

GERANDO PLANOS DE PRODUÇÃO ATRAVÉS DE UM PROBLEMA LINEAR QUADRÁTICO GAUSSIANO COM RESTRIÇÕES NAS VARIÁVEIS DE DECISÃO

Oscar S. Silva Filho

Centro de Tecnologia da Informação Renato Archer (CTI)
Campinas – SP, Brasil
oscar.salviano@cti.gov.br

* *Corresponding author* / autor para quem as correspondências devem ser encaminhadas

Recebido em 07/2006; aceito em 06/2009 após 1 revisão
Received July 2006; accepted June 2009 after one revision

Resumo

Neste artigo um problema sequencial de planejamento agregado da produção é formulado como um modelo de otimização sequencial do tipo Linear-Quadrático Gaussiano (LQG) com restrições probabilísticas nas variáveis de estado e controle. Este problema está baseado em um modelo clássico desenvolvido por Holt, Modigliani, Muth e Simon, e conhecido na literatura como modelo HMMS. Como ideia central do trabalho busca-se estender o modelo original HMMS de modo que ele possa levar em conta restrições de chance nas variáveis de decisão e também uma representação do tipo ARMA como modelo de flutuação de demanda. Essencialmente, o artigo examina as principais características que permitem transformar o modelo HMMS para um padrão LQG com restrições de chances. Além disso, duas heurísticas subótimas muito simples são apresentadas como estratégias de resolução para este tipo de problema. Por fim, um exemplo ilustrativo de como gerar planos de produção agregados via o modelo proposto, é apresentado.

Palavras-chave: planejamento da produção; hierarquia de decisões; controle estocástico; controle subótimo; previsão.

Abstract

A single product, multi-period, aggregate production planning problem is formulated as a Linear-Quadratic Gaussian (LQG) optimal control problem with probabilistic constraints on state and control variables. This stochastic problem is based on a classical model developed by Holt, Modigliani, Muth and Simon, and known in the literature as HMMS model. The central idea is to extend the original HMMS model in order to take into account both chance-constraints on the decision variables and an ARMA forecasting model to represent the fluctuation of demand. Essentially, the paper discusses the main features that allow transforming the problem into a chance constrained LQG pattern. In addition, two sub-optimal techniques for solving this kind of problem are briefly described. At last, an illustrative example of how to provide aggregate production plans from the proposed problem is presented.

Keywords: production planning; decision-making hierarchy; stochastic control; sub-optimal control; forecasting.

1. Introdução

O processo de planejamento da produção requer um conjunto de decisões que são usadas para adaptar os recursos industriais da companhia no sentido de satisfazer a demanda externa. A natureza do processo de planejamento depende de fatores específicos que são, via de regra, encontrados no ambiente interno de qualquer organização produtiva. Entre eles, dois fatores são muito importantes: o tipo de sistema manufatura e o processo hierárquico de tomada de decisão. O primeiro fator descreve as características físicas e lógicas do processo de operação da produção. De forma genérica, é possível distinguir entre três tipos de sistemas de manufatura, que são frequentemente denominados de sistemas contínuos, intermitentes e repetitivos; para detalhes vide Higgins *et al.* (1996) e Papadopoulos *et al.* (1993). Dependendo do tipo de sistema, a gerência pode ser forçada a usar diferentes técnicas de planejamento com objetivo de construir seu conjunto apropriado de decisões. Por exemplo, em um sistema do tipo intermitente a ênfase é dada ao planejamento de curto prazo por produtos customizados, uma vez que se trata de uma produção *orientada à encomenda*; enquanto que, num outro extremo, um sistema tipo repetitivo requererá essencialmente ênfase no planejamento de longo prazo por produtos padronizados, uma vez que tal sistema tem sua produção *orientada a estoque*. Pode-se concluir, assim, que o sistema intermitente requer uma estratégia de produção altamente focada na capacidade de produção necessária ao atendimento de uma demanda volátil, que não pode ser conhecida antecipadamente ou mesmo prevista. Por outro lado, o sistema repetitivo requer uma estratégia de planejamento que leva em conta que a flutuação de demanda, em períodos futuros, pode ser estimada a partir de dados históricos da companhia. Assim sendo, para sistemas repetitivos, o desenvolvimento de estratégias baseadas em *estoques de segurança* para lidar com as flutuações de demanda em períodos futuros, é uma forma de garantir níveis adequados de *serviço ao cliente* (Yildirim *et al.*, 2005).

O segundo fator enfatiza o processo hierárquico de planejamento de uma organização, como a abordagem clássica hierárquica envolvendo os níveis estratégico, tático e operacional de tomada de decisão; vide Hax & Candea (1984). É interessante observar que a quantidade de informação necessária para tomada de decisão depende essencialmente do nível hierárquico onde a decisão é tomada. Por exemplo, nos níveis tático e operacional onde, respectivamente, há forte influência de gerentes planejando as atividades de médio prazo da companhia e de administradores executando as operações de curto prazo, a quantidade de informação necessária para tomada de decisão é bastante elevada. Nestes níveis, problemas *bem-estruturados*, baseados em técnicas da programação matemática e de controle ótimo, são praticamente inaplicáveis. Em tais casos, somente problemas *semi-estruturados*, cuja solução depende de heurísticas criadas especialmente para lidar com eles, são as opções existentes; vide, para detalhes, por exemplo, Bahl *et al.* (1987), Bensoussan & Proth (1983), Dellaert & De Kok (2004) e Gershwin *et al.* (1986). Por outro lado, no nível estratégico de decisão, as informações são tomadas em um padrão essencialmente agregado. Isto significa que a quantidade de dados requerida para a tomada de decisão é muito inferior ao encontrado nos demais níveis da hierarquia. Como consequência, os problemas formulados neste nível podem ser descritos como *bem-estruturados* (Bensoussan & Proth, 1983). Na prática isto significa que existem muitas oportunidades de aplicação das técnicas de programação matemática e de controle ótimo disponíveis na literatura, conforme discutido em Gershwin *et al.* (1986). Típicos problemas de gerenciamento encontrados neste nível são aqueles que produzem planos agregados de negócio, marketing, produção, dentre outros, para tomada de decisão de longo prazo; para mais detalhes vide, por exemplo, Higgins *et al.* (1996), Kleindorfer (1978) e Neck (1984).

Baseado no exposto acima, o objetivo deste trabalho é desenvolver um plano agregado de produção, para um sistema de manufatura do tipo *orientado a estoque*, como resultado da solução de um problema de planejamento da produção estocástico do tipo *bem-estruturado*. Basicamente, este plano de produção consiste em determinar metas ótimas de estoque, produção e mão de obra, que permitam satisfazer a demanda ao longo de um horizonte de planejamento de 12 meses. Este plano de produção é desenvolvido dentro de um ambiente produtivo, dinâmico e incerto, onde o processo de tomada de decisão necessita ser constantemente atualizado de modo a reagir a inconsistências devidas a fatores exógenos como as flutuações da demanda, ou a fatores endógenos como quebra de equipamentos, atrasos de materiais, dentre outros; vide Hackman *et al.* (2002), Higgins *et al.* (1996), Silva Filho & Ventura (1999) e Yildirim *et al.* (2005). Como consequência, problemas de otimização estocástica não sequencial no tempo (ou seja, problemas ditos *estáticos*) não são úteis para representar ambientes produtivos caracterizados por uma dinâmica temporal estocástica (Sahinidis, 2004). Ademais, qualquer plano de produção que seja desenvolvido a partir de um problema de otimização não sequencial produz somente metas congeladas, que ignoram completamente as incertezas futuras sobre a demanda. Pode-se concluir, portanto, que para que um plano de produção seja considerado realístico para o propósito de tomada de decisão organizacional, ele deve ser fornecido a partir de um problema que leve em conta a dinâmica temporal do processo produtivo e as incertezas associadas. Assim sendo, problemas de otimização sequencial estocástico, formulados a partir da teoria da programação dinâmica e da teoria de controle ótimo podem ser vistos como opções apropriadas de modelagem para este tipo de problema de planejamento da produção; vide Cheng *et al.* (2004), Kleindorfer (1978), Silva Filho & Cezarino (2004) e Yildirim *et al.* (2005).

Com o propósito de fornecer um plano agregado de produção, este artigo propõe a formulação de um problema estocástico sequencial baseado no modelo clássico de planejamento agregado desenvolvido originalmente por Holt, Modigliani, Muth & Simon e conhecido como modelo HMMS; vide Holt *et al.* (1960). Este modelo fornece uma regra de decisão linear para se determinar os níveis de estoque, produção e mão de obra para cada período de um dado horizonte de planejamento. Tais níveis são considerados ótimos à medida que minimizam os custos quadráticos esperados, necessários para operação do sistema produtivo. Além disso, o modelo HMMS tem sido considerado uma importante contribuição para as decisões de planejamento agregado da produção, sendo extensivamente usado na literatura. De fato, desde que Holt *et al.* (1960) introduziram esse modelo, uma grande quantidade de contribuições relacionadas tem sido proposta na literatura, sendo, quase sempre, variações do modelo original (Hax & Candea, 1984). Apesar da importância prática do modelo HMMS, muitas críticas a respeito de sua aplicabilidade ainda permanecem em discussão, como por exemplo, o fato do modelo HMMS usar custos quadráticos; ou de não levar em conta restrições físicas explicitamente na formulação do modelo. A primeira crítica é derrubada pelo argumento de que custos quadráticos são um interessante meio de avaliar um processo produtivo. Por exemplo, o custo quadrático de estoque permite penalizar tanto excesso quanto falta de estoque; vide Parlar (1985). A segunda crítica, por outro lado, é essencialmente mais próxima da realidade. De fato, a ausência de restrições físicas, consideradas explicitamente na formulação do problema, pode fazer com que a solução do problema seja pouco confiável, podendo, até mesmo, tornar-se uma meta “desastrosa” para administração da companhia. Note que o esquema clássico de penalizar restrições diretamente no critério é usualmente complexo por causa do tedioso esquema de *tentativa e erro* de busca dos parâmetros de ponderação; vide Vajda (1972).

O modelo HMMS pode ser visto como um caso especial do problema Linear Quadrático Gaussiano (LQG) irrestrito em termos de suas variáveis de estado e controle, cuja solução malha-fechada é determinada exatamente através da equação recursiva de Riccati (Anderson & Moore, 1979). Isto explica a proposição de muitos trabalhos na literatura que utilizam o modelo HMMS no formato LQG; vide, por exemplo, Dobos (2003), O’Grady & Bonney (1984), Parlar (1985), Shen (1994), Singhal & Singhal (1996), e as referências associadas aos mesmos. Contrastando com este tipo de enfoque analítico, o presente artigo propõe considerar o modelo clássico HMMS através de um modelo LQG sequencial no tempo, que considera simultaneamente, em sua formulação, restrições de chance nas principais variáveis de decisão e, também, inclui, de modo integrado, um modelo autorregressivo média-móvel (ARMA) para representar as flutuações de demanda.

Por causa de algumas características particulares do problema LQG, aqui proposto, – tais como: alta dimensionalidade do problema, restrições de chance nas variáveis de decisão e a natureza aleatória do sistema de balanço de estoque – obter uma solução ótima global é uma tarefa de elevada complexidade computacional, sendo muitas vezes impossível do ponto de vista prático; vide, para maiores comentários, por exemplo, Cheng *et al.* (2004), Neck (1996), Bertsekas (1995), Iserman (1981), Anderson & Moore (1979), Bryson & Ho (1975) e Vadja (1972). Assim, para superar as dificuldades que inviabilizam a geração de uma solução ótima global, procedimentos subótimos, provenientes da teoria de programação matemática e controle ótimo estocástico, têm sido considerados na literatura. Estes procedimentos impõem simplificações ao problema estocástico original, facilitando, assim, sua implementação e solução computacional; vide, para detalhes, Silva Filho & Cezarino (2004), Bertsekas (1995), Lassere *et al.* (1985) e Pekelman & Rausser (1978).

Note que a natureza linear quadrática gaussiana do modelo de otimização, em estudo, facilita a aplicação de uma importante proposição da teoria de otimização, que é conhecida como *princípio da equivalência à certeza*; vide Bertsekas (1995) e Bryson & Ho (1975). Este princípio estabelece que um dado problema estocástico pode ser transformado em um problema equivalente, porém determinístico, no qual todas as variáveis aleatórias existentes são fixadas iguais aos seus valores médios, ou seja, em seus primeiros momentos estatísticos. A principal vantagem do problema determinístico equivalente é que ele é mais fácil de ser resolvido do que a sua versão original. Além disso, propriedades – como linearidade e convexidade do problema original – são preservadas nesta formulação equivalente; vide Silva Filho (1999) e Lassere *et al.* (1985).

O artigo é organizado como segue: na seção 2, um problema de planejamento agregado da produção, baseado no modelo clássico HMMS, é formulado no padrão de espaço de estado do modelo LQG com restrições nas variáveis de decisão. Os componentes do custo HMMS são apropriadamente re-arranjados para garantir a coerência com a representação em espaço de estado da formulação LQG. Adicionalmente, o modelo entrada-saída ARMA, usado para descrever a flutuação de demanda, é transformado para o formato espaço de estado e integrado diretamente à formulação proposta. Na seção 3, um problema determinístico equivalente é desenvolvido como resultado da aplicação do *princípio da equivalência à certeza*. Dois procedimentos heurísticos muito simples, que preservam a natureza sequencial do problema, são apresentados como esquema de solução. Finalmente, a seção 4 introduz um exemplo ilustrativo para demonstrar a aplicabilidade do modelo. Adicionalmente, este exemplo mostra, também, a aplicação de uma das heurísticas apresentadas na seção anterior e seu emprego na criação de cenários de produção.

2. Modelagem do Problema de Planejamento da Produção

Nesta seção, o modelo de tomada de decisão sob incerteza para planejamento agregado da produção desenvolvido por Holt *et al.* (1960; cap.6) é convertido a um problema LQG com restrições nas principais variáveis de decisão.

2.1 O modelo clássico HMMS sob incerteza

O modelo HMMS representa um problema de planejamento agregado da produção. Nele, diferentes produtos são agrupados em famílias caracterizadas por similaridades como tipo, forma, taxa de produção, sequenciamento de máquina e etc. Da solução deste modelo, uma regra de decisão linear é estabelecida. Tal regra permite conhecer, de forma otimizada, os níveis agregados de estoques, produção e mão-de-obra para cada família de produtos. Esta solução analítica é resultado direto da minimização de um custo quadrático que penaliza, segundo um padrão de referência estabelecido pelo usuário, as variáveis de estoque, produção e mão de obra (Holt *et al.*, 1960).

Para cada família de produtos e período de tempo discreto, denotado por k , seguem as seguintes notações importantes para os desdobramentos subsequentes:

2.1.1 As variáveis do problema

- D_k denota a demanda relacionada com uma dada família de produtos. Ela representa o nível agregado de venda de uma dada família durante o período k , sendo assumida aqui como uma variável aleatória. Segundo Graves (1999), em sistemas de manufatura orientados a estoque, onde a família de produtos é ofertada ao mercado como *commodities*, a evolução da demanda ao longo dos períodos de planejamento pode ser aproximada por um processo estacionário *normalmente* distribuído. Baseado nisto, uma função distribuição de probabilidade *normal*, com média \hat{D}_k e variância $\sigma_D^2 \geq 0$ finita, é empregada para descrever o comportamento estatístico da demanda.
- I_k denota o nível agregado de estoques no início do período k . Esta variável toma valores de uma equação dinâmica de balanço de estoque que depende linearmente da flutuação do nível de demanda agregada ao longo do tempo. Baseado na propriedade de um *processo estocástico normal* – que diz que *a transformação linear resultante da soma de uma sequência de variáveis aleatórias normais é também um processo Normal*; vide Pappoulis (1991) – é possível considerar que a variável de estoques é também uma variável aleatória *normal* com média \hat{I}_k e variância $\sigma_I^2(k) \geq 0$.
- P_k denota o nível agregado de produção no período k , sendo uma variável de decisão do problema. Observe que se, por exemplo, o sistema de balanço de estoques estiver operando sob um esquema de realimentação do tipo malha-fechada (Bryson & Ho, 1975), então a taxa de produção dependerá do nível de estoques observado no início do período k , sendo, portanto, também, uma variável aleatória. Além disso, se tal dependência é linear, então a função de distribuição de probabilidade da variável de produção será similar à função de distribuição da variável de estoques, ou seja, para o estudo em questão, uma distribuição *Normal* com média \hat{P}_k e variância $\sigma_P^2(k) \geq 0$.

- W_k denota a quantidade de mão-de-obra regular utilizada no período k , sendo também uma variável de decisão do problema. Esta variável é assumida independente de fatores endógenos e exógenos relacionados ao ambiente de produção. A razão disto é que já existe um nível pré-fixado de mão-de-obra regular disponível e, assim, qualquer excesso nos níveis de flutuação de demanda, que envolva um aumento do volume de produção, será tratado com uma política de utilização de mão-de-obra temporária ou, mesmo, com o uso de horas-extras. Como consequência, esta variável é assumida como essencialmente determinística.

2.1.2 Os componentes do custo HMMS

Seguindo Holt *et al.* (1960), o custo total relacionado ao modelo HMMS, denotado aqui por $J_k(I_k, P_k, W_k)$, é dado pela soma de funções tanto lineares quanto quadráticas, cujos componentes são descritos abaixo:

- $C_1 \times W_k + C_{13}$ denota o custo com folha de pagamentos, sendo C_1 e C_{13} constantes de ajustes dos níveis de mão-de-obra.
- $C_2 \times (W_k - W_{k-1} - C_{11})^2$ denota o custo com contratação e demissão de mão de obra. Tal custo associa-se com a modificação no tamanho da mão-de-obra do período $k-1$ ao período k . A constante C_{11} pode ser usada para análise de assimetria de custo relacionada ao processo de contratação e dispensa de mão de obra.
- $C_7 \times [I_k - (C_8 + C_9 \times D_k)]^2$ representa o custo devido à armazenagem do recurso e aos pedidos não atendidos. O componente $C_8 + C_9 \times D_k$ denota o nível de referência desejado para o estoque I_k , ao longo de cada período do horizonte de planejamento. Assim, sempre que o nível de estoque real I_k desvia-se do nível de referência desejado, para mais ou para menos, este custo tenderá a aumentar proporcionalmente.
- $C_3 \times (P_k - C_4 \times W_k)^2 + C_5 \times P_k - C_6 \times W_k + C_{12} \times P_k \times W_k$ representa o custo excedente, que depende tanto do nível de mão-de-obra quanto do nível de produção durante o período k . É interessante observar que o termo $C_4 \times W_k$ denota a quantidade máxima de famílias de produtos que podem ser produzidos sem uso de horas extras.

É importante acrescentar que as constantes C_i devem ser estimadas pelo usuário (Holt *et al.*, 1955). Estas estimativas, por seu turno, requerem atividades que consomem muito tempo, como: análises estatísticas, informações contábeis e, principalmente, muito conhecimento e sentimento dos responsáveis pelas atividades gerenciais da organização. É também comum, o uso de curva de ajustes realizar as estimativas destas constantes; vide, por exemplo, Hax & Candea (1984).

Utilizando a notação discutida acima, a versão não determinística do modelo HMMS pode ser formulado como um problema de controle ótimo estocástico como se segue (Bertsekas, 1995):

$$\begin{aligned} \underset{\{P_k, W_k; k=0,1,\dots,N-1\}}{\text{Min}} \quad & E \left\{ J_N(I_N, W_N) + \sum_{k=0}^{N-1} J_k(I_k, P_k, W_k) \right\} \\ \text{s.a.} \quad & I_{k+1} = I_k + P_k - D_k \end{aligned} \tag{1}$$

onde

$$J_k(I_k, P_k, W_k) = (C_1 - C_6) \times W_k + C_2 \times (W_k - W_{k-1} - C_{11})^2 + C_3 \times (P_k - C_4 \times W_k)^2 + C_5 \times P_k + C_{12} \times P_k \times W_k + C_7 \times (I_k - C_8 - C_9 \times D_k)^2 + C_{13}$$

Algumas observações extraídas a partir de (1) são: a) $E\{\cdot\}$ denota o operador de esperança matemático, que é necessário em virtude da demanda D_k que afeta a equação de balanço de estoque ser uma variável aleatória estacionária com distribuição conhecida; b) os níveis iniciais de estoque e de mão-de-obra são conhecidos e dados, respectivamente, por I_0 e W_0 ; c) para ajuste do modelo matemático é assumido que $W_{-1} = 0$.

A solução ótima global do problema (1) pode ser obtida através do algoritmo de *programação dinâmica*, para casos particulares de pequena (Bertsekas, 1995); ou, usando o *princípio da equivalência-certeza* que utiliza o fato do problema ter uma dinâmica linear, custos quadráticos e as variáveis aleatórias envolvidas serem estacionárias com distribuição perfeitamente conhecida para obter uma solução ótima analítica derivada dos métodos da Teoria de Controle (Bryson & Ho, 1975). Esta solução ótima é discutida por Holt *et al.* (1960), no capítulo 6, sendo denominada de *regra de decisão linear sob incerteza*. Além disto, usando este mesmo princípio, é possível realizar simplificações no modelo (1), obtendo assim um modelo equivalente, porém determinístico. Com isto, uma solução aproximada (subótima) pode ser gerada a partir da aplicação de técnicas de programação matemática disponíveis na literatura (Cheng *et al.*, 2004).

2.2 O modelo HMMS sob incerteza com restrições nas variáveis de decisão

Contrastando com o modelo clássico HMMS, dado em (1), o modelo formulado nesta seção considera explicitamente restrições físicas relacionadas com as variáveis de estoque, produção e mão-de-obra. É fato que o uso de restrições diretamente no modelo torna-o mais realista para aplicações práticas, como atestam vários autores na literatura; vide por exemplo, Kleindorfer (1978), Hax & Candea (1984) e Lassere (1985). O modelo HMMS formulado, portanto, como um problema estocástico de planejamento da produção com restrições nas variáveis de decisão, é matematicamente descrito como segue: determine as sequências ótimas de produção e mão-de-obra, dadas respectivamente por $\{P_k^* = \mu(I_k); k = 0, 1, \dots, N-1\}$ e $\{W_k^*; k = 0, 1, \dots, N-1\}$, que resolvem o seguinte problema de otimização estocástica:

$$\text{Min}_{P_k, W_k; k=0,1,\dots,N-1} E \left\{ J_N(I_N, W_N) + \sum_{k=0}^{N-1} J_k(I_k, P_k, W_k) \right\} \quad (a)$$

s.a.

$$I_{k+1} = I_k + P_k - D_k, \quad E\{I_0\} = I_0 \quad (b)$$

$$W_{k+1} = W_k, \quad W_0 \text{ dado} \quad (c) \quad (2)$$

$$\text{Prob.}(\underline{I}_k \leq I_k \leq \bar{I}_k) \geq \alpha \quad (d)$$

$$\text{Prob.}(\underline{P}_k \leq P_k \leq \bar{P}_k) \geq \beta \quad (e)$$

$$0 \leq W_k \leq \bar{W}_k \quad (f)$$

onde $\text{Prob}(\cdot)$ denota o operador probabilístico, com α e β representando índices de probabilidade. Os pares $(\underline{I}_k, \bar{I}_k)$ e $(\underline{P}_k, \bar{P}_k)$ representam os limitantes físicos das variáveis de estoque e produção para cada período k , respectivamente, e \bar{W}_k denota a

quantidade máxima utilizada de mão de obra estabelecida para um dado período k . Note que \bar{W}_k abrange o nível de mão de obra em jornada regular mais a quantidade permitida de mão de obra em atividade de hora-extra.

Note que, como mencionado na subseção 2.1.1, a variável de estoque é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida. Como consequência disto, ao se assumir a variável de produção $\{P_k = \mu(I_k)\}$ como dependente do estoque observado no início de cada período k (ou seja, de I_k), a variável de produção será também uma variável aleatória do problema (2). Observe que a dependência de P_k com I_k segue uma estrutura matemática formalizada aqui pela função $\mu(\cdot)$. Particularmente, se $\mu(\cdot)$ é assumida ser linear, então a variável P_k terá uma distribuição de probabilidade similar à distribuição de probabilidade da variável de estoque I_k . Por conseguinte, desde que I_k é assumida normalmente distribuída, segue então que P_k será completamente caracterizada por sua média \hat{P}_k e variância $\sigma_P^2(k) \geq 0$.

De modo a garantir a factibilidade de solução do problema (2), na medida que as restrições das variáveis aleatórias de estoque e produção são mantidas explicitamente na formulação deste problema, torna-se necessário considerar tais restrições em probabilidade. Com isto justifica-se a presença das restrições de chance (2.d) e (2.e). Ainda dentro deste contexto, é interessante mencionar que o índice probabilístico α referente a restrição (2.d), selecionado no intervalo $[\frac{1}{2}, 1)$, é um indicador do nível de qualidade de serviço a ser seguido pela companhia. De fato, se o gerente escolher, por exemplo, $\alpha = 0,90$, significa que ele espera satisfazer os clientes, em pelo menos 90% das vezes, com a entrega de produtos nos prazos combinados. Neste caso, a estratégia é reduzir significativamente qualquer possibilidade de ocorrência de *ruptura de estoque*, aumentando, assim, os níveis de estoque de segurança da família de produtos em períodos futuros do horizonte de planejamento. Deste modo, ao variar α na faixa $[\frac{1}{2}, 1)$, o gerente pode analisar diferentes políticas de produção relacionadas à satisfação do cliente. De modo semelhante, o índice probabilístico β adotado pela restrição probabilística de produção (2.e), representa o nível de confiança do administrador de produção quanto à não violação dos limites mínimo e máximo físicos de capacidade de produção disponível ao longo de cada período k . Assim, ao expressar um nível de confiança superior a 90% (ou seja, $\beta = 0,90$), a gerência impõe limites mais restritivos de capacidade do que os físicos, garantindo que possíveis excessos de produção – devido a uma demanda irregular – não afetem a capacidade real de produção da empresa. Particularmente, isto permite garantir que pedidos futuros não previstos sejam atendidos, evitando a ocorrência de atrasos de produção; vide Silva Filho & Ventura (1999).

2.3 O modelo HMMS no formato de espaço de estado

O objetivo agora é transformar o modelo HMMS, dado em (2), para uma formulação do tipo Linear Quadrático Gaussiano (LQG) baseada no domínio de espaço de estado; vide Bryson & Ho (1975)). Seguindo esquema semelhante ao adotado por Shen (1994) e O'Grady & Bonney (1984), as variáveis de decisão do problema (2) são convertidas em variáveis de estado ($x_k^1 = I_k$ e $x_k^2 = W_{k-1}$) e variáveis de controle ($u_k^1 = P_k$ e $u_k^2 = W_k$). Com base nestas notações, o processo de transformação pode ser executado como segue:

2.3.1 Equações de balanço do problema no padrão de espaço de estado

Duas são as equações de balanço do problema, a saber: uma é a equação linear 2.(b) que denota o balanço econômico de estoque, enquanto a outra é a equação linear 2.(c) que representa o equilíbrio na utilização do recurso de mão de obra regular entre dois períodos consecutivos de tempo. Estas duas equações podem ser agrupadas na forma de um vetor de estados, como expresso a seguir:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_k^1 \\ u_k^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot D_k \quad (3)$$

onde foi fixado que $x_{k+1}^2 = W_k = u_k^2$; para detalhes, vide Shen (1994). Como discutido na subseção 2.1.1, D_k é uma variável aleatória que representa o nível de incerteza relacionado à flutuação de demanda ao longo dos períodos do horizonte de planejamento. Como consequência desta exogeneidade, o sistema dado em (3) é corrompido e a variável de estoque x_k^1 torna-se uma variável aleatória com função de distribuição de probabilidade que segue o mesmo padrão da distribuição de demanda D_k . Em particular, tendo em vista que se assume D_k como sendo uma variável aleatória estacionária *normal*, decorre então que x_k^1 terá uma distribuição normalmente com os dois primeiros momentos estatísticos calculados a partir de expressões da média $\hat{x}_k^1 = \hat{I}_k$ e da variância $\sigma_{x^1}^2(k) = \sigma_I^2(k) \geq 0$, determinados a partir do sistema de balanço (3); vide Silva Filho (1999).

2.3.2 Incluindo um modelo de previsão na equação de balanço (3)

Nesta seção, o sistema de balanço (3) expresso na forma de equação de estado será ampliado com a introdução de um modelo de previsão para representar as flutuações da demanda D_k . A ideia básica é generalizar o sistema de balanço (3), permitindo que o problema de planejamento agregado da produção esteja mais alinhado com a realidade do ambiente organizacional, tendo em vista que tal ambiente está sempre sujeito às intempéries do mercado.

Considerando que toda informação sobre o comportamento passado da demanda por uma determinada família de produtos tenha sido coletada pela companhia em históricos de venda, é possível desenvolver modelos quantitativos que modelem o comportamento corrente da demanda e, ao mesmo tempo, permitam estimar como será seu futuro num dado horizonte de tempo. Dentre estes modelos pode-se destacar, por sua eficiência e aplicabilidade, os *autorregressivos média-móvel* (ARMA), vide para detalhes Box *et al.* (1995).

Neste estudo, adota-se um modelo ARMA para representar as flutuações de demanda. A representação paramétrica tipo entrada-saída deste modelo é aqui transformada para a forma de vetor de estado e incorporada ao modelo de balanço econômico definida pelo sistema (3). Essa transformação segue parcialmente o esquema descrito em Sastri (1985); antes, porém, de realizar tal transformação, deve-se considerar que a variável D_k pode ser decomposta em duas outras variáveis, como segue: $D_k = \hat{D}_k + \delta D_k$. Note que a primeira variável \hat{D}_k denota o comportamento médio da demanda, enquanto a segunda, δD_k , representa uma variável aleatória estacionária, *normalmente* distribuída com média nula e variância finita $\sigma_D^2 \geq 0$.

Um modelo ARMA(p,q) é usado para representar a variabilidade da componente δD_k . Esta representação segue o modelo clássico paramétrico de entrada-saída:

$$\delta D_k = \left[\frac{\eta_0 + \eta_1 \cdot z^{-1} + \dots + \eta_q \cdot z^{-q}}{1 + \pi_1 \cdot z^{-1} + \dots + \pi_p \cdot z^{-p}} \right] \cdot \varepsilon_k \quad (4)$$

onde ε_k denota um ruído branco, ou seja, uma variável com média zero e desvio padrão unitário; e z^{-1} representa o operador atraso (por exemplo, $z^{-1}\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1}$). Os parâmetros definidos pelas sequências $\{\pi_1 \pi_2 \dots \pi_p\}$ e $\{\eta_0 \eta_1 \dots \eta_q\}$ são, respectivamente, os parâmetros dos polinômios autorregressivo e média-móvel do modelo ARMA, com ordens p e q .

Após algumas manipulações algébricas, o modelo (4) pode ser convertido em um modelo equivalente no formato de vetores de estado, que é dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{k+1} = G \cdot \mathbf{v}_k + \lambda \cdot \varepsilon_k \\ \delta D_k = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{v}_k + \eta_0 \cdot \varepsilon_k \end{cases} \quad (5)$$

onde a variável $\mathbf{v}_k = [x_k^3 \ x_k^4 \ \dots \ x_k^{p+2}]^T$ denota um vetor de estados. Note que o sistema (5) é a representação na forma de estados do modelo entrada-saída (4), cujas matrizes e vetores são dadas como segue:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\pi_p & -\pi_{p-1} & -\pi_{p-2} & \dots & -\pi_1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{p \times p}; \quad \lambda^T = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1] \in \mathfrak{R}^p; \quad e$$

$$\mathbf{f}^T = [f_p \ f_{p-1} \ f_{p-2} \ \dots \ f_1] \in \mathfrak{R}^p$$

onde $f_p = (\eta_p - \eta_0 \cdot \pi_p)$, $f_{p-1} = (\eta_{p-1} - \eta_0 \cdot \pi_{p-1})$, \dots , $f_1 = (\eta_1 - \eta_0 \cdot \pi_1)$.

É importante ainda acrescentar que, para possibilitar a conversão de (4) para a forma de estados (5), é necessário satisfazer a *condição de confiabilidade* (“reliability condition”; vide Iserman (1981)). Esta condição indica que o modelo paramétrico definido em (4), para ser estável, tem de manter a relação $p \geq q$, caso contrário o modelo (4) não poderá ser realizável. Como consequência disto, todos os parâmetros Média-Móvel, para os quais se verifica que $p > q$, serão considerados nulos, ou seja, $\eta_p = \eta_{p-1} = \dots = \eta_{q+1} = 0$.

Finalmente, manipulando as equações (3), (4) e (5), é possível obter uma expressão geral no contexto do padrão de espaço de estado para representar o balanço econômico da organização. Esta representação é dada como segue:

$$\mathbf{x}(k+1) = A \mathbf{x}(k) + B \mathbf{u}(k) - \mathbf{d}(k) \quad (6)$$

onde $\mathbf{x}(k)^T = [x_k^1 \ x_k^2 \ x_k^3 \ \dots \ x_k^{p+2}]$; $\mathbf{u}(k)^T = [u_k^1 \ u_k^2]$; e $\mathbf{d}(k) = \mathcal{G} \cdot \hat{D}_k + \varphi \cdot \varepsilon_k$. Note que o vetor aleatório $\mathbf{d}(k)$ é exclusivamente influenciado pela variável de demanda D_k que tem distribuição assumida como *normal*. Como consequência, $\mathbf{d}(k)$ é completamente identificado

pela média $\hat{\mathbf{d}}(k) = \mathcal{G} \cdot \hat{D}_k$ e pela matriz de covariância $\Omega_d(k) = \sigma_D^2 \cdot [\varphi \cdot \varphi^T]$. As demais matrizes e vetores do sistema (6) são dados a partir de (5), respectivamente, por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & f_p & f_{p-1} & f_{p-2} & \cdots & f_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -\pi_p & -\pi_{p-1} & -\pi_{p-2} & \cdots & -\pi_1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(p+2) \times (p+2)}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(p+2) \times 2};$$

$$\mathcal{G}^T = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0] \in \mathfrak{R}^{(p+2)}; \quad e \quad \varphi = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] \in \mathfrak{R}^{(p+2)}$$

2.3.3 Incluindo restrições físicas no problema

É assumido que as variáveis de estoque x_k^1 , de produção u_k^1 e de mão de obra x_k^2 tomam valores de conjuntos finitos e pré-definidos pela administração. Uma vez que a equação de balanço de estoque do sistema (3) é um processo estocástico, torna-se impossível garantir que as variáveis de estoque e produção não irão violar suas respectivas restrições em algum período do horizonte de planejamento. Como discutido anteriormente, na seção 2.2, uma maneira de preservar as restrições no problema, garantido pelo menos em chances de que elas não serão violadas, consiste em tomá-las em probabilidade. Com base nestas considerações, as restrições formuladas em (2.d-f) são agora apresentadas no formato de espaço de estado, como segue:

$$Prob.(\underline{x}_k^1 \leq x_k^1 \leq \bar{x}_k^1) \geq \alpha \tag{a}$$

$$Prob.(\underline{u}_k^1 \leq u_k^1 \leq \bar{u}_k^1) \geq \beta \tag{b} \tag{7}$$

$$0 \leq x_k^2, u_k^2 \leq \bar{x}_k^2 \tag{c}$$

onde $\underline{x}_k^1 = \underline{I}_k$ e $\bar{x}_k^1 = \bar{I}_k$ representam, respectivamente, os níveis de estoque de segurança e de capacidade máxima de armazenamento permitida ao longo dos períodos; de modo semelhante $\underline{u}_k^1 = \underline{P}_k$ e $\bar{u}_k^1 = \bar{P}_k$ representam as capacidades mínima e máxima de produção, respectivamente; e $\bar{x}_k^2 = \bar{W}_k$ denota o nível máximo da mão-de-obra permitida pela companhia.

2.3.4 O critério funcional

O objetivo é substituir os componentes de custo do modelo original HMMS, dados em (1) através da função $J_k(\cdot)$, por uma representação matricial na forma de espaço de estado. Por simplicidade, assume-se que os componentes de custo C_{11} e C_{13} são iguais a zero; vide Shen (1994) e O’Grady & Bonney (1984). A razão desta suposição é que esses componentes de custos não afetam a escolha das variáveis de entrada do problema, definidas pelos níveis de

produção e mão de obra e, portanto, podem ser completamente ignorados. Além disso, para preservar a proporcionalidade entre a função $J_k(\cdot)$ e a sua representação equivalente em espaço de estado, o componente de custo C_{12} é fixado igual ao produto aos componentes C_4 e C_3 (isto é, $C_{12} = C_3 \times C_4$). Observe que este artifício não tira a originalidade do critério funcional do modelo HMMS visto que, para muitos casos analisados por Holt *et al.* (1960), o valor do produto $C_3 \times C_4$ ficou relativamente próximo do valor de C_{12} . Com base nisto, a função $J_k(\cdot)$ pode ser reescrita na forma matricial de espaço de estado, como segue:

$$J_k(\cdot) = \frac{1}{2} \cdot E \left\{ \begin{aligned} & \begin{pmatrix} x_N^1 + \theta_1 \\ x_N^2 + \theta_2 \\ x_N^3 + \theta_3 \\ \vdots \\ x_N^{p+2} + \theta_{p+2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1p} \\ 0 & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_{13} & 0 & h_3 & \cdots & \rho_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & 0 & \rho_{3p} & \cdots & h_{p+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_N^1 + \theta_1 \\ x_N^2 + \theta_2 \\ x_N^3 + \theta_3 \\ \vdots \\ x_N^{p+2} + \theta_{p+2} \end{pmatrix} + \\ & \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} x_k^1 + \theta_1 \\ x_k^2 + \theta_2 \\ x_k^3 + \theta_3 \\ \vdots \\ x_k^{p+2} + \theta_{p+2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1p} \\ 0 & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_{13} & 0 & h_3 & \cdots & \rho_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & 0 & \rho_{3p} & \cdots & h_{p+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k^1 + \theta_1 \\ x_k^2 + \theta_2 \\ x_k^3 + \theta_3 \\ \vdots \\ x_k^{p+2} + \theta_{p+2} \end{pmatrix} + \\ & 2 \cdot \begin{pmatrix} x_k^1 + \theta_1 \\ x_k^2 + \theta_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k^1 + \gamma_1 \\ u_k^2 + \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i1} + \gamma_1 \\ u_{i2} + \gamma_2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} r_1 & r_3 \\ r_3 & r_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_k^1 + \gamma_1 \\ u_k^2 + \gamma_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

onde

$$\begin{aligned} h_1 &= 2 \times C_7; \quad h_2 = 2 \times C_2; \quad e = -2 \times C_2; \quad r_1 = 2 \times C_3; \quad r_2 = 2 \times (C_2 + C_3 \times C_4^2); \quad r_3 = -C_3 \times C_4; \\ \rho_{1j} &= -C_7 \times C_9 \times (\eta_{p+3-i} + \eta_0 \times \pi_{p+3-i}) \quad \forall j = 3, 4, \dots, p \\ \rho_{ij} &= -C_7 \times C_9^2 \times (\eta_{p+3-i} + \eta_0 \times \pi_{p+3-i}) \times (\eta_{p+3-j} + \eta_0 \times \pi_{p+3-j}) \quad \forall i, j = 3, 4, \dots, p+2 \text{ com } i < j \end{aligned}$$

Note que os demais coeficientes $\{\theta_i, i = 3, 4, \dots, p+2\}$ são determinados pela solução do seguinte sistema de equações de dimensão $p \times p$:

$$\begin{cases} \rho_{13} \times \theta_3 + \rho_{14} \times \theta_4 + \cdots + \rho_{1p} \times \theta_{p+2} = -h_1 \times \theta_1 - C_7 \times (C_8 + C_9 \times m_D) \\ h_3 \times \theta_3 + \rho_{34} \times \theta_4 + \cdots + \rho_{3p} \times \theta_{p+2} = (\eta_p + \eta_0 \times \pi_p) \times (C_7 \times C_8 \times C_9 + m_D) - \rho_{13} \times \theta_1 \\ \rho_{34} \times \theta_3 + h_4 \times \theta_4 + \cdots + \rho_{4p} \times \theta_{p+2} = (\eta_{p-1} + \eta_0 \times \pi_{p-1}) \times (C_7 \times C_8 \times C_9 + m_D) - \rho_{14} \times \theta_1 \\ \vdots \\ \rho_{3p} \times \theta_3 + \rho_{4p} \times \theta_4 + \cdots + h_{p+2} \times \theta_{p+2} = (\eta_1 + \eta_0 \times \pi_1) \times (C_7 \times C_8 \times C_9 + m_D) - \rho_{1p} \times \theta_1 \end{cases}$$

onde m_D denota a demanda média absoluta, medida ao longo do horizonte de planejamento,

isto é, $m_D = \frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^N \hat{D}_k$. Com base neste valor médio, determina-se que $C_9 = C_8 / m_D$.

2.3.5 O problema LQG com restrições de chance

Um problema de planejamento agregado da produção descrito no padrão de espaço de estado, que inclui restrições físicas nas variáveis de decisão e um modelo ARMA para representar as flutuações de demanda, é formulado como segue:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mu(\cdot)} \frac{1}{2} E \left\{ \mathbf{x}(N)^T H \mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left[\mathbf{x}(k)^T H \mathbf{x}(k) + 2\mathbf{x}(k)^T E \mathbf{u}(k) + \mathbf{u}(k)^T R \mathbf{u}(k) \right] \right\} \quad (a) \\ \text{s.a.} \\ \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) - \mathbf{d}(k); \quad E \{ \mathbf{x}_0 \} = \mathbf{x}_0. \quad (b) \quad (9) \\ \text{Prob.} (\underline{x}_k \leq x_k^1 \leq \bar{x}_k) \geq \alpha \quad (c) \\ \text{Prob.} (\underline{u}_k \leq u_k^1 \leq \bar{u}_k) \geq \beta \quad (d) \\ 0 \leq x_k^2, u_k^2 \leq \bar{x}_k^2 \quad (e) \end{aligned}$$

O objetivo é encontrar uma política ótima – composta por uma sequência de decisões relacionadas com níveis de produção e de mão-de-obra, ou seja, $u_k^1 = \mu(x_k^1)$ e u_k^2 com $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ – que minimize o problema (9).

O problema (9) é uma versão estendida do modelo clássico HMMS apresentado em (1). Ele também pertence à classe de problemas de controle ótimo estocástico do tipo Linear Quadrático Gaussiano (LQG) com restrições nas variáveis de estado e controle; vide Lim *et al.* (1996). A principal vantagem de (9) é que ele pode ser empregado para modelar vários problemas gerenciais relacionados, por exemplo, com áreas de marketing, finanças, vendas, compras e produção; para maiores detalhes vide Shen (1994), Gershwin *et al.* (1986), Kleindorfer (1978) e Pekelman & Raussler (1978). A seção seguinte discute a solução do problema (9) via duas abordagens subótimas.

3. O Problema do Valor Médio

A natureza estocástica, as restrições nas variáveis de decisão e a elevada dimensão são características particulares do problema (9) que dificultam enormemente a determinação de uma solução ótima global. O algoritmo clássico de *programação dinâmica estocástico* não pode ser usado, pois o elevado esforço computacional requerido inviabiliza sua aplicação (Bertsekas, 1995). Em razão dessas dificuldades, heurísticas subótimas, que produzem soluções locais, passam a ser alternativas interessantes do ponto de vista prático, principalmente por demandar menor esforço computacional.

Há, na literatura, uma variedade enorme de aproximações subótimas usadas para tratar problemas estocásticos, como o formulado em (9). Uma boa parte deles utiliza o princípio da *equivalência à certeza* para simplificar o problema; vide Bertsekas (1995). Este princípio toma por base que todas as variáveis aleatórias do problema estocástico podem ser fixadas em seus respectivos valores médios; como consequência, esse problema passa a ser essencialmente determinístico e é frequentemente denominado de problema do *Valor Médio* (PVM). A principal vantagem do PVM é permitir que diferentes algoritmos, *aplicáveis*, da teoria da programação matemática possam ser utilizados como técnica de solução.

A formulação de um problema determinístico equivalente para representar o problema estocástico (9) é possível em virtude de algumas das características estruturais deste

problema, a saber: (i) a linearidade do sistema (6); (ii) a natureza aleatória estacionária da variável $\mathbf{d}(k)$ baseada em um processo estocástico *normalmente distribuído* (Graves, 1999); e (iii) a convexidade do critério funcional (8) resultado do custo quadrático adotado pelo modelo HMMS, como expresso em (1). Estas características permitem a aplicação imediata do princípio da *equivalência à certeza* ao problema (9); vide Holt *et al.* (1960).

Uma vez que a variável aleatória $\mathbf{d}(k)$ tem sua distribuição perfeitamente conhecida através de seus dois primeiros momentos estatísticos (i.e. média e variância), é possível estender esta mesma natureza aleatória para as variáveis de estado $\mathbf{x}(k)$ e controle $\mathbf{u}(k)$ do processo (6), assumindo para isto que sempre existirá um relacionamento linear entre estas variáveis. Neste caso, a evolução das variáveis poderá ser estimada com base no cálculo de suas respectivas médias e variâncias e com o uso destes dois momentos estatísticos será possível transformar o problema estocástico (9) em um problema determinístico equivalente. Note que o problema determinístico, assim formulado, será uma extensão do problema clássico do Valor Médio (PVM), uma vez que, na nova formulação será também incluído o segundo momento estatístico (i.e., a variância das variáveis de estado e controle). Neste artigo este problema é denominado de Problema do Valor Médio Estendido e denotado pelo acrônimo PVME.

Como primeiro passo para transformar o problema estocástico (9) em um PVME deve-se calcular o valor médio e o desvio-padrão de todas as variáveis aleatórias. Assim, usando o operador esperança $E\{\cdot\}$, segue que:

$$\begin{cases} E\{\mathbf{x}(k)^T\} = \hat{\mathbf{x}}(k)^T = E\{x_k^1 \ x_k^2 \ x_k^3 \ \dots \ x_k^{p+2}\} = [\hat{x}_k^1 \ \hat{x}_k^2 \ \hat{x}_k^3 \ \dots \ \hat{x}_k^{p+2}] \\ E\{\mathbf{x}(k)^T \mathbf{x}(k)\} = \Omega_{\mathbf{x}}(k) \in \mathfrak{R}^{p+2 \times p+2} \end{cases} \quad (10)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}(k)$ e $\Omega_{\mathbf{x}}(k)$ denotam, respectivamente, o vetor de valores médios e a matriz de covariância dos estados do sistema (6). Procedendo de modo semelhante, a variável de controle é completamente definida pelos seguintes momentos estatísticos: $\hat{\mathbf{u}}(k) = E\{\mathbf{u}(k)\}$ e $\Omega_{\mathbf{u}}(k) = E\{\mathbf{u}(k)^T \mathbf{u}(k)\}$.

Devido as características particulares do modelo proposto em (9), é importante entender que no processo linear descrito em (9.b), somente a primeira componente do vetor $\mathbf{x}(k)$, ou seja a variável de estoque x_k^1 , depende linearmente das flutuações estacionárias da variável aleatória *normal* que define a demanda D_k . Assim, a variável de estoque tem uma função de distribuição de probabilidade *normal*, denotada por $\Phi_{x^1,k}(\cdot)$ e, inteiramente, caracterizada pela evolução de sua média \hat{x}_k^1 e desvio padrão $\sigma_{x^1}(k) = \sqrt{k} \cdot \sigma_D$. De modo semelhante, assumindo-se que a taxa de produção depende dos níveis de estoque (i.e., $u_k^1 = \mu(x_k^1)$), a variável de produção u_k^1 também terá uma função distribuição de probabilidade $\Phi_{u^1,k}(\cdot)$. Caso a função $\mu(\cdot)$ seja linear, a função distribuição $\Phi_{u^1,k}(\cdot)$ também será *normal* e plenamente descrita por sua média \hat{u}_k^1 e desvio padrão $\sigma_{u^1}(k)$. As variáveis que representam mão-de-obra são essencialmente determinísticas, pois não dependem da demanda e dos níveis de estoque, assim elas são iguais aos seus respectivos valores médios, isto é, $x_k^2 = \hat{x}_k^2$ e $u_k^2 = \hat{u}_k^2$, com desvios-padrão nulos. Por fim, note que o vetor de valores esperados da demanda e sua

matriz de covariância são dados, respectivamente, por $\hat{\mathbf{d}}(k) = E\{\mathbf{d}(k)\} = \varphi \cdot \hat{D}_k$ e $\Omega_d(k) = \sigma_D^2 \cdot [\varphi \cdot \varphi^T]$, com $\varphi \in \mathcal{R}^{p+2}$, seguindo o modelo dado na seção 2.3.2.

Baseado nos valores estatísticos descritos acima, o custo quadrático (8) e o sistema de balanço linear (6) podem ser prontamente convertidos a seus respectivos modelos determinísticos equivalentes (Silva Filho, 1999). Além disto, outra importante transformação está relacionada com as restrições probabilísticas, dadas em (7). Essas restrições são convertidas em desigualdades determinísticas, que preservam o segundo momento estatístico da variável de estoque. Assim, segue de (7.a) que:

$$\begin{aligned} Prob.(x_k^1 \geq \underline{x}_k^1) &\geq \alpha \Leftrightarrow \\ \hat{x}_k^1 &\geq \underline{x}_{k,\alpha}^1 = \underline{x}_k^1 + \sigma_{x^1}(k) \cdot \Phi_{x^1,k}^{-1}(\alpha) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Prob.(x_k^1 < \bar{x}_k^1) &\geq \alpha \Leftrightarrow \\ \hat{x}_k^1 &\leq \bar{x}_{k,\alpha}^1 = \bar{x}_k^1 - \sigma_{x^1}(k) \cdot \Phi_{x^1,k}^{-1}(\alpha) \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\Phi_{x^1,k}^{-1}(\cdot)$ denota a função distribuição de probabilidade inversa da variável de estoque. De modo semelhante tem-se para restrição (7.b) que

$$Prob.(\underline{u}_k^1 \leq u_k^1 \leq \bar{u}_k^1) \geq \alpha \Leftrightarrow \underline{u}_{k,\beta}^1 \leq \hat{u}_k^1 \leq \bar{u}_{k,\beta}^1 \quad (13)$$

onde $\underline{u}_{k,\beta}^1 = \underline{u}_k^1 + \sigma_{u^1}(k) \cdot \Phi_{u^1,k}^{-1}(\beta)$ e $\bar{u}_{k,\beta}^1 = \bar{u}_k^1 - \sigma_{u^1}(k) \cdot \Phi_{u^1,k}^{-1}(\beta)$.

Por fim, é importante mencionar que a sequência formada pelas demais componentes que compõe o vetor de estado $\mathbf{x}(k)$, ou seja, as componentes $\{\hat{x}_k^i, \forall i = 3, \dots, p+2 \text{ e } k > 0\}$ relacionadas ao modelo ARMA, não estão restritas a tomar valores de nenhum conjunto definido a priori. Isto significa que essas variáveis podem evoluir livremente ao longo dos períodos do horizonte de planejamento.

Com estas transformações, formula-se o PVME como segue:

$$\begin{aligned} Min_{\hat{\mathbf{u}}_k} &\left\{ \hat{\mathbf{x}}(N)^T H \hat{\mathbf{x}}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\hat{\mathbf{x}}(k)^T H \hat{\mathbf{x}}(k) + 2 \cdot \hat{\mathbf{x}}(k)^T E \hat{\mathbf{u}}(k) + \hat{\mathbf{u}}(k)^T R \hat{\mathbf{u}}(k) \right] + K \right\} \\ s.a. & \\ &\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{u}}(k) + \hat{\mathbf{d}}(k); \hat{\mathbf{x}}(0) \text{ dado} \\ &\underline{x}_{k,\alpha}^1 \leq \hat{x}_k^1 \leq \bar{x}_{k,\alpha}^1 \\ &\underline{u}_{k,\beta}^1 \leq \hat{u}_k^1 \leq \bar{u}_{k,\beta}^1 \\ &0 \leq \hat{x}_k^2, \hat{u}_k^2 \leq \bar{x}_k^2 \end{aligned} \quad (14)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}(0) = [\hat{x}_0^1 \hat{x}_0^2 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]$ e K representa uma constante incremental no valor do custo final devido às incertezas da demanda, que é medida em termos da evolução das variâncias de estoque e produção. Apenas a título de ilustração, observe-se que o custo total (9) aumenta com a evolução das variâncias no tempo, pois tanto $\sigma_{x^1}^2(k) = k \cdot \sigma_D$ quanto

$\sigma_u^2(k)$, que é proporcional a $\sigma_{x_1}^2(k)$, tendem a crescer com o incremento de tempo k ; vide Silva Filho & Ventura (1999) para mais detalhes.

O problema (14) permite não só fornecer um plano ótimo agregado de produção, como também permite ao administrador adquirir uma maior visibilidade sobre o uso dos recursos agregados. De fato, variando alguns parâmetros do problema (14), é possível analisar diferentes cenários relacionados a um processo de produção do tipo *orientado a estoque*. Por exemplo, comparando as trajetórias ótimas de estoque, produção e mão-de-obra extraídos de diferentes cenários, o administrador pode idealizar como será o ciclo de pedidos para uma dada família de produtos. Assim, conhecido *a priori* como os pedidos poderão ser configurados ao longo dos períodos, algumas ações podem ser estabelecidas pela gerência com antecedência para prevenir contra falhas no uso racional dos estoques, como, por exemplo, impedir a ocorrência de uma ruptura de estoques originada por um eventual excesso da demanda futura. Outras ações que podem ser estudadas dizem respeito à análise de impactos relacionados com ocorrência de perturbações ao ambiente produtivo, devido, por exemplo, a fatores endógenos como atrasos na entrega de produtos, quebra de máquina, e assim por diante.

3.1 Duas heurísticas simples para solução do problema (14)

Heurísticas subótimas muito simples, como os procedimentos *Open Loop No-updating* (OLN) e *Open Loop Updating* (OLU), podem ser combinadas aos algoritmos da programação quadrática para resolver o PVME, dado em (14). Estas abordagens são descritas resumidamente a seguir:

- *Open Loop No-updating* (OLN): a única informação disponível para cálculo da política de produção é o vetor de estados no período inicial do horizonte de planejamento (i.e. $\hat{x}(0)$). Mesmo que uma nova informação sobre o estado do sistema torne-se disponível ao longo dos períodos seguintes (i.e., $k > 0$), ela será completamente ignorada durante a realização da heurística OLN; vide Pekelman & Rausser (1978). Em outras palavras, a política OLN é uma sequência ótima de vetores $\{\hat{u}(0), \hat{u}(1), \dots, \hat{u}(N-1)\}$ que não depende das informações do estado do sistema $\hat{x}(k)$ para os períodos $k > 0$ do horizonte de planejamento. De fato, a abordagem de OLN não considera na construção de sua política ótima nenhum tipo de esquema que permita revisar o estado do sistema de balanço (6), melhorando assim o desempenho da solução. Conclui-se, portanto, que o procedimento OLN fornece soluções factíveis para (14), porém soluções estáticas no tempo, ou seja, do tipo malha-aberta.
- *Open Loop Updating* (OLU): é uma abordagem semelhante a OLN com a diferença, no entanto, que a política OLU permite rever período a período o desempenho da solução gerada; ou seja, a política ótima é sempre recalculada tão logo uma nova informação sobre o estado do sistema torna-se disponível; vide Pekelman & Rausser (1978). Este comportamento pode ser descrito como segue: durante cada novo período $k \in [0, N-1]$, sempre que o estado atual do sistema $\hat{x}(k)$ é medido, ele é imediatamente considerado como estado inicial do problema (14), que será resolvido dentro da faixa de planejamento que se inicia no período da ocorrência da observação (i.e. período k) e vai até o período final N . Por conseguinte, uma sequência ótima malha-aberta $\{\hat{u}(k), \hat{u}(k+1), \dots, \hat{u}(N-1)\}$

é gerada como solução de (14). Desta sequência, no entanto, só o primeiro elemento, ou seja, $\hat{\mathbf{u}}(k)$ é efetivamente considerado para compor a política ótima $\hat{\mathbf{u}}^*(k) = \hat{\mathbf{u}}(k)$ da abordagem OLU; os demais elementos da sequência são completamente ignorados. Pode-se concluir que o procedimento OLU provê uma solução ótima para o problema (14), resolvendo este problema num total de N vezes (Jung *et al.*, 2004).

Com respeito ao emprego destes dois procedimentos é importante destacar que: *(i)* como na aplicação da heurística OLN a taxa de produção não depende do nível de estoque observado no início de cada período k do horizonte de planejamento N (exceto no período inicial $k=0$), o sistema de balanço de estoque irá operar sempre no modo conhecido como malha-aberta. Segue daí, então, que a variável de produção u_k^1 será essencialmente determinística, o que significa dizer que seu segundo momento estatístico será nulo, ou seja, $\sigma_{u^1}(k) = 0, \forall k$. Como uma imediata consequência deste fato, a restrição de produção em (14) não mais dependerá da medida de probabilidade β , devendo, portanto, ser substituída por seus limitantes físicos originais, resultando assim que: $\underline{u}_k^1 \leq \hat{u}_k^1 \leq \bar{u}_k^1$; e *(ii)* tanto a abordagem OLU quanto a OLN podem ser usadas para resolver (14) e, acoplando-se a esta resolução algum esquema de simulação, é possível gerar cenários de produção que irão permitir à administração obter uma visão agregada sobre o uso dos recursos industriais da companhia. Esses cenários de produção podem ser construídos variando alguns parâmetros do modelo (14) tal como, por exemplo, o índice de probabilidade da restrição de estoque α , que é usada, frequentemente, como uma medida da qualidade de serviço ao cliente (Yildirim *et al.*, 2005). Assim, manipulando este índice na faixa de 50 a 100%, é possível ao gerente investigar diferentes formas de garantir atendimento aos clientes, usando para isto diferentes níveis de estoque de segurança, como discutido em Jung *et al.* (2004). Por exemplo, escolhendo α próximo de 100%, a gerência estará se comprometendo fortemente com a entrega do produto ao cliente nos prazos combinados. Para atingir tal comprometimento, um nível mínimo de estoque de segurança que evite sobressaltos devido a aumentos inesperados da demanda deve ser determinado pela administração. Neste caso, via de regra, o nível do estoque de segurança ($\underline{x}_{k,\alpha}^1$), dado em (11), tende a aumentar, ao longo dos períodos futuros do horizonte de planejamento, visando, com isto, garantir uma estratégia de pronta entrega. De outro modo, se a gerência assumir que a melhor estratégia para a companhia é reduzir custos com manutenção de estoques, o compromisso, então, será de adotar uma política que reduza ao máximo a formação de estoques; neste cenário, a medida de probabilidade deve ficar próxima de 50%. A estratégia de adotar níveis de estoques muito baixos faz com que a gerência, sempre que ocorra algo tipo de atraso na produção, se veja obrigada a lidar com a inconveniente tarefa de negociar com os clientes sobre novos prazos para entrega dos produtos de uma dada família.

Na seção seguinte será considerado um exemplo hipotético de uma empresa que pretende desenvolver um plano agregado da produção, usando como formulação o modelo HMMS na forma de um problema LQG com restrições de chance, configurado no padrão de espaço de estado. A abordagem OLU é empregada para prover este plano agregado à empresa. Dentre as razões para escolher a política OLU está o fato principal dela ser muito simples de implementar; além disto, este tipo de heurística permite atualizar novas informações sobre os níveis de estoque e mão-de-obra disponíveis durante cada novo período de tempo k do horizonte de planejamento. Assim, é possível desenvolver um plano de produção agregado

factível para a organização e, também, variando alguns parâmetros do problema (14), ajudar a gerência a desenvolver cenários, que a oriente sobre como melhorar a qualidade de serviço ao cliente. Neste último caso permitindo uma maior reflexão sobre o uso futuro dos recursos da organização, de modo que ela possa produzir de forma eficaz sua família de produtos.

4. Exemplo

Uma companhia hipotética produz uma família de produtos a partir de um sistema de manufatura *orientado a estoques* (Higgins *et al.*, 1996). Esta família de produtos será comercializada em um mercado de commodities que define o preço pela procura de mercado. Assume-se que a procura por estes produtos vem se mantendo estável com flutuações de venda previsíveis ao longo dos últimos anos. Com o objetivo de fornecer um plano ótimo anual de produção, formula-se um problema sequencial de planejamento agregado da produção com restrições nas variáveis de decisão, que segue o problema dado em (14). Os detalhes sobre dados de operação da companhia e, também, resultados da análise da aplicação da heurística ao problema aqui estudado são os objetos esperados desta seção.

4.1 Dados do problema

A tabela 1 introduz os principais dados a serem usados neste exemplo.

Tabela 1 – Dados do problema.

Demanda Média (\hat{D}_k):											
Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
430	450	440	310	390	375	390	500	490	450	390	425
Desvio-padrão da demanda: $\sigma_D \cong 4.0$											
Dados gerais: $N=12$; $I_0=250$; $W_0=15$; I_N e W_N são livres											
Limites físicos: $\underline{I}_k = 0$; $\bar{I}_k = 300$; $\underline{P}_k = 0$; $\bar{P}_k = 450$; $\bar{W}_k = 17$											

Outras informações importantes são: **(a)** o nível do serviço é estabelecido igual a 95% (isto é, $\alpha=0,95$). Isto significa que o gerente pretende desenvolver um plano que será capaz de satisfazer demandas de cliente, em pelo menos, 95% das vezes. Com respeito ao índice de confiabilidade na capacidade de produção, adota-se o valor de 50% ($\beta=0,50$) que revela a intenção da gerência em manter os limites de capacidade de produção nos seus valores originais. Para entender isto note que $\Phi_u^{-1}(0,50) = 0$, o que implica em $\underline{u}_{k,\beta}^1 = \underline{u}_k^1$ e $\bar{u}_{k,\beta}^1 = \bar{u}_k^1$; e **(b)** um modelo ARMA (1,1) é identificado para representar o histórico de vendas mensais deste produto. A partir da notação dada em (10), os parâmetros ótimos dos polinômios autorregressivo e média-móvel são dados, respectivamente, por $\pi_I = -0.65$ e $\eta_I = 0.90$.

Usando o esquema de transformação discutido na seção 2, o Problema do Valor Médio Estendido (PVME) dado em (14) é formulado, para este exemplo, como se segue:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} & \begin{pmatrix} \hat{x}_N^1 \\ \hat{x}_N^2 \\ \hat{x}_N^3 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \rho \\ 0 & h_2 & 0 \\ \rho & 0 & h_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_N^1 \\ \hat{x}_N^2 \\ \hat{x}_N^3 \end{pmatrix} + 1/2 \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x}_k^1 \\ \hat{x}_k^2 \\ \hat{x}_k^3 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \rho \\ 0 & h_2 & 0 \\ \rho & 0 & h_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_k^1 \\ \hat{x}_k^2 \\ \hat{x}_k^3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \cdot h_1 \\ \theta_2 \cdot h_2 + \gamma_2 \cdot e \\ h_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_{1k} \\ \hat{x}_{2k} \\ \hat{x}_{3k} \end{pmatrix} \right. \\
 & \left. + 2 \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_k^1 \\ \hat{x}_k^2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_k^1 \\ \hat{u}_k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{u}_k^1 \\ \hat{u}_k^2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_k^1 \\ \hat{u}_k^2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \cdot r_1 \\ \gamma_2 \cdot r_2 + \theta_2 \cdot e \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_k^1 \\ \hat{u}_k^2 \end{pmatrix} \right\} \\
 & \text{sujeito a}
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1}^1 \\ \hat{x}_{k+1}^2 \\ \hat{x}_{k+1}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\eta_1 - \pi_1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_k^1 \\ \hat{x}_k^2 \\ \hat{x}_k^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_k^1 \\ \hat{u}_k^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{d}_k; \quad \begin{pmatrix} \hat{x}_0^1 \\ \hat{x}_0^2 \\ \hat{x}_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ W_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_{k,\alpha}^1 \leq \hat{x}_k^1 \leq \bar{x}_{k,\alpha}^1 \quad e \quad 0 \leq \hat{x}_k^2 \leq \bar{x}_k^2; \quad k = 0, 1, \dots, N$$

$$\underline{u}_k^1 \leq \hat{u}_k^1 \leq \bar{u}_k^1 \quad e \quad 0 \leq \hat{u}_k^2 \leq \bar{u}_k^2; \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

onde as constantes relacionadas ao critério são dadas por (Shen, 1994): $C_1=69.7$; $C_2=64.3$; $C_3=0.2$; $C_4=5.67$; $C_5=51.2$; $C_6=13.7$; $C_7=0.0825$; $C_8=320$; e $C_{12}=1.134$. As constantes de proporcionalidade, usadas para converter o modelo de custo HMMS, no padrão de espaço de estado, são dadas por $\theta_1=320$; $\theta_2=104$; $\gamma_1=617$; e $\gamma_2=104$.

Na seção seguinte, o problema (15) será resolvido e, em seguida, uma análise de cenários será criada para ilustrar a ideia de como o gerente pode usar a solução de (15) para encontrar oportunidades de melhorar a qualidade de serviço aos clientes.

4.2 Resolvendo o problema (15)

O objetivo agora é encontrar uma solução ótima sequencial para o problema (15). Dentre as abordagens, duas foram destacadas, na subseção 3.1., pela grande simplicidade e eficiência de implementação computacional. Neste exemplo, a abordagem OLU será utilizada para resolver o problema (15). Além das características computacionais mencionadas, outra vantagem desta aproximação é a de permitir incorporar novas informações sobre o estado, dos níveis de estoques e mão-de-obra, tomado ao longo de cada período do horizonte de planejamento. Em outras palavras, a abordagem OLU também permite rever e ajustar, para cada novo período k , a solução do problema (15), possibilitando melhorá-la continuamente. A figura 1 ilustra através de um diagrama de blocos como é a operação de um procedimento OLU.

Com base neste diagrama de blocos, é possível verificar que a cada novo período de tempo k , tão logo novas medidas são observadas diretamente do sistema de balanço de estoque e mão-de-obra, o problema (15) é resolvido e, por consequência, uma solução é gerada para a faixa de tempo de planejamento que compreende o período da observação k até o período final N . Como ilustrado na figura 1, somente os níveis ótimos de produção e mão-de-obra obtidos para o período k (isto é, \hat{u}_k^1 e \hat{u}_k^2 , respectivamente) são efetivamente aplicados ao sistema. Por conseguinte, como discutido na seção 3.1., a aplicação da abordagem OLU faz com que o problema (15) seja resolvido num total de N vezes, isto é, uma vez a cada novo período k , com $k \in [0, N-1]$.

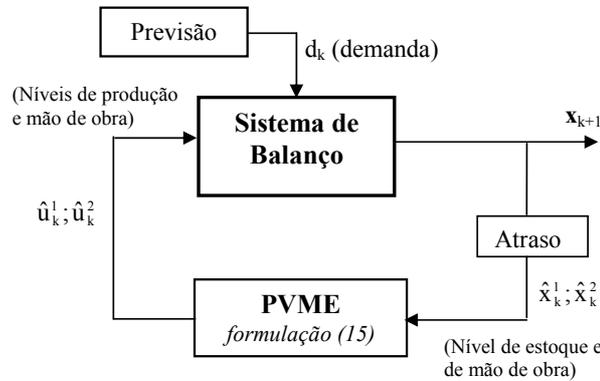


Figura 1 – Abordagem OLU aplicada ao Problema do Valor Médio Estendido (PVME).

As figuras 2, 3 e 4 ilustram, respectivamente, as trajetórias das variáveis de estoque, produção e mão-de-obra, obtidas como resultado da aplicação da heurística OLU. Estas trajetórias são políticas ótimas de decisão que visam satisfazer o comportamento futuro da demanda. Em outras palavras, elas representam juntas além de um plano agregado de produção, também, um dos possíveis cenários de produção usados pela gerência para ganhar visibilidade sobre o uso dos recursos de produção. Os custos anuais com estoques, produção e mão de obra, juntamente com o custo total para realização deste cenário, estão disponíveis na Tabela 2, dada à frente.

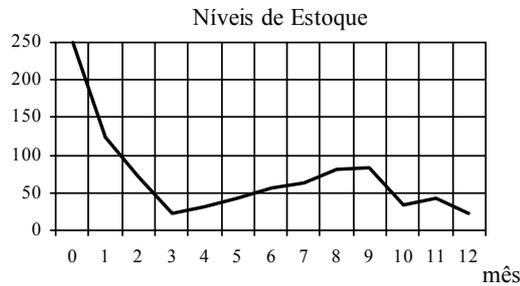


Figura 2 – Política de estoque para cenário com $\alpha = 0,95$.

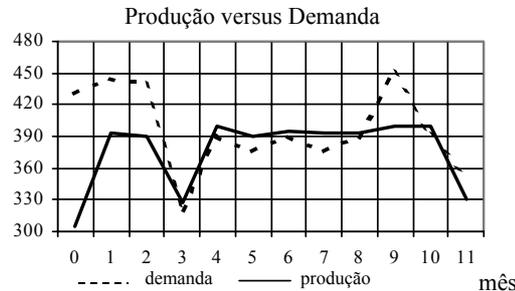


Figura 3 – Política de produção versus demanda para cenário com $\alpha = 0,95$.

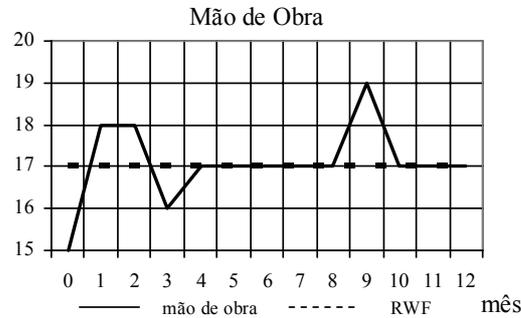


Figura 4 – Níveis de mão de obra em relação ao limite máximo (RWF).

Ainda com respeito ao cenário em questão é interessante tecer alguns comentários relacionados aos resultados ilustrados nas figuras 2, 3 e 4, a saber:

(i) a partir da figura 2, observa-se que os níveis de estoque diminuem ao longo dos períodos do horizonte de planejamento. Esta característica é devido ao uso da informação disponível tomada junto ao sistema de balanço para cada período k . Portanto, é um resultado direto do mecanismo de realimentação empregado pela abordagem OLU, como ilustrado pela figura 1. Note que, caso a informação proveniente do sistema de balanço de estoque não fosse usada para ajustar a solução do problema (15), a tendência dos níveis de estoque seria aumentar gradativamente com a evolução dos períodos de tempo. A razão disto é que o limite mínimo de estoque, definido pela função de estoque de segurança $\underline{x}_{k,\alpha}^1$ dada em (11), depende da variância do estoques (isto é, $\sigma_{x_k}^2 = k \cdot \sigma_D^2$) e assim sendo, sempre que o sistema de balanço

de estoque operar em malha-aberta, sua variância tenderá a crescer proporcionalmente ao período de tempo k como um múltiplo da variância da demanda. Isto demonstra que a falta de visibilidade sobre o comportamento futuro da demanda é um fator gerador de estoques. A principal conclusão, então, é que sempre que a informação sobre os níveis de estoques disponíveis for muito pobre, a estratégia de manter níveis altos de estoques de segurança é um importante instrumento para evitar o risco de ruptura de estoques, cuja consequência é a baixa qualidade de serviço, que resulta na insatisfação dos clientes. Agindo de forma preventiva, a administração, embora incorra em custos mais elevados com manutenção de estoques, ainda consegue evitar o tal “custo intangível” relacionado com a perda de clientes, que causa, muitas vezes, mais estrago do que os custos contábeis relacionados com a manutenção de estoques;

(ii) a trajetória ótima de produção (linha sólida na figura 3) permanece relativamente estável, ficando perto de sua capacidade máxima (isto é, $\bar{u}_k^1 = 400$), o que é razoável para uma organização cuja produção é orientada a estoques. Deste modo, a política de produção trabalha no sentido de atender, no máximo, as flutuações de demanda (linha pontilhada) ao longo de todos os períodos do horizonte de planejamento. Com isto é possível garantir níveis de estoques de segurança estáveis e relativamente baixos, ao longo dos meses, ao mesmo tempo em que se mantém alto nível de atendimento ao cliente; e

(iii) como uma consequência imediata do comportamento da política de produção, o nível de mão-de-obra também permanece estável ao longo dos períodos (vide figura 4). O nível de

mão-de-obra, utilizado a cada período k , flutua ligeiramente em volta da quantidade de mão de obra regular (isto é, $\bar{W} = 17$ funcionários, neste exemplo). Observe, ainda, que quando o nível de mão-de-obra supera o limite \bar{W} , significa que a companhia está adotando uma das seguintes estratégias: (i) usar mão-de-obra temporária que exige subcontratação; ou (ii) utilização de uma política de horas-extras. Ambas as estratégias são responsáveis por aumentar o custo total de produção, mas por outro lado, permitem manter a operação de produção perto de sua capacidade máxima o que, com certeza, melhora o desempenho da companhia, seja em termos de redução dos custos com estoques, seja com respeito à “moral” da equipe de produção, que percebe que o mercado é favorável ao crescimento da companhia.

(iv) os resultados ilustrados pelas figuras 2, 3 e 4 dão também uma ideia sucinta das dificuldades administrativas que a gerência terá no sentido de produzir um plano de produção factível para a companhia. A dificuldade principal está relacionada à necessidade de satisfazer diferentes dimensões de interesse da administração, tais como, por exemplo, encontrar a solução de compromisso que garanta minimizar os níveis de estoques enquanto, simultaneamente, maximizam-se as taxas de produção, sem introduzir mão-de-obra temporária ou horas extra. Outra dificuldade é devido aos limites mínimo e máximo das variáveis de estoque e produção, que impõem uma redução no espaço de soluções factíveis do problema (15).

Concluindo, sob as circunstâncias acima, o problema (15) é resolvido usando a abordagem OLU. Como resultado, a solução gerada pode ser usada pela gerência no sentido de fornecer um plano ótimo anual agregado de produção factível, como as trajetórias apresentadas pelas figuras 2, 3 e 4; ou, ainda, para desenvolver cenários de produção, que ajudam os administradores a investigar oportunidades de satisfazer a demanda quanto às incertezas de longo prazo.

4.3 Análise de cenários

Nesta subseção analisa-se a influência do índice probabilístico α na geração de uma política ótima agregada de produção. A ideia aqui segue a discussão abordada ao fim da seção 3, onde o índice α é um indicador de garantia de atendimento da demanda, ou seja, uma medida de satisfação do cliente. Anteriormente, o problema (15) foi resolvido com $\alpha=0,95$, o que significa um compromisso da gerência em satisfazer os clientes ao longo dos períodos do horizonte de planejamento em, pelo menos, 95% das vezes. Contrapondo com a situação, considera-se agora, para efeito de comparação, que α é fixado igual a 0,50. Neste caso, a gerência assume o risco da possibilidade de, em 50% das vezes, não atender à demanda em algum período futuro do horizonte de planejamento.

Resumindo, usando $\alpha = 0,95$, o gerente está assumindo uma atitude mais conservadora do que quando ele usa $\alpha=0,50$. Na prática, o primeiro caso significa que será necessário aumentar o nível de estoque de segurança, ao longo dos períodos futuros, visando garantir que os produtos sempre serão entregues no prazo combinado com os clientes. Assim atuando, o gerente pretende reduzir, de forma significativa, o número de intervenções administrativas relacionadas com ajustes no processo de produção devido a ocorrências de perturbações como, por exemplo: aumento não esperado nos níveis de demanda, atrasos na entrega de matéria-prima, quebra de máquinas e assim por diante. Contudo, é importante lembrar que esta ação provoca aumentos no custo total de produção.

As figuras 5 e 6 mostram, respectivamente, os planos ótimos mensais de estoques e produção para dois cenários de produção, a saber: cenário 1 com $\alpha = 0,95$ (linha cheia) e cenário 2 com $\alpha = 0,50$ (linha pontilhada).

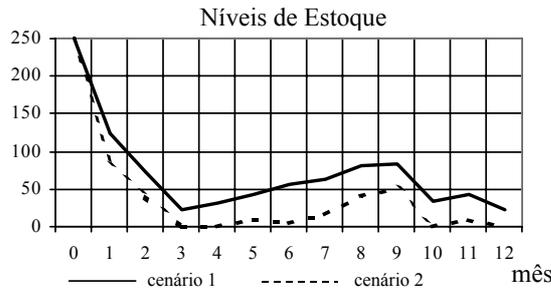


Figura 5 – Política de estoques para $\alpha=95\%$ (cenário 1) e 50% (cenário 2).

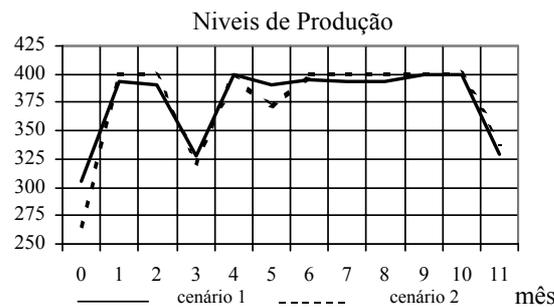


Figura 6 – Políticas de produção para $\alpha=95\%$ (cenário 1) e 50% (cenário 2).

Da figura 5, observa-se que os níveis de estoques relacionados com $\alpha=0,95$ são ligeiramente superiores àqueles relacionados com $\alpha=0,50$. É interessante verificar que, neste caso, os níveis de estoque de segurança, dado por $\underline{x}_{k,\alpha}^1$, aumentam ao longo dos períodos do horizonte de planejamento, garantindo, assim, que qualquer aumento não previsto nos níveis de demanda possa ser prontamente atendido. Como uma imediata consequência, o custo total de produção da política com $\alpha=0,95$ é aproximadamente de 3% mais caro do que o obtido com $\alpha=0,50$. A tabela 2, dada a seguir, compara os custos destes dois cenários.

Tabela 2 – Comparando os custos dos cenários com $\alpha=0,5$ e $\alpha=0,95$.

Cenários	Custo estoque	Custo produção	Custo mão-de-obra	Custo total
$\alpha=0,50$	\$ 6 mil	\$ 317 mil	\$ 250 mil	\$ 573 mil
$\alpha=0,95$	\$ 11 mil	\$ 327 mil	\$ 250 mil	\$ 588 mil

Da análise das trajetórias de produção, expostas na figura 6, é interessante observar que a política de produção com $\alpha=0,5$ permanece cerca de 70% dos períodos do horizonte de planejamento operando exatamente no limite máximo de sua capacidade (i.e., $\bar{u}_k = 400, \forall k$); enquanto que, a política de produção com $\alpha=0,95$, opera somente 25% do tempo no limite máximo de capacidade. Mesmo assim, o custo de produção obtido para $\alpha=0,50$ é inferior ao de $\alpha=0,95$, como se vê na Tabela 2. A explicação disto está no fato de que para o período inicial $k=0$, a taxa de produção da política com $\alpha=0,50$ ser inferior a taxa de produção para $\alpha=0,95$, como ilustra a figura 6. Além disto, a diferença entre estas duas taxas, para o restante dos períodos, não é de ordem significativa. Por fim, cabe aqui destacar que este tipo de análise de cenário, excessivamente sensível à formação de estoque de segurança, é de interesse para companhias com sistemas de manufatura *orientados a estoque*, como é o caso daquelas organizações cuja produção atende mercados de commodities.

5. Conclusão

Este trabalho apresentou um problema de planejamento agregado da produção representado por um modelo sequencial Linear Quadrático Gaussiano com restrições de chance nas principais variáveis de decisão. O problema, assim formulado, pode ser usado pela gerência não só para desenvolver um plano de produção aplicável ao processo hierárquico de tomada de decisão de uma dada organização, mas também para gerar cenários de produção que permitam melhorar o uso dos recursos da organização objetivando, assim, satisfazer plenamente o cliente final. A formulação adotada para o problema envolveu um padrão do tipo espaço de estado, baseado na estrutura original clássica do modelo HMMS. Para adicionar maior realismo a esta formulação, foi também adicionado à mesma um modelo ARMA para representar as previsões quanto às flutuações da demanda. Em razão de dificuldades de obter uma solução ótima global para o problema, abordagens subótimas foram exploradas como uma estratégia alternativa. Foi enfatizado que muitas destas aproximações são resultado direto da aplicação do princípio da *equivalência à certeza*. Partindo deste princípio, o problema estocástico original foi transformado em um problema determinístico equivalente, denominado neste trabalho como Problema do Valor Médio Estendido (PVME). Duas heurísticas, muito simples do ponto de vista computacional e conhecidas pelos acrônimos OLN e OLU, foram discutidas sucintamente como maneiras econômicas de resolver PVME. A partir de um exemplo ilustrativo, a abordagem OLU foi aplicada ao PVME. Como resultado, obteve-se um plano de produção factível que considerou informações correntes disponíveis dos níveis de estoque e mão-de-obra, para determinar um plano ótimo de produção. Além disto, foi mostrado, também, que esta solução subótima permite criar cenários de produção que revelam o uso dos recursos da companhia. De fato, variando alguns parâmetros do modelo determinístico como, por exemplo, o índice probabilístico α que é um indicador do nível de satisfação ao cliente, uma solução subótima pode oferecer diferentes cenários de produção para análise. Note que, da análise de tais cenários, a gerência pode definir qual será o melhor plano de produção a ser aplicado à companhia.

Agradecimento

Este trabalho foi apoiado pelo CNPq, o Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento, processo No. 500202/2003-6

Referências Bibliográficas

- (1) Anderson, B.D.O. & Moore, J.B. (1979). *Optimal Filtering*. Prentice Hall, USA.
- (2) Bahl, H.C.; Ritzman, L.R & Gupta, J.N.D. (1987). Determining Lot Sizes and Resource Requirements: A Review. *Operations Research*, **35**(3), 329-345.
- (3) Bensoussan, M.C. & Proth, J.M. (1983). *Mathematical Theory of Production Planning*. North-Holland, Amsterdam.
- (4) Bertsekas, D.P. (1995). *Dynamic Programming and Stochastic Control*. Vol. 1. Athena Scientific, USA.
- (5) Box, G.E.P.; Jenkins G.M.; Reinsel, G.C. & Jenkins, G. (1974). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice-Hall, USA.
- (6) Bryson, A.E. & Ho, Y. (1975). *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*. Hemisphere Publishing Corporation, USA.
- (7) Cheng, L.; Subrahmanian, E. & Westerberg, A.W. (2004). A Comparison of Optimal Control and Stochastic Programming from a Formulation and Computational Perspective. *Computers and Chemical Engineering*, **29**, 149-164.
- (8) Dellaert, N. & de Kok, T. (2004). Integrating Resource and Production Decisions in a Simple Multi-stage Assembly System. *Int. J. Production Economics*, **90**, 281-294.
- (9) Dobos, I. (2003). Optimal Production Inventory for HMMS-type Reverse Logistics System. *Int. J. Production Economics*, **82**, 351-360.
- (10) Gershwin, R.; Hildebrant, R.; Suri, R. & Mitter, S.M. (1986). A Control Perspective on Recent Trends in Manufacturing Systems. *IEEE Control System Magazine*, **6**(2), 3-15.
- (11) Graves, S.C. (1999). A Single-Item Inventory Model for a Non-stationary Demand Process. *Manufacturing & Service Operations Management*, **1**(1).
- (12) Hackman, S.; Riano G.; Serfozo, R.; Huong, S; Lendermann. P. & Chan, L.P. (2002). A Stochastic Production Planning Model. Technical Report, The Logistic Institute, Georgia Tech and National University of Singapore.
- (13) Hax, A.C. & Candea, D. (1984). *Production and Inventory Management*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- (14) Higgins, P.; Le Roy, P. & Tierney, L. (1996). *Manufacturing Planning and Control: Beyond MRP II*. Chapman & Hall, USA.
- (15) Holt, C.C.; Modigliani, F.; Muth, J.F. & Simon, H.A. (1960). *Planning Production, Inventory and Work Force*. Prentice-Hall, NJ, USA.
- (16) Holt, C.C.; Modigliani, F. & Simon, H.A. (1955). A linear Decision Rule for Production and Employment Scheduling. *Management Science*, **2**(1), 1-29.
- (17) Iserman, R. (1981). *Digital Control System*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- (18) Jung, Y.J.; Blau, G.; Pekny, J.F.; Reklaitis, G.V. & Eversdyk, D. (2004). A Simulation based optimization approach to supply chain under demand uncertainty. *Computer and Chemical Engineering*, **28**, 2087-2106.
- (19) Kleindorfer, P.R. (1978). Stochastic Control Models in Management Science: Theory and Computation. **In:** *Applied Optimal Control, TIMS Studies in the Management Science*, vol. 9, 69-88, North-Holland.
- (20) Lassere, J.B.; Bes, C. & Roubelat, F. (1985). The Stochastic Discrete Dynamic Lot Size Problem: An Open-Loop Solution. *Operations Research*, **3**(3), 684-689.

- (21) Lim, A.E.B.; Moore, J.B. & Faybusovich, L. (1996). Linearly Constrained LQ and LQG Optimal Control. *13th Triennial World Congress*, San Francisco, USA.
- (22) Neck, R. (1984). Stochastic Control Theory and Operational Research (invited review). *European Journal of Operation Research*, **17**, 283-301.
- (23) O'Grady, P.J. & Bonney, M.C. (1984). A General Approach to Linear-Quadratic Production Planning. **In: *Advances Production Management Systems***, Elsevier Science Publishers, North-Holland.
- (24) Papadopoulos, H.T.; Heavey, C. & Browne, J. (1993). *Queuing Theory in Manufacturing System Analysis and Design*. Chapman & Hall, UK.
- (25) Pappoulis, A. (1991). *Probability, Random Variables, and Stochastic Process*. McGraw-Hill, UK.
- (26) Parlar, M.A. (1985). Stochastic Production Planning Model with a Dynamic Chance Constraint. *European Journal of Operational Research*, **20**, 255-260.
- (27) Pekelman, D. & Rausser, G.C. (1978). Adaptive Control: Survey of Methods and Applications. **In: *Applied Optimal Control, TIMS Studies in the Management Science***, vol. 9, 89-120, North-Holland.
- (28) Sahinidis, N.V. (2004). Optimization under Uncertainty: State-of-the-Art and Opportunities. *Computer and Chemical Engineering*, **28**(6-7), 971-983.
- (29) Sastri, T. (1985). A State Space Modeling Approach for Time Series Forecasting. *Management Science*, **31**(11).
- (30) Shen, R.F.C. (1994). Aggregate Production Planning by Stochastic Control. *European Journal of Operations Research*, North-Holland, **73**, 346-359.
- (31) Silva Filho, O.S. & Cezarino W. (2004). An Optimal Production Policy Applied to a Flow-shop Manufacturing System. *Brazilian Journal of Operations and Production Management*, **1**(1), 73-92.
- (32) Silva Filho, O.S. & Ventura, S. (1999). Optimal Feedback Control Scheme Helping Managers to Adjusting Industrial Resources of the Firm. *Control Engineering Practices*, Elsevier Science, **7**(4), 555-563.
- (33) Silva Filho, O.S. (1999). An Aggregate Production Planning Model with Demand under Uncertainty. *Production Planning & Control*, **10**(8).
- (34) Singhal, J. & Singhal, K. (1996). Alternate Approaches to Solving the Holt et al. Model and to Performing Sensitivity Analysis. *European Journal of Operational Research*, **91**.
- (35) Vadja, S. (1972). *Probabilistic Programming*. Academic Press, New York.
- (36) Yildirim, I.; Tan, B. & Karaesmen, F. (2005). A Multiperiod Stochastic Production Planning and Sourcing Problem with Service Level Constraints. *OR Spectrum*, **27**, 471-489.