

MODELOS DEA COM VARIÁVEIS LIMITADAS OU SOMA CONSTANTE

José Virgílio Guedes de Avellar *

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

São José dos Campos – SP

avellar@ita.br

Armando Zeferino Milioni

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

São José dos Campos – SP

milioni@ita.br

Tania Nunes Rabello

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

São José dos Campos – SP

tania@ita.br

* *Corresponding author*/autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 07/2004; aceito em 02/2005

Received July 2004; accepted February 2005

Resumo

Neste trabalho são propostos dois modelos tipo DEA (*Data Envelopment Analysis*) em que um novo *input* (ou um novo *output*) deve ser distribuído de maneira justa para todas as unidades (DMUs – *Decision Making Units*) de uma corporação. Uma característica interessante dos modelos propostos é que a forma dessa distribuição é influenciada pelos valores dos *inputs* já empregados e dos *outputs* já gerados em cada DMU. Os modelos foram construídos de acordo com o perfil geométrico da fronteira CCR, podendo ter forma côncava ou convexa conforme a natureza da variável que se quer distribuir. Mostramos que, sob essa hipótese de um formato geométrico específico para a fronteira, torna-se simples a distribuição do novo *input* (ou *output*) entre as várias DMUs, pois cada uma delas receberá a fração do novo *input* (ou *output*) que a torne eficiente, forçando sua posição sobre a fronteira pré-determinada.

Palavras-chave: análise envoltória de dados; soma constante de variáveis; fronteira eficiente.

Abstract

In this work we present two DEA (*Data Envelopment Analysis*) models in which a new input (or output) is to be fairly assigned to all units (DMUs – *Decision Making Units*) of a corporation. An interesting characteristic of those proposed models is that the way this distribution is influenced by both inputs and outputs used in each DMU. The models were built in accordance with the geometric shape of CCR frontier and they can be convex or concave, depending on the nature of the variables we intend to share. We show that, under this assumption, it becomes relatively easy the distribution of a new input (or output) among several DMU's, considering that each DMU will receive the new input (or output) fraction in order to become efficient, forcing its position on the specific frontier.

Keywords: data envelopment analysis; constant sum of variables; efficient frontier.

1. Introdução

A Análise Envoltória de Dados (DEA – da sigla em inglês, *Data Envelopment Analysis*) é uma ferramenta da estatística não-paramétrica que avalia a eficiência de unidades tomadoras de decisão (DMUs, da sigla em inglês *Decision Making Units*), comparando entidades que realizam tarefas similares e se diferenciam pela quantidade de recursos utilizados (*inputs*) e de bens produzidos (*outputs*). DEA é uma ferramenta adequada tanto para avaliar a eficiência relativa das DMUs quanto para o estabelecimento de metas para DMUs consideradas ineficientes. As DMUs são comparadas de acordo com o conceito de eficiência de Farrel (Farrel & Fieldhouse, 1962), que consiste na razão entre a soma ponderada dos *outputs* y e a soma ponderada dos *inputs* x de cada DMU. As variáveis de decisão são o vetor u , que representa os pesos relacionados aos *outputs* y , e o vetor v , que representa os pesos relacionados aos *inputs* x .

A primeira formulação DEA (Charnes *et al.*, 1978), que ficou conhecida como modelo CCR (iniciais dos três autores), supõe retorno de escala constante, enquanto que a formulação denominada BCC, mais recente (Banker *et al.*, 1984) supõe retorno de escala variável.

Enquanto os modelos clássicos de DEA baseiam-se em liberdade na utilização de *inputs* e na produção de *outputs*, há casos em que essa liberdade não existe (Gomes *et al.*, 2001). Suponhamos, por exemplo, um banco que pretende lançar um novo produto (*output*) no mercado e deseja distribuir para suas agências, da maneira mais justa possível, metas individuais que somam o valor constante estabelecido para toda a corporação. Alternativamente, suponhamos um recurso disponível (*input*), como um orçamento ou custo fixo associado a um certo número total de aeronaves, por exemplo, que uma força aérea pretende distribuir para seus diversos esquadrões. É esse o foco de atenção deste trabalho.

Em relação à limitação na produção de *outputs*, Soares de Mello *et al.* (2001-b) e Lins *et al.* (2003) propuseram modelos ilustrados com o caso dos jogos olímpicos, onde o *output* medalhas conquistadas é representado por um índice que constitui uma variável limitada por ter uma soma constante para todas as DMUs. Neste enfoque, a melhora da posição de qualquer competidor implica necessariamente a piora do desempenho de alguns dos seus adversários. O modelo de Lins *et al.* (2003) será brevemente revisto na seção 2, a seguir.

A pesquisa também é recente quando o problema está voltado para a limitação ou soma constante dos valores de *inputs*. O artigo escrito por Cook & Kress (1999) foi o primeiro a relacionar um problema de alocação de recursos (orçamento fixo, ou custos fixos, vistos como *inputs*) com a metodologia DEA. A abordagem de Cook e Kress é baseada na idéia das eficiências se manterem constantes. Sob essa hipótese, os autores concluem que no caso de um problema em que há apenas um *input* e um *output*, os recursos devem ser alocados a cada DMU na mesma proporção do valor do *input* daquela DMU em relação à soma dos *inputs* de todas as DMUs. A óbvia limitação desta abordagem é que a alocação se faz baseada apenas na quantidade de *inputs*. Dessa forma, DMUs com a mesma quantidade de *inputs* receberão a mesma fração de recursos, independentemente de produzirem quantidades diferentes de *outputs*.

Na mesma linha de alocação eficiente de variáveis, Wei *et al.* (2000) enfoca dois tipos diferentes de aplicação do problema de otimização inverso, utilizando DEA para estimação de *inputs* e *outputs*. No primeiro, chamado de problema de previsão, em um conjunto de unidades de tomada de decisão os *inputs* são aumentados até um valor qualquer, assumindo-se que a respectiva DMU mantém a eficiência anterior. Dessa forma, o que se quer saber é quantas unidades de *outputs* devem ser produzidas para termos a mesma eficiência. No segundo tipo de problema, chamado de problema de alocação de recursos, os *outputs* precisam ser aumentados a um nível previamente escolhido e a eficiência da DMU se

mantém constante. Desta forma, deseja-se saber quantos *inputs* devem ser acrescentados a essa DMU de modo que se mantenha a mesma eficiência. Já Yan *et al.* (2002) utiliza o modelo DEA inverso para proporcionar aos tomadores de decisão a possibilidade de incorporar suas preferências sobre os *inputs/outputs* visando a alocação de recursos e análise de produção. Beasley (2003) foi outro autor que se preocupou em estudar DEA com soma constante de recursos ou custos fixos ou designação de alvos. O modelo de Beasley (2003) será brevemente revisto na seção 2, a seguir.

Neste trabalho propomos dois modelos tipo DEA baseados em variáveis limitadas ou de soma constante nos quais a distribuição de um valor fixo de *input* ou de *output* específico para todas as DMUs pode ser influenciada pelos valores de *inputs* e de *outputs* de cada DMU. Os modelos foram construídos de acordo com a escolha do lugar geométrico dos pontos que formam a fronteira CCR. Não afirmamos que nossas escolhas de lugares geométricos sejam necessariamente as ideais, mas garantimos que elas respeitam as propriedades de concavidade ou convexidade (conforme o caso) dessas fronteiras estabelecidas na literatura (Cooper *et al.*, 2000). Mostramos que a adoção de um formato específico da fronteira torna relativamente simples o problema de distribuir de maneira justa, entre todas as DMUs, um *input* ou um *output* que tenha uma meta global pré-estabelecida. A hipótese principal é a de que a distribuição justa é conseguida justamente quando todas as DMUs são simultaneamente colocadas na fronteira estabelecida, i.e., todas elas se tornam eficientes.

Assumimos uma certa familiaridade do leitor com a metodologia DEA. Iniciantes neste assunto são direcionados para Charnes & Cooper (1985) e Boussofiane *et al.* (1991). O artigo está organizado como mostrado a seguir. Na seção 2 apresentamos alguns dos principais modelos de variáveis limitadas ou de soma constante existentes na literatura. Na seção 3 apresentamos as nossas formulações e suas principais características. Na seção 4 apresentamos algumas comparações de resultados da aplicação dos nossos modelos com modelos da literatura. Conclusões e propostas futuras são apresentadas na seção 5.

2. Revisão Bibliográfica

Baseados na idéia da soma dos resultados constantes que envolvem as competições olímpicas estudada por Soares de Mello *et al.* (2001-b), ou seja, o número de medalhas de uma competição é finito, constante e pré-determinado, Lins *et al.* (2003) sugeriram um modelo em que a diminuição de *outputs* de DMUs eficientes, e o conseqüente deslocamento da fronteira de eficiência, implica um aumento da eficiência de uma DMU₀, não eficiente, sendo que a quantidade de *outputs* dessa DMU₀ mantém-se constante. Seguindo esse enfoque, os autores criaram o Modelo de Ganho de Soma Zero (GSZ), que segue a formulação clássica do modelo do envelope DEA-BCC com orientação a *outputs* representada a seguir:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } h_{R0} \\
 & \text{sa :} \\
 & \sum_j \lambda_j x_j \leq x_0 \\
 & h_{R0} y_0 \leq \sum_j \lambda_j y'_j \\
 & \sum_j \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Como o modelo representado é orientado a *outputs*, a nova eficiência da DMU_0 será $1/h_{RO}$, sendo y_0 e x_0 os respectivos valores de *outputs* e *inputs* para a DMU_0 e y_j' os novos *outputs* das $DMUs$ restantes considerando-se a perda de *outputs* devido ao ganho da DMU_0 . Neste modelo, o ganho da DMU_0 não se deve a um aumento de *outputs* em relação à fronteira eficiente, e sim à maior aproximação da fronteira em relação ao ponto em questão. Ou seja, a DMU_0 permanece a mesma, sendo que os *outputs* que pertencem à fronteira são reduzidos de maneira a aproximar mais a fronteira da DMU_0 , diminuindo a distância (chamada de alvo) necessária para que a DMU_0 torne-se eficiente.

Os autores elaboraram duas estratégias para a redução dos *outputs*. A primeira supõe uma igual redução para todas as $DMUs$, o que pode ocasionar $DMUs$ com *outputs* negativos, o que não é desejável. Na segunda estratégia, a redução dos *outputs* é proporcional ao nível inicial de *outputs* da DMU . Esse procedimento evita que uma DMU passe a ter *output* negativo, pois quem tem menos *outputs* perde menos e assim sucessivamente, como mostra a Figura 1, a seguir, que representa a nova fronteira gerada a partir desta estratégia. A linha superior representa a fronteira do modelo clássico; já a linha inferior ilustra a nova fronteira, considerando-se redução proporcional de *outputs* de todas as $DMUs$, excetuando-se a DMU_0 , que ganha a soma das perdas para se tornar eficiente.

Com este modelo, os autores verificaram que os valores das eficiências por ele calculadas são sempre maiores e os alvos sempre menores do que os encontrados no modelo DEA BCC clássico. Dessa forma, sempre vão existir alvos, ou seja, o modelo nunca vai diminuir a fronteira de modo à DMU_0 tornar-se eficiente. Isso por que os valores de λ utilizados na formulação (1) são os mesmos do modelo clássico, tornando-se restrições para um aumento mais significativo nos índices de eficiência e uma conseqüente diminuição dos valores dos alvos.

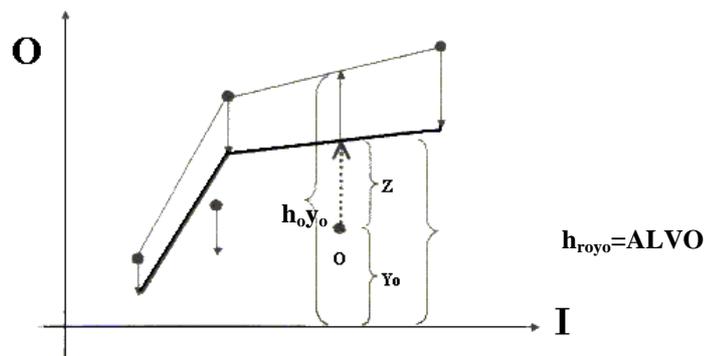


Figura 1 – Representação gráfica da redução proporcional de *outputs*.

Uma restrição deste modelo é que toda a sua formulação está baseada na fronteira BCC com apenas um *output*, não sendo possível aplicá-lo a problemas com mais de um *output*.

Beasley (2003) enfatizou a pouca quantidade de trabalhos publicados em DEA voltado à alocação de recursos (também chamado por ele de custos fixos, ou ainda, designação de alvos). Uma primeira observação interessante de Beasley é a de que quando o interesse do decisor está voltado para a eficiência global da empresa, e não para as eficiências individuais de setores, há uma economia computacional muito grande na maximização simultânea da eficiência média das $DMUs$ como alternativa à maximização uma a uma, como é feito nos

modelos DEA clássicos. Beasley mostra que o resultado é o mesmo nas duas formas de análise. Esse novo enfoque de DEA é mostrado na formulação a seguir, onde:

r = nº de *outputs*;
 i = nº de *inputs*;
 j = nº de *DMUs* avaliadas;
 y_{rj} = valor do *output* r em relação à *DMU* j ;
 x_{ij} = valor do *input* i em relação à *DMU* j ;
 u_{rj} = peso do *output* r em relação à *DMU* j ;
 v_{ij} = peso do *input* i em relação à *DMU* j ;
 e_{jj} = Eficiência Relativa da *DMU* j com os pesos da *DMU* j ;
 e_{jq} = Eficiência Relativa da *DMU* q com os pesos da *DMU* j ;
 ε = constante de valor muito pequeno.

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{j=1}^n e_{jj} / n \\ & \text{sa} \\ & e_{jq} = \left(\sum_{r=1}^s u_{rj} y_{rq} / \sum_{i=1}^m v_{ij} x_{iq} \right) \\ & q = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n \\ & i = 1, \dots, m; \quad r = 1, \dots, s \\ & 0 \leq e_{jj} \leq 1; \quad 0 \leq e_{jq} \leq 1; \quad u_{rj} \geq \varepsilon; \quad v_{ij} \geq \varepsilon \end{aligned} \tag{2}$$

A contribuição mais relevante de Beasley (2003), entretanto, no contexto do presente trabalho, foi a criação de um modelo tipo DEA de alocação de custos fixos que sofre influência tanto dos *inputs* quanto dos *outputs*, suprindo a deficiência do modelo de Cook & Kress (1999). No modelo Alocação de Custos Fixos (ACF) de Beasley, há uma quantidade fixa de custos representada por F , que deve ser distribuída entre as q *DMUs*, sendo que a parte do custo relativo a cada *DMU* é representada por f_q . Em sua concepção, Beasley considerou que, para uma distribuição de custos ser justa, seria necessário haver um conjunto único de pesos, representados por α e β , respectivamente para *outputs* e *inputs*, que faria com que todas as *DMUs* atingissem eficiência. A formulação inicial é mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^s \alpha_r y_r / (f_q + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i) = 1 \\ & \sum_{q=1}^n f_q = F \\ & f_q \geq 0; \quad q = 1, \dots, n \\ & \alpha_r, \beta_i \geq 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3}$$

Onde:

F = quantidade total de custos fixos;
 f_q = custo de cada *DMU* q ;
 α_r = peso único para o *output* r ;
 β_i = peso único para o *input* i .

Como na formulação há $n+1$ restrições e $n+s+m$ incógnitas, foi necessário um artifício para assegurar a solução do problema. A solução encontrada foi a de inicialmente minimizar, um a um, todos os f_q , encontrando-se assim o valor mínimo dito $f_{q\min}$ para cada DMU. Em seguida adotou-se o procedimento inverso, ou seja, maximização dos f_q a fim de se obter, um a um, os $f_{q\max}$. Em seguida minimizou-se $p_{\max} - p_{\min}$ (interpretados a seguir) conforme o modelo representado abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad p_{\max} - p_{\min} \\
 & \text{sa :} \\
 & p_{\max} \geq (f_q - f_{q\min}) / (f_{q\max} - f_{q\min}) \\
 & p_{\min} \leq (f_q - f_{q\min}) / (f_{q\max} - f_{q\min}) \\
 & p_{\max}, p_{\min} \geq 0 \tag{4} \\
 & \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i / (f_q + \sum_{r=1}^s \beta_r y_r) = 1 \\
 & \sum_{q=1}^n f_q = F \\
 & f_q \geq 0; \quad q = 1, \dots, n \\
 & \alpha_i \text{ e } \beta_r \geq 0; \quad i = 1, \dots, m; \quad r = 1, \dots, s
 \end{aligned}$$

Dessa forma, se o valor da função objetivo na solução desse problema de programação linear for igual a zero, teremos $p_{\max} = p_{\min}$, que implica $(f_q - f_{q\min}) / (f_{q\max} - f_{q\min}) = (f_j - f_{j\min}) / (f_{j\max} - f_{j\min})$, para todo q e j . O caso $p_{\max} \neq p_{\min}$, significa não ser possível que ambas as condições do caso anterior aconteçam de forma simultânea, sendo necessário que se abra mão de uma delas.

3. Os Modelos Propostos

Os modelos que agora apresentamos, além de distribuírem *outputs* e *inputs* limitados (com soma constante) de forma eficiente, consideram todas as variáveis (*outputs* e *inputs*) atuantes no problema.

3.1 Hipóteses

A literatura (Cooper *et al.*, 2000) constata que no caso de termos um problema com m *inputs* e apenas um *output*, a fronteira DEA-CCR tem formato convexo. Coerentemente com essa propriedade da fronteira, utilizamos como hipótese a existência de um lugar geométrico em formato hiperbólico, assegurando essa convexidade. A partir desse pressuposto, temos a intenção de averiguar quais seriam as conseqüências da adoção dessa representação geométrica sem a preocupação de provar que a mesma seja a ótima.

Analogamente, para a distribuição de *inputs* propomos um modelo com a fronteira DEA em formato esférico, assegurando a concavidade da fronteira constatada para casos em que participam do problema s *outputs* e apenas um *input* (Cooper *et al.*, 2000).

Antes de enunciarmos os modelos propriamente ditos, cabem algumas considerações acerca das hipóteses que nortearam o estudo: O formato geométrico das fronteiras foi baseado nas

representações CCR tridimensionais para dois *inputs* e um *output* (Soares de Mello *et al.*, 2001-a) e (Cooper *et al.*, 2000) e para dois *outputs* e um *input* (Cooper *et al.*, 2000). É sabido que se uma unidade é eficiente quando empregamos um modelo CCR também o é quando empregamos um modelo BCC (Charnes *et al.*, 1994). Apesar disso, a utilização dos modelos CCR propostos em casos em que um modelo BCC talvez fosse mais recomendável pode penalizar as DMUs localizadas nas extremidades da fronteira, com o estabelecimento de metas superiores às metas que seriam razoáveis para essas mesmas DMUs. Assim, pelo fato do formato das fronteiras propostas neste trabalho representarem um modelo CCR, as DMUs analisadas devem possuir valores de *inputs* ou *outputs* com ordens de grandezas semelhantes. Caso contrário, a distribuição das variáveis poderá acarretar uma distorção inerente ao caso em que talvez fosse mais recomendável a utilização de um modelo com retorno de escala variável. Finalmente, não consideramos a possibilidade de restrição nos pesos (Allen *et al.*, 1997), sendo permitido para cada DMU escolher, em completa liberdade, os pesos para cada *input* ou *output*.

3.2 O Modelo de Fronteira Hiperbólica (MFH)

A fronteira de eficiência CCR neste modelo é, por hipótese, de formato hiperbólico, pois estamos relacionando *inputs* com um *output* constante M_T a ser distribuído a todas as DMUs. Nesse caso, a fronteira é sabidamente convexa e a hipérbole representa essa convexidade. No MFH procuramos, dentre uma família de hipérboles que representam diferentes possíveis fronteiras de eficiência, aquela que irá satisfazer a condição de posicionar todas as DMUs j sobre a mesma hipérbole, assegurando, simultaneamente, que a soma dos valores de M_j seja igual à meta total M_T .

A Figura 2 ilustra o conceito para o caso em que há apenas dois *inputs*. Nela estão representadas as radiais ou retas caminho sobre as quais as DMUs (que são representadas pelos pontos) se movimentam conforme variem os valores do *output* M_j a ser distribuído a cada DMU. Na figura, os *inputs* reais de cada DMU estão escalonados, i.e., divididos pelo maior valor de *input* existente em cada um dos eixos. A razão desse escalonamento será discutida adiante. O que buscamos são os valores de *outputs* M_j que formem um lugar geométrico correspondente a uma hipérbole e que somados resultem na meta total M_T , pré-estabelecida, que se deseja distribuir. Os dados da Figura 2, de caráter meramente ilustrativo, foram retirados de Kozyreff (2002).

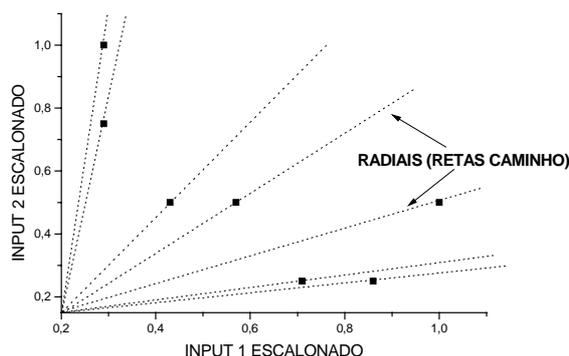


Figura 2 – Representação das radiais no MFH.

Como veremos nas formulações a seguir, além de alocar para as DMUs um *output* total baseado nos *inputs* existentes, o MFH também pode levar em conta a influência de outros *outputs* eventualmente gerados em cada DMU. O princípio é o mesmo, i.e., buscamos, dentre uma família de hipérbolas, aquela que irá satisfazer a condição de posicionar todas as DMUs sobre a fronteira de eficiência, de maneira que a soma das M_j seja igual à meta total M_T .

Iniciamos a formulação considerando o caso em que cada DMU tem apenas dois *inputs*, s *outputs* e há um novo *output* a ser distribuído entre elas cuja soma é igual a M_T . São definidas as seguintes variáveis:

- x_{1j} é o valor do *input* 1 da DMU j ;
- x_{2j} é o valor do *input* 2 da DMU j ;
- a_1 é o valor máximo do *input* 1;
- a_2 é o valor máximo do *input* 2;
- M_T é a meta total para o grupo de DMUs;
- M_j é o valor de *output* de cada DMU, a ser calculado;
- y_{kj} é o valor do *output* k da DMU j , $k=1,2,\dots,s$;
- b_k é o maior valor de cada *output* k .

O denominador da coordenada de cada eixo terá o valor da meta M_j mais o somatório de todos os s *outputs* escalonados relativos à DMU j . O escalonamento assegura a adimensionalização e permite que haja um critério de proporção quando lidamos com variáveis de diferentes dimensões.

Como visto, no MFH apenas um *output* é distribuído (M_j), sendo que os demais *outputs* são dados e influenciam na distribuição deste. Para dois *inputs*, temos:

$$\gamma_{1j}' = \left(\frac{1}{\left(M_j + \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k}\right)} \cdot \frac{x_{1j}}{a_1} \right) \text{ é o valor da coordenada do eixo 1 (abscissa) das DMUs } j;$$

$$\gamma_{2j}' = \left(\frac{1}{\left(M_j + \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k}\right)} \cdot \frac{x_{2j}}{a_2} \right) \text{ é o valor da coordenada do eixo 2 (ordenada) das DMUs } j;$$

A hipérbole caracterizada pela constante C , centrada no ponto $(0,0)$, já que zero é considerado o valor mínimo de *input/output* a ser representado, conterá todos os pontos γ_{ij}' ($i=1,2$) com a condição de que:

$$\gamma_{1j}' \cdot \gamma_{2j}' = \left(\frac{1}{\left(M_j + \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k}\right)} \cdot \frac{x_{1j}}{a_1} \right) \left(\frac{1}{\left(M_j + \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k}\right)} \cdot \frac{x_{2j}}{a_2} \right) = C \Rightarrow M_j = \frac{1}{C^{1/2}} \cdot \left(\frac{x_{1j} \cdot x_{2j}}{a_1 \cdot a_2} \right)^{1/2} - \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k} \quad (5)$$

$$M_T = \sum_{j=1}^n M_j \Rightarrow M_T = \frac{1}{C^{1/2}} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n (x_{1j} \cdot x_{2j})^{1/2}}{(a_1 \cdot a_2)^{1/2}} - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k} \Rightarrow \quad (6)$$

$$\frac{1}{C^{1/2}} = \frac{(M_T + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k}) \cdot (a_1 \cdot a_2)^{1/2}}{\sum_{j=1}^n (x_{1j} \cdot x_{2j})^{1/2}} \quad (7)$$

De (5) e (7), temos que:

$$M_j = \frac{(M_T + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k}) \cdot (x_{1j} \cdot x_{2j})^{1/2}}{\sum_{j=1}^n (x_{1j} \cdot x_{2j})^{1/2}} - \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k} \quad (8)$$

A representação da fronteira CCR do modelo MFH para dois *inputs* e $(s + 1)$ *outputs* está representada na Figura 3. Os $(s + 1)$ *outputs* equivalem aos s *outputs* que influenciam na distribuição de M_T mais a meta M_j , incógnita do problema. Os dados da figura, de caráter meramente ilustrativo, foram retirados de Kozyreff (2002).

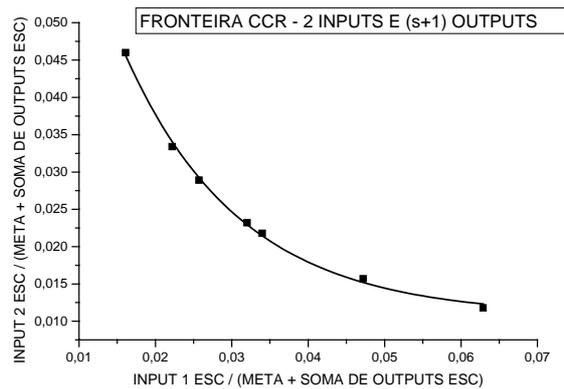


Figura 3 – Representação gráfica da fronteira hiperbólica do MFH.

Avellar (2004) generalizou o problema de distribuição de metas M_j em presença de s *outputs* e m *inputs*, obtendo:

$$M_j = \frac{(M_T + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k}) \cdot \left(\prod_{i=1}^m x_{ij} \right)^{1/m}}{\sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^m x_{ij} \right)^{1/m}} - \sum_{k=1}^s \frac{y_{kj}}{b_k}, \quad j = 1, \dots, n \quad (9)$$

3.3 O Modelo de Fronteira Esférica (MFE)

Da mesma forma que desenvolvemos o modelo hiperbólico para distribuição de uma meta de *output*, podemos desenvolver, utilizando o método inverso, um modelo para distribuição de *inputs*. Nesse caso o formato da fronteira CCR é sabidamente côncavo (Cooper *et al.*, 2000).

No MFE procuramos, dentre uma família de segmentos de circunferências centradas na origem, aquela que irá satisfazer a condição de posicionar todos os custos ou *inputs* f_j de maneira que sua soma seja igual ao custo total F . No MFE o denominador da coordenada de cada eixo terá o valor do custo f_j mais o somatório de todos os m *inputs* escalonados relativos àquela DMU _{j} .

Iniciamos a formulação considerando o caso em que cada DMU tem apenas dois *outputs*, m *inputs* e há um novo *input* a ser distribuído entre elas cuja soma é igual a F . Para encontrarmos o valor do raio R que caracteriza essa fronteira, definimos as seguintes variáveis:

- y_{1j} é o valor do *output* 1 da DMU j ;
- y_{2j} é o valor do *output* 2 da DMU j ;
- b_1 é o valor máximo do *output* 1;
- b_2 é o valor máximo do *output* 2;
- x_{kj} é o valor do *input* k na unidade j , $k=1,2,\dots,m$;
- a_k é o maior valor de cada *input* k ;
- F é o custo fixo total para o grupo de DMUs;
- f_j é o valor do custo fixo de cada DMU a ser calculado.

Temos que:

$$\varphi_{1j}' = \left(\frac{1}{f_j + \sum_{k=1}^m \frac{x_{kj}}{a_k}} \cdot \frac{y_{1j}}{b_1} \right) \text{ é o valor da coordenada do eixo 1 (abscissa) das DMUs } j;$$

$$\varphi_{2j}' = \left(\frac{1}{f_j + \sum_{k=1}^m \frac{x_{kj}}{a_k}} \cdot \frac{y_{2j}}{b_2} \right) \text{ é o valor da coordenada do eixo 2 (ordenada) das DMUs } j;$$

A circunferência de raio R conterá todos os pontos φ_{ij}' com a condição de que:

$$R^2 = (\varphi_{1j}')^2 + (\varphi_{2j}')^2 \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{\left(f_j + \sum_{k=1}^m \frac{x_{kj}}{a_k}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{b_2}\right)^2} \Rightarrow f_j = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{b_2}\right)^2} - \sum_{k=1}^m \frac{x_{kj}}{a_k} \quad (10)$$

$$F = \sum_{j=1}^n f_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{b_2}\right)^2} - \sum_{k=1}^m \frac{x_{kj}}{a_k} \right) \quad (11)$$

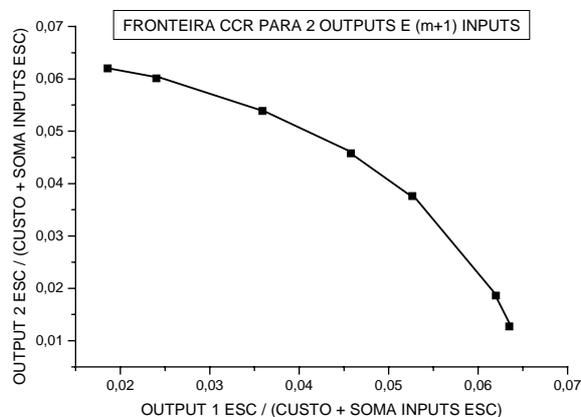


Figura 4 – Ilustração da fronteira esférica do MFE.

A representação da fronteira CCR do modelo para dois *outputs* e $(m + 1)$ *inputs* está representada na Figura 4. Devemos observar que os $(m + 1)$ *inputs* equivalem aos m *inputs* que influenciam na distribuição de F mais o custo f_j , incógnita do problema. Os dados representados na figura a seguir, de caráter meramente ilustrativo, foram retirados de Cooper *et al.* (2000).

A generalização do modelo para s *outputs* e m *inputs* para a distribuição de f_j entre as n DMUs, obtida por Avellar (2004), é a seguinte:

$$\frac{1}{R} = \frac{(F + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{x_{kj}}{a_k})}{\sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{r=1}^s \left(\frac{y_{rj}}{b_r}\right)^2}} ; f_j = \frac{(F + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{x_{kj}}{a_k}) \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^s \left(\frac{y_{rj}}{b_r}\right)^2}}{\sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{r=1}^s \left(\frac{y_{rj}}{b_r}\right)^2}} - \sum_{k=1}^m \frac{x_{kj}}{a_k} \quad (12)$$

4. Resultados Envolvendo Modelos com Soma Constante de Variáveis

4.1 Uma ilustração de alocação de um *output*

As eficiências e os resultados apresentados a seguir foram calculadas pelos *softwares* LINDO/PC – *release* 6.1, de 09/10/2000 e EMS – versão 1.3, de 15/08/2000.

Consideramos um problema de distribuição de *outputs* com soma constante, levando em conta a existência de dois *inputs*. Utilizando primeiramente o Modelo DEA Clássico para, em seguida, comparar os resultados obtidos com os resultados dos modelos GSZ e MFH.

Como iremos manter os *inputs* constantes, variando os *outputs* em busca de uma maior eficiência, utilizaremos a formulação DEA orientada a *outputs*, utilizando-se formulações BCC para o modelo GSZ e CCR para o modelo MFH. Os dados numéricos a serem simulados foram retirados de (Gomes *et al.*, 2001) e estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados para comparação entre os modelos GSZ e MFH.

DMU	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Output</i>	Eficiência DEA Clássico
A	163,7	1039,0	738,0	11,0%
B	18,3	362,0	4244,6	100,0%
C	271,8	7783,0	7405,4	100,0%
D	147,7	631,0	6644	100,0%
E	9,9	141,0	107,6	4,8%
F	0,3	5,0	169,2	100,0%
G	11,1	22,0	2237,8	100,0%
H	0,3	4,4	53,8	100,0%
<i>SOMA DOS OUTPUTS</i>			21600,4	

Na Tabela 2 mostramos os resultados de eficiência obtidas com o uso dos modelos GSZ e MFH.

Os valores dos *outputs* GSZ das DMUs A e E são mantidos constantes em relação aos *outputs* originais do problema porém, como pelo método GSZ a fronteira recua (Gomes *et al.*, 2001), a perda dos *outputs* das DMUs B,C,D,F e G com esse recuo é compensada com a soma dos valores 1442,4 e 201,0 aos *outputs* das DMUs A e E, respectivamente, como se vê na Tabela 2. Analisando os dados da mesma tabela observamos que o modelo MFH, que posiciona as DMUs em uma fronteira de formato forçosamente hiperbólico, garante eficiência máxima para todas as DMUs, ao contrário dos modelos GSZ e DEA Clássico (Tabela 1). Isso acontece mesmo utilizando-se a formulação CCR, lembrando que uma vez que uma unidade é eficiente no modelo CCR, obrigatoriamente ela o será no modelo BCC (Cooper *et al.*, 2000). Há que se considerar, todavia, que os dados de *inputs* deste problema apresentam uma variação muito grande, possivelmente aconselhando a utilização de um modelo BCC, e não CCR, para esse conjunto específico de pontos.

Tabela 2 – Resultado da comparação entre os modelos GSZ e MFH.

DMU	<i>Output Original</i>	<i>Output GSZ</i>	Eficiência BCC GSZ	<i>Output MFH</i>	Eficiência CCR MFH
A	738,0	(738,0+1442,4)	14,0%	3858,2	100,0%
B	4244,6	4104,4	100,0%	761,4	100,0%
C	7405,4	7315,2	100,0%	13606,8	100,0%
D	6644	5291,8	100,0%	2856,0	100,0%
E	107,6	(107,6+201,0)	5,3%	349,5	100,0%
F	169,2	163,8	100,0%	11,5	100,0%
G	2237,8	2182,4	100,0%	146,2	100,0%
H	53,8	53,8	100,0%	10,7	100,0%

O gráfico da Figura 5, a seguir, ilustra a distribuição dos pontos pelo modelo MFH, que utiliza por hipótese o lugar geométrico de formato hiperbólico.

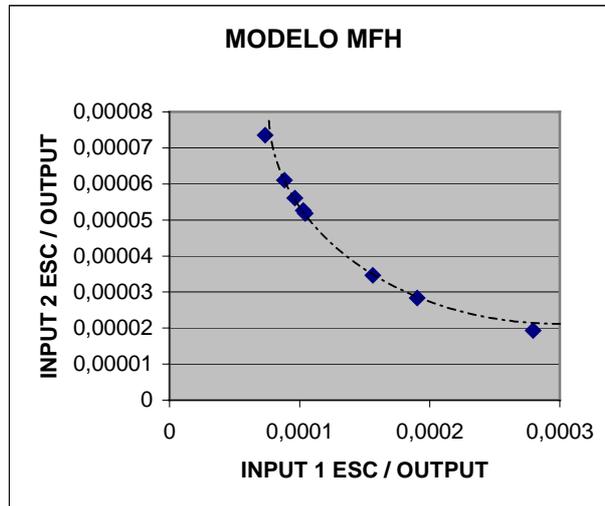


Figura 5 – Representação da fronteira hiperbólica do modelo MFH.

4.2 Uma ilustração de alocação de um *input*

Já no caso de um problema de alocação de *inputs*, que chamaremos de custos, no qual são levados em conta tanto *outputs* quanto *inputs* na distribuição, fizemos uma simulação comparando os modelos MFE, ACF e o modelo de Cook & Kress (1999). Devemos observar que o modelo MFE supõe como hipótese, a exemplo do modelo hiperbólico, que a massa de dados tenha ordens de grandeza aproximadas a fim de que a metodologia DEA-CCR (que supõe retorno de escala constante) seja corretamente utilizada. Os dados numéricos a serem simulados foram retirados de Beasley (2003) e estão ilustrados na Tabela 3. Pela característica da massa de dados dessa simulação, observamos que a utilização de um modelo DEA-CCR nesse caso é adequada.

Observando na Tabela 3 os dados referentes aos pares de DMUs 9 e 11 e 10 e 12, podemos notar que os mesmos se diferenciam somente em relação aos *outputs*, sendo seus *inputs* exatamente os mesmos. Como comentamos anteriormente, tanto o MFE quanto o ACF de Beasley (2003) são sensíveis a esta diferença. Logo, é de se esperar que os custos alocados para essas DMUs sejam influenciados pelos valores distintos de *outputs*. Já o modelo proposto por Cook & Kress (1999) não responde da mesma maneira, pois distribui custos influenciado somente pelos *inputs* envolvidos. Dessa forma, para Cook & Kress (1999), a distribuição é idêntica, tanto para as DMUs 9 e 11, quanto para 10 e 12.

Os resultados obtidos para as doze DMUs avaliadas, utilizando-se os modelos MFE, ACF de Beasley (2003) e o proposto por Cook & Kress (1999), estão representados na Tabela 4.

Tabela 3 – Dados para comparação entre os modelos de alocação de custos.

DMU	OUTPUT 1	OUTPUT 2	INPUT 1	INPUT 2	INPUT 3
1	67	751	350	39	9
2	73	611	298	26	8
3	75	584	422	31	7
4	70	665	281	16	9
5	75	445	301	16	6
6	83	1070	360	29	17
7	72	457	540	18	10
8	78	590	276	33	5
9	75	1074	323	25	5
10	74	1072	444	64	6
11	25	350	323	25	5
12	104	1199	444	64	6

Tabela 4 – Resultados da comparação entre os modelos de alocação de custos.

DADOS OBTIDOS	MFE	ACF – Beasley (2003)	Cook e Kress (1999)
f_1	7,79	6,78	14,52
f_2	7,84	7,21	6,74
f_3	7,62	6,83	9,32
f_4	8,02	8,47	5,60
f_5	7,35	7,08	5,79
f_6	10,46	10,06	8,15
f_7	6,45	5,09	8,86
f_8	8,26	7,74	6,26
f_9	10,78	15,11	7,31
f_{10}	9,81	10,08	10,08
f_{11}	2,69	1,58	7,31
f_{12}	12,93	13,97	10,08
TOTAL	100,0	100,0	100,0

Analisando agora apenas os modelos MFE e ACF, para uma distribuição de custos com atribuição de pesos única para os *inputs* e *outputs*, podemos reparar na Tabela 4 que os valores obtidos pelos dois modelos estão semelhantes, apesar da formulação utilizada nos modelos ser bem distinta.

Um fato a mais a ser observado é a distribuição única de pesos obtida pelos dois modelos. Como enfatizado por Beasley (2003), para uma distribuição de custos ser justa, segundo o autor, seria necessário haver um conjunto único de pesos (representados por α e β , respectivamente para *outputs* e *inputs*) que faria com que todas as DMUs atingissem eficiência 1 (ou 100%).

Tabela 5 – Comparação da distribuição dos pesos nos modelos ACF e MFE.

Pesos	ACF	MFE
α_1	0,071468	0,080257
α_2	0,013748	0,005635
β_1	0,000000	0,001755
β_2	0,115608	0,015385
β_3	0,425193	0,067538

O que ocorre é que na distribuição de pesos mostrada na Tabela 5 o peso β_1 , referente a *output* 1, tem valor zero no modelo ACF, ou seja, o *output* 1 não tem influência na distribuição de custos. Além da inconveniência óbvia dessa alocação, pois isso implica a desconsideração dessa variável, isso contraria a argumentação inicial que justifica a adoção de um peso único para todas as DMUs pois, a partir do momento em que uma variável é excluída, a distribuição passa a não ser mais justa. Já o modelo MFE mostrou maior coerência com a idéia de adoção de um peso único, pois todos os α e β apresentam valores diferentes de zero, como era de se esperar, dada a natureza do modelo.

5. Considerações Finais

Este trabalho propôs a utilização de modelos CCR de soma constante para a distribuição de *inputs* e *outputs* de modo a tornar as DMUs em questão DEA-eficientes. Os modelos propostos tiveram sua formulação baseada no perfil geométrico da fronteira DEA-CCR existente na literatura, podendo ser de formato hiperbólico ou esférico, dependendo da natureza das variáveis que se deseja distribuir. Foram realizadas comparações com modelos de soma constante já existentes na literatura, chegando-se à conclusão que os modelos aqui desenvolvidos são consistentes se aplicados a DMUs com ordens de grandeza de *inputs/outputs* semelhantes. Em contra-partida, os mesmos são limitados quando utilizados em problemas nos quais o uso de uma formulação com características de retorno de escala variável é mais adequada, pois nesse caso ocorre um super(sub)dimensionamento dos *outputs (inputs)* das unidades extremas, sendo que muitas vezes esses valores podem estar fora da realidade das DMUs envolvidas. Quando da formulação dos dois modelos não foi considerada a possibilidade de restrição nos pesos, sendo permitido para cada DMU escolher, em completa liberdade, os pesos para cada *input/output*, seguindo o formato original de DEA. Assim, trabalhos futuros podem ser desenvolvidos focalizando uma distribuição de *inputs* ou *outputs* com soma constante e com restrições de pesos ativa. Pesquisas também serão necessárias com o objetivo de se criar modelos BCC, que modelem DMUs com características de retorno de escala variável, suprindo as limitações dos modelos até aqui desenvolvidos. Cabe ressaltar ainda, que neste trabalho foram pressupostos, como hipóteses, lugares geométricos já conhecidos, na tentativa de simulação de fronteiras de formato côncavo e convexo já existentes na literatura. Pesquisas podem ser realizadas no sentido de se estudar as propriedades dessas formas funcionais mais adequadas à constatação teórica existente.

Referências Bibliográficas

- (1) Allen, R.; Athanassopoulos, A.; Dyson, R.G. & Thanassoulis, E. (1997). Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis. *Annals of Operations Research*, **73**, 14-25.
- (2) Avellar, J.V.G. (2004). Modelos DEA com soma constante de *inputs/outputs*. Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.
- (3) Banker, R.D.; Charnes, A. & Cooper, W.W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, **30**, 1078-1092.
- (4) Beasley, J.E. (2003). Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, **147**, 198-216.
- (5) Boussofiane, A.; Dyson, R.G. & Thanassoulis, E. (1991). Applied data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, **51**, 1-15.
- (6) Charnes, A.; Cooper, W.W. & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-444.
- (7) Charnes, A. & Cooper, W.W. (1985). Preface to topics in data envelopment analysis. *Annals of Operations Research*, **2**, 59-94.
- (8) Cook, W.D. & Kress, M. (1999). Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach. *European Journal of Operational Research*, **119**, 652-661.
- (9) Cooper, W.W.; Seiford, L.M. & Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis: A comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA – Solver Software*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- (10) Farrell, M.J. & Fieldhouse, M. (1962). Estimating efficient production functions under increasing returns to scale. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, 252-267.
- (11) Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B. & Lins, M.P.E. (2001). Modelos DEA com soma de *outputs* constante. *XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Campos do Jordão, SP.
- (12) Kozyreff, E. (2002). Um método para estimativa de metas DEA-eficientes. Trabalho de Graduação, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.
- (13) Lins, M.P.E.; Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B. & Soares de Mello, A.J.R. (2003). Olympic ranking based on a zero sum gains DEA model. *European Journal of Operational Research*, **148**, 312-322.
- (14) Soares de Mello, J.C.B.C.; Lins, M.P.E. & Gomes, E.G. (2001-a). Estimativa de planos tangentes à fronteira DEA em DMUs extremo-eficientes. Apresentado no *XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Campos do Jordão, SP.
- (15) Soares de Mello, J.C.C.B.; Gomes, E.G.; Lins, M.P.E. & Soares de Mello, A.J.R. (2001-b). Uso da Pesquisa Operacional em esportes: o caso das Olimpíadas, Boletim da SOBRAPO – Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional, Maio, **19**, 5-6.
- (16) Wei, Q.; Zhang, J. & Zhang, X. (2000). An inverse DEA model for *inputs/outputs* estimate. *European Journal of Operational Research*, **121**, 151-163.
- (17) Yan, H.; Wei, Q. & Hao, G. (2002). DEA models for resource reallocation and production *input/output* estimation. *European Journal of Operational Research*, **136**, 19-31.