para uma rede de dados criada com as províncias de Honduras. Em seus experimentos computacionais os autores não reportaram o uso de algoritmo *branch-and-bound*.

O HCLP foi tratado recentemente por Espejo (2001) e Espejo *et al.* (2003); os autores desenvolveram uma relaxação combinada Lagrangeana-*surrogate* para o mesmo, que possui como casos especiais a relaxação Lagrangeana e a relaxação *surrogate*. Heurísticas com base no método dos subgradientes foram desenvolvidas para resolver as diferentes relaxações. Testes computacionais foram realizados com problemas variando de 55 a 700 vértices disponíveis na literatura. Os autores relataram que a média dos *gaps* obtidos para os problemas teste não difere significativamente entre as diversas relaxações utilizadas, para o mesmo conjunto de problemas. Os tempos computacionais foram relativamente baixos, inclusive para os problemas de 700 vértices.

2.2 O Problema Bi-objetivo de Localização Hierárquica de Máxima Cobertura (BHCLP)

Observe-se que Moore & ReVelle (1982) definem a cobertura de uma área de demanda em termos de acesso ao serviço e não em termos de acesso à facilidade. No modelo HCLP uma área de demanda é considerada coberta se ela puder ser coberta pelos dois níveis de serviço.

Neste artigo considera-se a variação do HCLP em que busca-se maximizar em separado a cobertura pelo serviço de nível 1 e pelo serviço de nível 2. Com esta finalidade foi definido um modelo bi-objetivo (*Bi-objetive Hierarchical Covering Location Problem*, BHCLP), com o objetivo de maximizar a cobertura para ambos os níveis de serviço.

Na formulação matemática do BHCLP é utilizada a mesma nomenclatura que no HCLP, exceto pela re-definição da variável x_j e pela inclusão da variável w_j . No BHCLP, $x_j = 1$ se a área de demanda j é coberta pelo serviço de nível 1 ($x_j = 0$ caso contrário) e $w_j = 1$ se a área de demanda j é coberta pelo serviço de nível 2 ($w_j = 0$ caso contrário). A formulação matemática correspondente é dada a seguir:

(BHCLP)

$$v(\text{BHCLP}) = \text{Max} \left\{ \sum_{j \in J} f_j x_j \right\}, \quad (8)$$

$$\text{Max} \left\{ \sum_{j \in J} f_j w_j \right\} \quad (9)$$

sujeito a (4)-(7) e

$$\sum_{i \in I} a_{ij} y_i + \sum_{i \in I} b_{ij} z_i - x_j \geq 0, \quad j \in J; \quad (10)$$

$$\sum_{i \in I} c_{ij} z_i - w_j \geq 0, \quad j \in J; \quad (11)$$

$$w_j \in \{0,1\}, \quad j \in J. \quad (12)$$

As funções objetivo (8) e (9) maximizam a população total coberta pelos serviços de níveis 1 e 2, respectivamente. As restrições (10) e (11) têm a mesma interpretação que as restrições (2) e (3), com a única diferença que no modelo BHCLP se utiliza uma variável diferente para cada tipo de cobertura. As restrições (12) definem a natureza binária das variáveis de decisão w_j .

3. Métodos de Solução para Problemas Combinatórios Multi-Objetivo

Existem diversos métodos para resolver problemas combinatórios multi-objetivo. Uma revisão dos mesmos pode ser encontrada, por exemplo, em Ehrgott (2000) e Ehrgott & Gandibleux (2000). Uma revisão do uso de metaheurísticas para resolver problemas combinatórios multi-objetivo pode ser encontrada em Hansen (1998). Teghem & Kunsch (1986) fazem uma revisão dos métodos para resolver problemas inteiros multi-objetivo em geral e Rasmussen (1986) faz uma revisão correspondente para problemas binários.

Dois métodos freqüentemente usados para resolver problemas multi-objetivo, tanto lineares como combinatórios, são o método das ponderações e o método das restrições; uma descrição desses métodos pode ser encontrada em Steuer (1986).

Seja o problema de programação linear multi-objetivo $Max \{g_1(x), g_2(x), \dots, g_q(x) \mid Ax \leq b; x \geq 0\}$, onde $g_1, g_2, \dots, g_q: R^n \rightarrow R, A \in R^{m \times n}, b \in R^m$ e $x \in R^n$. Encontrar uma solução eficiente para este problema usando o método das ponderações implica em resolver o seguinte

problema de programação linear paramétrico: $Max \left\{ \sum_{j=1}^q \pi_j g_j(x) \mid Ax \leq b, x \geq 0 \right\}$, onde

$\sum_{j=1}^q \pi_j = 1, \pi_j > 0, j = 1, \dots, q$. Para cada vetor de pesos $\pi_j, j = 1, \dots, q$, se obtém uma solução

eficiente para o problema linear multi-objetivo. Variando portanto o vetor dos pesos pode-se gerar toda a fronteira eficiente, ou uma aproximação da mesma.

No método das restrições se otimiza uma das funções objetivo e as funções objetivo restantes são adicionadas ao conjunto de restrições. Neste método o problema paramétrico a ser

resolvido é: $Max \left\{ g_k(x) + \varepsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^q g_j(x) \mid Ax \leq b, g_j(x) \geq \delta_j \forall j \neq k, x \geq 0 \right\}$, com $\varepsilon \geq 0$ um número

pequeno e $\delta_j \geq 0$ um limite inferior para a função objetivo j . Variando os valores de δ_j pode-se obter a fronteira eficiente em sua totalidade ou uma aproximação da mesma.

Devido à estrutura discreta dos problemas combinatórios multi-objetivo, o método das ponderações deve ser usado com cautela para a determinação das soluções não dominadas, uma vez que, nesta classe de problemas, há soluções eficientes para as quais não existe um vetor de pesos que possa gerá-las (Bitran, 1977). Tais soluções são denominadas de *soluções eficientes “não suportadas”*.

O termo “suportado” indica que o ponto pertence à envoltória convexa (*convex hull*) do conjunto de soluções eficientes. A Figura 1 ajuda a visualizar estes conceitos. Esta figura corresponde a um problema bi-objetivo onde foram encontradas as soluções A, B, C, D, E, F, G e H. Para este conjunto de soluções, as soluções A, B, C e G pertencem à envoltória convexa, isto é, são *soluções eficientes “suportadas”*. As soluções D, E e F são *soluções eficientes “não suportadas”*, isto é, são soluções dominadas pela combinação convexa das soluções C e G. A solução H é uma solução não-eficiente.

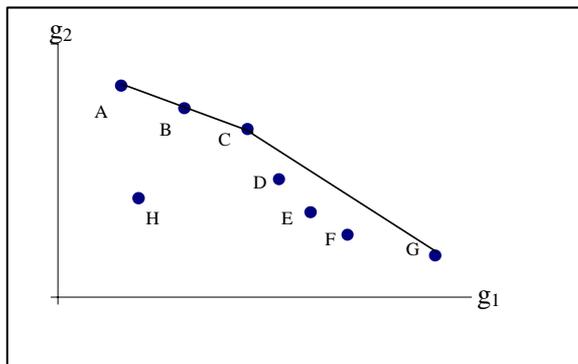


Figura 1 – Conjunto de soluções para um problema combinatório bi-objetivo.

Em um artigo recente Sylva & Crema (2003) apresentam um método para determinar todas as soluções não dominadas para problemas inteiros multi-objetivo. Neste artigo, que tem por base o trabalho de Klein & Hannan (1982), os autores usam o método das ponderações. Sylva & Crema (2003) definem um problema de programação inteira paramétrica, usando um vetor fixo de pesos. Em cada iteração do algoritmo são adicionadas novas restrições ao problema paramétrico, visando eliminar as soluções dominadas pelas soluções eficientes encontradas nas iterações prévias. Para problemas com grande número de soluções não dominadas os autores não recomendam o uso do algoritmo, devido ao alto custo computacional.

Uma das principais desvantagens dos métodos que buscam determinar a fronteira eficiente em sua totalidade é seu elevado custo computacional; esse custo aumenta bastante se o interesse é determinar todas as soluções não dominadas.

Nos problemas combinatórios multi-objetivo há portanto a necessidade de se procurar novas estratégias (com custos computacionais razoáveis) para gerar as soluções eficientes “suportadas” e “não-suportadas”. No presente artigo propõe-se uma estratégia para encontrar uma aproximação da fronteira eficiente para o BHCLP.

4. Descrição da Estratégia Usada para Gerar uma Aproximação da Fronteira Eficiente para o BHCLP

A estratégia é inspirada na metodologia descrita por Alminyana *et al.* (1998) para gerar a fronteira eficiente para o problema das pq -medianas bi-objetivo. Nesse problema busca-se determinar a localização de p facilidades de nível 1 e q de nível 2, procurando minimizar as distâncias percorridas em cada um dos dois níveis. Basicamente a metodologia de Alminyana *et al.* (1998) consiste em gerar as soluções para o problema bi-objetivo e posteriormente avaliar a qualidade das soluções geradas.

No presente trabalho o BHCLP é resolvido utilizando o método das ponderações. O processo de geração da fronteira eficiente compreende três etapas: na etapa 1 define-se o problema paramétrico para o BHCLP; na etapa 2, o problema paramétrico resultante é resolvido através de uma heurística lagrangeana (HL), que gera as soluções viáveis para o BHCLP; na etapa 3 avalia-se a eficiência relativa das soluções geradas na etapa 2. A seguir descreve-se cada uma dessas etapas.

4.1 Etapa 1: Definir o Problema Paramétrico para o BHCLP

Usando o vetor de pesos $(\pi, (1-\pi))$, $\pi \geq 0$, define-se o problema paramétrico para o BHCLP:

$(BHCLP(\pi))$

$$v(BHCLP(\pi)) = \text{Max} \left\{ \pi \sum_{j \in J} f_j x_j + (1-\pi) \sum_{j \in J} f_j w_j \right\}, \quad (13)$$

sujeito a (4)-(7), (10)-(12).

4.2 Etapa 2: Resolver o Problema BHCLP(π)

O problema BHCLP(π) é resolvido usando uma adaptação da heurística lagrangeana com base nos subgradientes, desenvolvida para o HCLP por Espejo *et al.* (2003). Em cada iteração da heurística é obtido um limite superior, a partir do qual é possível obter uma solução viável (primal) para o BHCLP. A solução primal obtida desta maneira é geralmente um limite inferior fraco; um algoritmo de substituição de vértices é usado para melhorar este limite. Para maiores detalhes sobre a heurística lagrangeana, ver Espejo *et al.* (2003).

O problema lagrangeano, BHCLP(π) $_{\lambda,\mu}$, que deve ser resolvido em cada iteração da heurística lagrangeana, é obtido dualizando as restrições (10) e (11), usando o vetor de multiplicadores $V=[\lambda,\mu]\geq 0$:

$$v(BHCLP(\pi)_{\lambda,\mu}) = \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in J} (\pi f_j - \lambda_j) x_j + \sum_{j \in J} ((1-\pi) f_j - \mu_j) w_j + \\ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} \lambda_j y_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (b_{ij} \lambda_j + c_{ij} \mu_j) z_i \end{array} \right\}.$$

Ou, fazendo $\alpha_i = \sum_{j \in J} a_{ij} \lambda_j$ e $\beta_i = \sum_{j \in J} (b_{ij} \lambda_j + c_{ij} \mu_j)$, obtém-se:

(BHCLP(π) $_{\lambda,\mu}$):

$$v(BHCLP(\pi)_{\lambda,\mu}) = \text{Max} \left\{ \sum_{j \in J} (\pi f_j - \lambda_j) x_j + \sum_{j \in J} ((1-\pi) f_j - \mu_j) w_j + \sum_{i \in I} \alpha_i y_i + \sum_{i \in I} \beta_i z_i \right\},$$

sujeito a (4)-(7) e (12).

O problema lagrangeano pode ser facilmente resolvido da seguinte maneira:

$$v(BHCLP(\pi)_{\lambda,\mu}) = \sum_{j \in J} \max (0, \pi f_j - \lambda_j) + \sum_{j \in J} \max (0, (1-\pi) f_j - \mu_j) + \sum^p \alpha_i + \sum^q \beta_i .$$

Isto corresponde a $x_j = 1$ se $\lambda_j \leq \pi f_j$ ($x_j = 0$ caso contrário); $w_j = 1$ se $\mu_j \leq (1-\pi) f_j$ ($w_j = 0$ caso contrário); $y_i = 1$ para p maiores α_i ($y_i = 0$ caso contrário) e $z_i = 1$ para q maiores β_i ($z_i = 0$ caso contrário).

4.3 Etapa 3: Avaliação das Soluções Geradas

Nos casos em que são utilizados modelos multi-objetivo para localizar facilidades, Fisher & Rushton (1979) sugerem aplicar técnicas analíticas para avaliar as localizações propostas. A metodologia frequentemente usada com esta finalidade é a Análise Envolvória de Dados, mais conhecida como DEA (*Data Envelopment Analysis*); ver por exemplo os trabalhos de Desai & Storbeck (1990), Desai *et al.* (1995) e Alminyana *et al.* (1998).

DEA é uma metodologia com base na programação linear, para avaliar a eficiência relativa de unidades de tomada de decisão similares, geralmente denominadas DMUs (*Decision Making Units*). Assume-se que as DMUs transformam múltiplos insumos (*inputs*) em múltiplos produtos (*outputs*); ver por exemplo Cooper *et al.* (2000). Existem duas versões

de DEA, dependendo da hipótese utilizada para a construção da envoltória do conjunto das DMUs observadas: i) uma versão supondo envoltória convexa, por exemplo os modelos CCR (Charnes *et al.*, 1978) e BCC (Banker *et al.*, 1984); ii) uma versão supondo envoltória não convexa; por exemplo os modelos *Free Disposable Hull* (FDH) de Tulkens (1993).

A heurística lagrangeana gera um conjunto de soluções para o BHCLP. Tais soluções devem ser avaliadas para determinar as soluções eficientes deste conjunto. Com tal propósito é utilizado um índice de eficiência espacial relativa (*relative spatial efficiency index*, RSE). Fisher & Rushton (1979) definem o RSE de uma dada configuração de localização de facilidades comparando-o com a melhor configuração conhecida.

Para obter o RSE de uma solução calcula-se dois tipos de eficiência: i) a eficiência técnica (dada pela projeção radial na fronteira eficiente) e ii) a eficiência do *mix* (dada pelo valor das variáveis de folga do modelo DEA utilizado). Cooper & Tone (1997) apresentam uma discussão abrangente sobre os tipos de eficiência em DEA. Uma ilustração desses dois tipos de eficiência é mostrada na Figura 2. Nessa figura o ponto *H* possui ineficiências técnica e do *mix*. Para atingir a fronteira eficiente o ponto *H* precisa aumentar, na mesma proporção, as coberturas de níveis 1 e 2 (isto é, aumentar sua eficiência técnica), até atingir o ponto *C'* (que é fracamente eficiente, o que caracteriza a ineficiência do *mix*). Observe-se ainda, na Figura 2, que para atingir o seu ponto de referência (o ponto *C*), o ponto *H* precisa aumentar o valor da cobertura de nível 1.

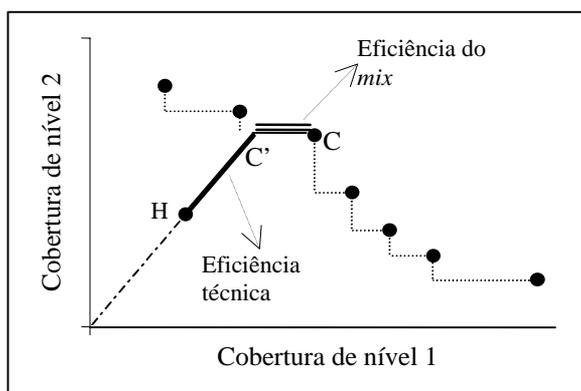


Figura 2 – Eficiência técnica e eficiência do *mix*.

No presente artigo o RSE de uma dada solução consiste em uma combinação das eficiências técnica e do *mix*, denominada “Medida de Eficiência Global” (*Global Efficiency Measure*, GEM); ver Cooper & Pastor (1995). Dado que a fronteira eficiente do BHCLP está formada por soluções eficientes “suportadas” e “não-suportadas”, a envoltória é não-convexa. Utilizaremos portanto a metodologia FDH para determinar o RSE das soluções obtidas com a heurística lagrangeana.

A obtenção das eficiências técnica e do *mix* é realizada através de uma adaptação do método das duas fases de Arnold *et al.* (1998). Para cada uma das soluções do BHCLP são executados dois passos. No Passo 1 é obtida a eficiência técnica e no Passo 2 a eficiência do *mix* (mantendo constante a eficiência técnica obtida no Passo 1).

Observe-se que nos modelos DEA é necessário que sejam definidos os *inputs* e os *outputs*. As soluções obtidas para o BHCLP são no entanto um caso especial de DMUs, pois só apresentam *outputs*. Os *outputs* para uma dada solução são dados pelos valores das funções objetivo do problema. Para avaliar a eficiência técnica de DMUs sem *inputs* foi utilizada uma adaptação não convexa do modelo apresentado por Lovell & Pastor (1999). Segundo Lovell & Pastor (1999), do ponto de vista econômico é difícil aceitar um modelo DEA sem *inputs*. Os autores justificam o uso desses modelos com base na equivalência que existe entre os modelos BCC sem *inputs* com os modelos BCC com *inputs* constantes.

Assumamos, sem perda de generalidade, que HL encontrou t soluções para o BHCLP. Seja (v_1^l, v_2^l) o valor da solução encontrada na iteração l , onde v_1^l e v_2^l correspondem aos valores das funções objetivo (8) e (9), respectivamente. O valor da solução a ser avaliada será denotada por (v_1^0, v_2^0) .

Passo 1: A eficiência técnica da solução a ser avaliada é calculada resolvendo o seguinte modelo de programação inteira mista (ver Lovell & Pastor, 1999).

$$\text{Max}\{\phi_0\} \quad (14)$$

sujeito a:

$$\sum_{l=1}^t \lambda_l v_r^l \geq \phi_0 v_r^0, \quad r = 1, 2; \quad (15)$$

$$\sum_{l=1}^t \lambda_l = 1; \quad (16)$$

$$\lambda_l \in \{0, 1\}, \quad l = 1, \dots, t; \quad (17)$$

$$\phi_0 \text{ irrestrito.} \quad (18)$$

Na formulação acima $\lambda_l = 1$ indica que a solução l é escolhida como referência para a solução avaliada ($\lambda_l = 0$ caso contrário). Na função objetivo (14) um valor de $\phi_0 = 1$ indica que a solução avaliada possui eficiência técnica. Se $\phi_0 > 1$ a solução avaliada é tecnicamente ineficiente (ver Figura 2). As restrições (15) impedem que a expansão da solução avaliada ultrapasse a fronteira eficiente. A restrição (16) indica que deve ser escolhida uma única solução como referência para a solução a ser avaliada. As restrições (17) e (18) definem a natureza das variáveis de decisão.

Passo 2: Obtida a eficiência técnica da solução a ser avaliada, denotada por ϕ_0^* , a eficiência do *mix* é calculada através do seguinte modelo de programação inteira mista (Alminyana *et al.*, 1998).

$$\text{Max}\left\{\sum_{r=1}^2 s_r\right\} \quad (19)$$

sujeito a (16), (17) e

$$\sum_{l=1}^t \lambda_l v_r^l - s_r = \phi_0^* v_r^0, \quad r = 1, 2; \quad (20)$$

$$s_r \geq 0, \quad r = 1, 2. \quad (21)$$

As variáveis s_r representam as folgas de cada *output*. A função objetivo (19) maximiza portanto o somatório das folgas entre a projeção radial na fronteira eficiente e a solução eficiente de referência (a maximização da folga impede a projeção em um ponto fracamente eficiente). Se o valor da função objetivo for igual a zero, a solução a ser avaliada apresenta eficiência do *mix*. Caso contrário, ela não possui eficiência do *mix*. As restrições (20) estabelecem que a solução eficiente de referência corresponde a uma solução gerada pela heurística.

O valor da função objetivo do modelo do Passo 1 fornece o índice de eficiência técnica e o modelo do Passo 2 é usado para identificar se a solução avaliada possui eficiência do *mix*. Para combinar estes dois tipos de eficiência é empregado o GEM, proposto por Cooper & Pastor (1995). Para cada solução do BHCLP esta medida é obtida através da seguinte fórmula:

$$GEM = \frac{1}{\phi_0^* \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 \frac{s_r^*}{\phi_0^* v_r^0} \right)}, \text{ onde } s_r^* \text{ é o valor ótimo da folga obtida no Passo 2.}$$

Para o conjunto formado pelas t soluções um valor de $GEM=1$ indica que a solução é eficiente em relação a esse conjunto. Soluções com $GEM < 1$ são ineficientes.

5. Resultados Computacionais

Nesta Seção apresentamos os resultados computacionais obtidos com a heurística lagrangeana na geração de uma aproximação da fronteira eficiente para o BHCLP. Foram usados 49 dos 58 problemas-teste que Espejo *et al.* (2003) utilizaram para o HCLP. Estes problemas-teste são os seguintes: 13 problemas gerados a partir da rede de 55 vértices definida por Swain (1971); 9 problemas para cada uma das redes de 100 e 150 vértices, que são redes geradas aleatoriamente por Galvão & ReVelle (1996); 9 problemas para cada uma das redes de 300 e 500 vértices, obtidos da biblioteca eletrônica de Beasley (1990) para o problema das p -medianas (problemas Pmed11 e Pmed21). Estes problemas correspondem a combinações diferentes de p e q . Para cada uma das redes foram usados valores fixos de R_1 , T_1 e R_2 .

Para obter uma aproximação da fronteira eficiente para BHCLP usando HL foram rodados 41 instâncias paramétricas BHCLP(π) para cada um dos problemas acima. Os valores de $\pi \in [0,1]$; foram escolhidos os seguintes valores: $\pi = \{(0,1), (0,025; 0,975), (0,050; 0,950), \dots, (1,0)\}$.

Os testes computacionais foram realizados em um microcomputador com processador Pentium III de 700MHz. A heurística lagrangeana foi implementada usando linguagem de programação Delphi. Os modelos utilizados para avaliar a eficiência das soluções obtidas por HL (solução dos modelos descritos nos Passos 1 e 2 da Etapa 3) foram implementados usando a linguagem de modelagem OPL-Studio com o CPLEX como otimizador.

Com a finalidade de avaliar as fronteiras eficientes aproximadas obtidas através de HL, decidimos gerar fronteiras eficientes exatas para as redes de 55 e 100 vértices. As fronteiras exatas foram geradas utilizando o método das restrições, conforme descrito no Apêndice. O algoritmo descrito no Apêndice foi também implementado utilizando OPL-Studio/CPLEX.

O resumo dos resultados para as redes de 55 e 100 vértices são mostrados nas Tabelas 1 e 2. Conforme já observado, durante a execução de HL são geradas várias soluções (Núm. sols.), sendo as mesmas comparadas entre si para determinar quais soluções são eficientes (correspondendo a $GEM=1$). Resumos dos resultados obtidos com HL para os problemas de 150, 300 e 500 vértices são mostrados nas Tabelas 3, 4 e 5, respectivamente.

Em relação aos tempos computacionais, o tempo necessário para gerar a fronteira eficiente exata através do método das restrições já é bastante alto para as redes de 100 vértices (ver Tabela 2), tornando-se proibitivo para redes maiores. Os tempos necessários para gerar uma aproximação da fronteira eficiente são baixos (inferiores a 3 minutos) para redes de até 150 vértices. Para as redes de 300 vértices o tempo médio foi de 631 segundos, com desvio padrão de 100 segundos; para as de 500 vértices esses tempos foram de respectivamente 1723 e 357 segundos.

Nas Figuras 3 e 4 mostramos a fronteira eficiente (representada por \square) obtida pelo método das restrições e parte das soluções obtidas com HL, para quatro dos problemas-teste onde a heurística obteve os piores resultados (com a finalidade de enfatizar as diferenças que podem existir entre a fronteira eficiente exata e uma fronteira aproximada). Para o conjunto de soluções obtidas por HL, representamos com (O) as soluções eficientes ($GEM=1$) e com (X) as soluções ineficientes ($GEM<1$).

Tabela 1 – Resumo dos resultados para a rede 55 vértices de Swain ($R_1=6$, $T_1=8$, $R_2=10$).

Problema		Método das Restrições (Exato)		Heurística Lagrangeana			
p	q	Tempo total (segs. CPU)	Núm. sols. eficientes	Tempo total (segs. CPU)	Núm. sols.	Núm. sols. com $GEM=1$	Média do GEM
1		0,1	1	10,5	3	1	0,9821
2	1	0,2	2	10,5	7	2	0,8822
3		0,3	2	12,3	6	2	0,9721
1		0,4	2	12,1	17	2	0,9653
2	2	1,1	4	11,6	14	4	0,9669
3		2,5	5	14,0	18	4	0,9708
4		1,6	4	16,3	18	4	0,9654
1		2,1	5	8,9	22	5	0,9675
2		2,6	7	10,2	21	7	0,9838
3	3	1,8	4	13,9	21	4	0,9733
4		2,0	4	16,0	24	4	0,9744
5		3,1	6	18,9	23	5	0,9695
6		3,1	8	18,8	26	5	0,9606

Tabela 2 – Resumo dos resultados para a rede de 100 vértices de Galvão & ReVelle ($R_1=40$, $T_1=50$, $R_2=60$).

Problema		Método das Restrições (Exato)		Heurística Lagrangeana			
p	q	Tempo total (segs. CPU)	Núm. sols. eficientes	Tempo total (segs. CPU)	Núm. sols.	Núm. sols. com GEM=1	Média do GEM
10		59	10	51	28	10	0,9887
12	8	62	9	54	29	8	0,9899
14		58	8	56	42	8	0,9842
12		116	11	59	73	9	0,9842
14	10	106	8	60	46	7	0,9806
16		92	7	63	63	7	0,9811
14		234	10	72	78	9	0,9816
16	12	5738	8	71	87	7	0,9831
18		8167	7	61	85	6	0,9815

Tabela 3 – Resumo dos resultados para a rede de 150 vértices de Galvão & ReVelle ($R_1=40$, $T_1=55$, $R_2=60$).

Problema		Heurística Lagrangeana			
p	q	Tempo total (segs. CPU)	Núm. sols.	Núm. sols. com GEM=1	Média do GEM
12		103	51	9	0,9868
14	10	110	64	8	0,9763
16		116	43	10	0,9843
14		103	83	13	0,9879
16	12	116	67	15	0,9870
18		120	96	12	0,9830
18		140	121	10	0,9800
20	16	149	142	11	0,9816
22		142	139	10	0,9826

Tabela 4 – Resumo dos resultados para a rede 300 vértices de Beasley.

Problema		Heurística Lagrangeana			
p	q	Tempo total (segs. CPU)	Núm. sols.	Núm. sols. com GEM=1	Média do GEM
15		455	185	35	0,9926
20	15	512	214	30	0,9931
25		592	248	38	0,9916
20		601	253	30	0,9911
25	20	670	195	35	0,9914
30		733	174	33	0,9921
22		656	227	29	0,9924
25	22	713	208	28	0,9922
30		748	182	35	0,9932

Tabela 5 – Resumo dos resultados para a rede 500 vértices de Beasley.

Problema		Heurística Lagrangeana			
p	q	Tempo total (segs. CPU)	Núm. sols.	Núm. sols. com GEM=1	Média do GEM
15		1272	130	23	0,9947
20	10	1355	141	27	0,9946
25		1442	177	24	0,9957
20		1579	186	20	0,9951
25	15	1691	157	23	0,9961
30		1707	202	19	0,9943
25		2040	228	28	0,9956
30	20	2163	222	25	0,9949
35		2259	228	30	0,9951

$(n=55, p=3, q=2, R_1=6, T_1=8, R_2=10)$

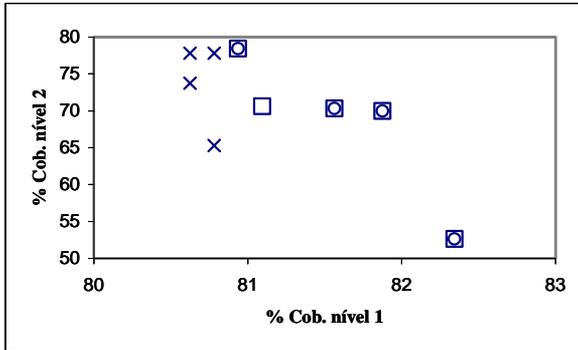


Figura 3a – Rede de 55 vértices: Fronteira eficiente obtida pelo método das restrições (□) e por HL (○). Outras soluções obtidas com HL são denotadas por (X).

$(n=55, p=6, q=3, R_1=6, T_1=8, R_2=10)$

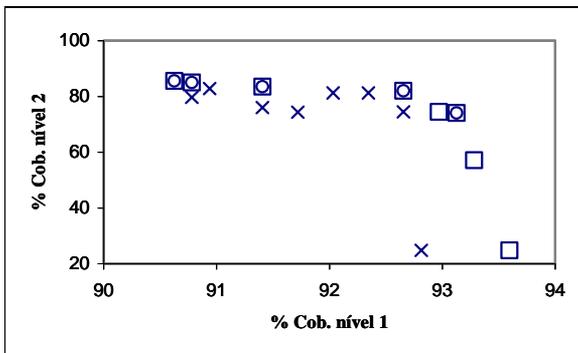


Figura 3b – Rede de 55 vértices: Fronteira eficiente obtida pelo método das restrições (□) e por HL (○). Outras soluções obtidas com HL são denotadas por (X).

Levando em conta que foram rodados 41 problemas paramétricos BHCLP(π) para a determinação de cada fronteira eficiente aproximada, o custo computacional da metodologia pode ser considerado relativamente baixo (média inferior a 30 minutos de CPU para as redes de 500 vértices).

Agradecimentos

Desejamos expressar nossos especiais agradecimentos ao Prof. Brian Boffey, da Universidade de Liverpool (Grã-Bretanha), que propôs a extensão bi-objetivo do HCLP. Esta pesquisa foi financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), Proc. No. E-26/151.294/2002, e pelo CNPq, Proc. No. 472295/2003-9.

Referências Bibliográficas

- (1) Alminyana, A.; Borrás, F. & Pastor, J.T. (1998). A new directed branching heuristic for the pq-median problem. *Location Science*, **6**, 1-23.
- (2) Arnold, V.; Bardhan, I.; Cooper, W.W. & Gallegos, A. (1998). Primal and dual optimality in computer codes using two-stage solution procedures in DEA. **In:** *Operations Research: Methods, models and applications* [edited by J. Aronson and S. Zionts], Boston, Kluwer Academic Publishers.
- (3) Banker, R.D.; Charnes, A. & Cooper, W.W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, **30**, 1078-1092.
- (4) Beasley, J.E. (1990). OR-library: distribution test problems by electronic mail. *Journal of the Operational Research Society*, **41**, 1069-1072.
- (5) Bitran, G.W. (1977). Linear multiple objective program with zero-one variables. *Mathematical Programming*, **13**, 121-139.
- (6) Boffey, B.; Yates, D. & Galvão, R.D. (2003). An algorithm to locate perinatal facilities in the municipality of Rio de Janeiro. *Journal of the Operational Research Society*, **54**, 21-31.
- (7) Branas, C.C. & ReVelle, C.S. (2001). An iterative switching heuristic to locate hospitals and helicopters. *Socio-Economic Planning Sciences*, **35**, 11-30.
- (8) Charnes, A.; Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-444.
- (9) Church, R. & Eaton, D.J. (1987). Hierarchical location analysis using covering objectives. **In:** *Spatial analysis and location-allocation models* [edited by A. Gosh and G. Rushton], Reinhold, New York.
- (10) Cooper, W.W. & Pastor, J.T. (1995). Global efficiency measurement in DEA. Working Paper. Universidad de Alicante, Spain.
- (11) Cooper, W.W.; Seiford, L.M. & Tone, K. (2000). *Data envelopment analysis – a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

- (12) Cooper, W.W. & Tone, K. (1997). Measures of inefficiency in data envelopment analysis and stochastic frontier estimation. *European Journal of Operational Research*, **99**, 72-88.
- (13) Desai, A.; Haynes, K. & Storbeck, J. (1995). A spatial efficiency framework for the support of locational decisions. **In:** *Data Envelopment Analysis Theory. Methodology and Applications* [edited by A. Charnes, W.W. Cooper, A. Lewin and L. Seiford], Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- (14) Desai, A. & Storbeck, J. (1990). A data envelopment analysis for spatial efficiency. *Computers, Environment and Urban Systems*, **14**, 145-156.
- (15) Ehrgott, M. (2000). *Multicriteria optimization*. Springer Verlag, Berlin.
- (16) Ehrgott, M. & Gandibleux, X. (2000). An Annotated Bibliography of Multiobjective Combinatorial Optimization. Report in *Wirtschaftsmathematik*, 62/2000.
- (17) Eitan, Y.; Narula, S.C. & Tien, J.M. (1991). A generalized approach to modeling the hierarchical location-allocation problem. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **21**, 39-46.
- (18) Espejo, L.G.A. (2001). Problemas de Localização Hierárquicos. Tese D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- (19) Espejo, L.G.A.; Galvão, R.D. & Boffey, B. (2003). Dual-based hierarchical covering location problem. *Computers & Operations Research*, **30**, 165-180.
- (20) Fisher, M. & Rushton, G. (1979). Spatial efficiency of services locations and the regional development process. *Papers of the Regional Science Association*, **42**, 83-97.
- (21) Galvão, R.D. & ReVelle, C.S. (1996). A Lagrangean heuristic for the maximal covering location problem. *European Journal of Operational Research*, **88**, 114-123.
- (22) Galvão, R.D.; Espejo, L.G.A. & Boffey, T.B. (2002). A hierarchical model for the location of perinatal facilities in the Municipality of Rio de Janeiro. *European Journal of Operational Research*, **138**, 495-517.
- (23) Hansen, M.P. (1998). Metaheuristics for multiple objective combinatorial optimization. Working paper, Technical University of Denmark, Denmark.
- (24) Jayaraman, V.; Gupta, R. & Pirkul, H. (2003). Selecting hierarchical facilities in a service-operations environment. *European Journal of Operational Research*, **147**, 613-628.
- (25) Klein, E. & Hannan, E. (1982). An algorithm for the multiple objective integer linear programming problem. *European Journal of Operational Research*, **9**, 378-385.
- (26) Lovell, C.A.K. & Pastor, J.T. (1999). Radial DEA models without inputs or without outputs. *European Journal of Operational Research*, **118**, 46-51.
- (27) Miliotis, P.; Dimopoulou, M. & Giannikos, I. (2002). A hierarchical model for locating bank branches in a competitive environment. *International Transactions in Operational Research*, **9**, 549-565.

- (28) Mirchandani, P.B. (1987). Generalized hierarchical facility locations. *Transportation Science*, **21**, 123-125.
- (29) Moore, G.C. & ReVelle, C.S. (1982). The hierarchical service location problem. *Management Science*, **28**, 775-780.
- (30) Narula, S.C. (1984). Hierarchical location-allocation problems: A classification scheme. *European Journal of Operational Research*, **15**, 93-99.
- (31) Narula, S.C. & Ogbu, U.I. (1985). Lagrangean relaxation and decomposition in an uncapacitated 2-hierarchical location-allocation problem. *Computers & Operations Research*, **12**, 169-180.
- (32) Rahman, S. & Smith, D.K. (1999). Deployment of rural health facilities in a developing country. *Journal of the Operational Research Society*, **50**, 892-902.
- (33) Rasmussen, L.M. (1986). Zero-one programming with multiple criteria. *European Journal of Operational Research*, **26**, 83-95.
- (34) Serra, D.; Marianov, V. & ReVelle, C.S. (1992). The maximum-capture hierarchical location problem. *European Journal of Operational Research*, **62**, 363-371.
- (35) Steuer, R.E. (1986). *Multiple criteria optimization: theory, computation, and applications*. Wiley, New York.
- (36) Swain, R. (1971). A decomposition algorithm for a class of facility location problems. Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, NY.
- (37) Sylva, J. & Crema, A. (2003). A method for finding the set of non-dominated vectors for multiple objective integer linear programs. Aceito para publicação no *European Journal of Operational Research*.
- (38) Teghem Jr., J. & Kunsch, P.L. (1986). A survey of techniques for finding efficient solutions to multi-objective integer linear programming. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **3**, 95-108.
- (39) Tulkens, H. (1993). On FDH efficiency: some methodological issues and applications to retail banking, courts, and urban transit. *Journal of Productivity Analysis*, **4**, 183-210.

Apêndice: Obtenção de Fronteiras Eficientes Exatas através do Método das Restrições

Damos referência à formulação matemática do BHCLP, dada por (8)-(12) e (4)-(7). Tipicamente, como em outros problemas bi-objetivo, os dois objetivos dados por (8) e (9) estão “em conflito”. Conforme já mencionado, um dos métodos que pode ser utilizado para obter uma boa solução de compromisso é o método das restrições (ver por exemplo Steuer, 1986). Neste método uma família de problemas mono-objetivo é gerada removendo uma das funções objetivo e adicionando-a ao conjunto de restrições do problema, na forma de restrição adicional.

No caso do BHCLP removemos a função objetivo (9) e a adicionamos ao conjunto de restrições, obtendo o seguinte problema paramétrico:

$(BHCLP(\delta))$

$$v(BHCLP(\delta)) = \text{Max} \left\{ \sum_{j \in J} f_j x_j + \varepsilon \sum_{j \in J} f_j w_j \right\}, \quad (22)$$

sujeito a (4)-(7), (10)-(12) e

$$\sum_{j \in J} f_j w_j \geq \delta. \quad (23)$$

$\varepsilon \geq 0$ é um número pequeno e $\delta \geq 0$ um limite inferior para a função objetivo (9).

Para determinar a fronteira eficiente exata utilizamos o seguinte procedimento:

Passo 0: Inicialize $\varepsilon=0,00001$ e $\delta=0$. Execute o Passo 1.

Passo 1: Resolva o problema $(BHCLP(\delta))$. Se o problema for viável vá ao Passo 2, caso contrário pare (a fronteira eficiente já está determinada).

Passo 2: Faça $\delta = \sum_{j \in J} f_j w_j^* + \varepsilon$, onde w_j^* é o valor ótimo de w_j obtido no Passo 1. Volte a executar o Passo 1.