

---

# PROBLEMA $H_2/H_\infty$ - SOLUÇÕES APROXIMADAS POR MEIO DE EXPANSÃO EM BASES

Roberto Ades\*  
rades@epq.ime.eb.br

Marcos Azevedo da Silveira†  
marcos@ele.puc-rio.br

\*Departamento de Engenharia Elétrica, IME, Praça General Tibúrcio, 80, Rio de Janeiro, RJ, 22290-270

†Departamento Engenharia Elétrica, PUC-Rio, R. Marquês de São Vicente, 225, Rio de Janeiro, RJ, 22453-900

---

## ABSTRACT

This paper presents a tutorial on the Mixed  $H_2/H_\infty$  Control Problem. It is formulated from the usual problems in the Control Theory and Servomechanisms, showing the existence, uniqueness and regularity conditions of its solutions. Besides, a direct method for approach its solution is showed with a certain detail, based on expansions of redundant generating sets and with the support of a dual method existent in the literature. The finite dimension resultant optimization problems are convex, demanding a subgradient associated to the  $H_\infty$  restriction. It seems non affect the numeric efficiency of the proposed algorithm, as it can be seen in some examples.

**KEYWORDS:** Robust control, mixed  $H_2/H_\infty$  problem, direct methods, subgradient.

## RESUMO

Neste artigo apresenta-se um tutorial sobre o Problema de Controle Ótimo  $H_2/H_\infty$ , formulando-o a partir dos problemas usuais da Teoria de Controle e Servomecanismos, mostrando as condições de existência, unicidade e regularidade de suas soluções. Apresenta-se também, com certo detalhe, um método direto para a aproximação de sua solução, baseado em expansões de conjuntos

geradores redundantes e em um método dual já existente na literatura. Os problemas de otimização aproximantes, convexos e de dimensão finita, exigem o uso de um subgradiente associado à restrição  $H_\infty$ , o que parece não afetar a eficiência numérica do algoritmo proposto, como é mostrado em alguns exemplos de sua aplicação.

**PALAVRAS-CHAVE:** Controle robusto, problema  $H_2/H_\infty$ , métodos diretos, subgradiente.

## 1 INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta uma visão geral do chamado problema de controle ótimo  $H_2/H_\infty$ , partindo da construção dos critérios e restrições que o definem à sua resolução via expansões sobre conjuntos geradores numericamente convenientes, um método derivado daquele de Galerkin (Krasnosel'skii et al., 1972). O objetivo deste artigo é retomar este importante problema como ferramenta de projeto de controladores, facilitando o seu uso, e apresentar, com algum detalhe, os resultados de existência e unicidade de sua solução, bem como a metodologia de resolução desenvolvida em Ades (1999). Esta metodologia, aqui discutida pela primeira vez neste nível de profundidade, permite o cálculo da solução (aproximada) do problema  $H_2/H_\infty$  sem modificar seus critérios ou restrições, mantendo assim seu significado original, o que é essencial nos projetos de controladores.

O problema  $H_2/H_\infty$  é um problema de controle ótimo sobre sistemas lineares com critérios quadráticos e res-

---

Artigo submetido em 10/05/01

1a. Revisão em 15/01/02

Aceito sob recomendação do Ed. Assoc. Prof. Liu Hsu

trições incorporando a classe de controladores desejada através da parametrização de Youla (e de parametrizações derivadas), acrescido de outras especificações envolvendo normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , entre as quais as de margem de estabilidade do sistema frente à perturbações em sua função de transferência (robustez em estabilidade para perturbações não-estruturadas). A apresentação deste problema e do método de resolução aqui proposto será feita sobre sistemas monovariáveis (SISO), permitindo uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. Sua extensão a sistemas multivariáveis (MIMO), utilizando técnicas canônicas neste contexto, será comentada na última seção do artigo. Na seção 3 será apresentada a construção dos critérios e das restrições mais usuais, incluindo o problema do servomecanismo robusto com especificações transitórias. Na seção 4 serão apresentados os resultados de existência, unicidade e regularidade das soluções do Problema  $H_2/H_\infty$ . Na seção 5 será discutido o método proposto, e na seção 6 apresentados alguns exemplos de sua aplicação. As notações e definições a serem utilizadas, assim como o contexto matemático dentro do qual será desenvolvida a teoria, serão os assuntos da seção 2. Buscou-se, sempre que possível, citar as referências históricas, conjuntamente com tutoriais ou livros editados em português. A seguir será apresentado um breve histórico do problema, classificando os artigos encontrados na literatura pela forma como colocam (ou recolocam) o problema e pelo tipo de técnica utilizada para sua resolução.

O problema  $H_2$  tem sua origem nos artigos de Youla (1975 e 1976) e sua equipe, sob a denominação de *Wiener-Hopf design*, onde os critérios quadráticos sobre sistemas lineares foram definidos de tal forma que a variável de otimização passa a ser o controlador linear representado no domínio da frequência. Para que o critério continuasse quadrático, o conjunto de controladores estabilizantes da planta foi parametrizado de forma afim por matrizes reais, racionais, próprias e estáveis, sendo chamada de parametrização de Youla (ver também Kučera (1975), Desoer et alii (1980) e Vidyasagar (1985)). Os critérios utilizados tinham sua origem em problemas de controle ótimo estocástico, modelando todos os sinais exógenos como processos estocásticos gaussianos estacionários. Youla et alii (1985), Park e Bongiorno (1989 e 1990) estenderam estes resultados a controladores com dois graus de liberdade e a problemas onde os sinais exógenos eram representados como elementos de famílias de funções quadraticamente integráveis, sem, no entanto, lograrem representar as especificações dos servomecanismos assintóticos habituais, onde os sinais exógenos pertencem a famílias de sinais persistentes. Cabe ainda assinalar que, na metodologia usada nestes artigos, não eram permitidas plantas com pólos

no eixo imaginário, o que dificultava seriamente a consideração dos sinais de referência ou das perturbações persistentes usuais<sup>1</sup>.

Em Silveira e Corrêa (1992), mostrou-se o cálculo de controladores ótimos para a resolução do problema do servomecanismo assintótico para as classes fornecidas de sinais de referência e de perturbação, permitindo a alocação de pólos e zeros no eixo imaginário, mesmo nos sensores, utilizando convenientemente: (i) produtos de Kronecker; (ii) a resolução de equações diofantinas sobre o anel das funções reais, racionais, próprias e estáveis e; (iii) a construção de critérios suficientemente ricos. Em Corrêa e Silveira (1995) apresentou-se critérios definidos a partir de minorantes de funcionais para toda a classe de sinais de referência e de distúrbios considerada. Estes funcionais foram desenvolvidos a partir de especificações transitórias e obtidos a partir das propriedades da transformada de Laplace. Como estes novos critérios obedecem, naturalmente, as condições de existência e unicidade da solução do problema  $H_2$ , a demonstração das soluções foi possível em toda a sua generalidade. A combinação dos diversos critérios também foi possível, conforme discutido no artigo citado.

As restrições  $H_\infty$  apareceram em Doyle e Stein (1981) e Zames (1981), no contexto do robustecimento da planta face a perturbações, em relação à propriedade de estabilidade, e foram depois exploradas em múltiplas direções. Uma descrição completa deste problema pode ser encontrada em Francis (1987) e Corrêa (1992 e 1994), onde são estudados três casos de interesse, considerando perturbações aditivas, multiplicativas ou nos fatores coprimos da planta, e em Cruz (1996). Outras restrições estacionárias ou transientes podem ser representadas como restrições na norma  $H_\infty$ , levando à definição de problemas de controle ótimo ditos  $H_\infty$ , como pode ser visto em Kwakernaak (1986) e Doyle et alii (1992), onde o conjunto de especificações é tratado sob a técnica de *loop*

---

<sup>1</sup>A metodologia proposta por Youla e sua equipe difere essencialmente da utilizada no Problema Linear Quadrático (LQP) e no Problema Linear Quadrático Gaussiano (LQG), como apresentada em Athans e Falb (1966) e em Kwakernaak e Sivan (1972), não apenas pela abordagem freqüencial (que reencontra o enfoque original de Wiener), mas pela possibilidade de imposição direta da estrutura do controlador. O "problema do servomecanismo ótimo" tratado no LQP pressupõe ou o rastreamento em média de sinais fixos e de quadrado integrável (donde não-persistentes) ou a adição do modelo interno da classe de sinais a ser rastreada assintoticamente à planta a ser controlada e a mudança de parte do controlador para cada novo sinal a ser rastreado assintoticamente. De fato, o controlador passa a ser afim, somando-se à parte linear um sinal, solução de nova equação dependente do sinal particular escolhido (Saeks e Murray, 1981). Naturalmente, no caso de rastreamento assintótico de sinais do tipo degrau, esta parte afim reduz-se à multiplicação do valor assintótico pretendido por uma constante, como já mostrado em Athans e Falb (1966).

*recovering*, e Cruz (1996).

O problema  $H_2/H_\infty$ , conjugando critérios quadráticos com restrições de robustez em estabilidade na norma  $H_\infty$ , foi inicialmente proposto em Bernstein e Haddad (1989) e em Glover e Mustafa (1989), gerando, desde então, na literatura uma grande variedade de problemas e diferentes métodos de resolução. Estes podem ser inicialmente classificados em duas categorias distintas, de acordo com o critério de otimização adotado, considerando se o critério quadrático original foi modificado ou não em função das restrições  $H_\infty$ .

Enquadram-se na primeira classe os métodos propostos em Bernstein e Haddad (1989), Khargonekar e Rotea (1991) e em Glover e Mustafa (1989). Os dois primeiros substituem as equações de Lyapunov do problema  $H_2$  original (sem restrições) por equações algébricas de Riccati (ou de Lyapunov) convenientemente adaptadas graças a um lema de Willems (Willems, 1971), gerando limitantes superiores do critério  $H_2$  englobando as restrições  $H_\infty$ . O método descrito em Bernstein e Haddad (1989) recai na resolução de um sistema de três equações algébricas de Riccati acopladas, enquanto o de Khargonekar e Rotea (1991) propõe uma mudança de variáveis levando a um problema de otimização convexo em dimensão finita igual a da ordem da planta. Em Glover e Mustafa (1989) modifica-se o problema original, substituindo-se o critério  $H_\infty$  pelo da máxima entropia, mantendo a restrição de robustez em estabilidade na norma  $H_\infty$ . Este problema, embora possuindo uma elegante solução, é, a rigor, distinto daquele aqui discutido. Outros artigos, como Peres et alii (1993), usam critérios convexos que não absorvem com naturalidade as restrições impostas por servomecanismos assintóticos, tratando as restrições  $H_\infty$  pela adaptação de equações de Riccati e de Lyapunov na forma citada acima, e diferem, também, do problema aqui discutido.

Os demais métodos apresentados na literatura manipulam o problema  $H_2/H_\infty$  usando os critérios originais, podendo ser subdivididos entre aqueles que geram soluções de problemas aproximados de forma direta via espaço primal, aqueles que utilizam desigualdades matriciais lineares (LMIs), e por fim, os que resolvem por dualidade, versões relaxadas do problema original. No primeiro grupo situam-se os métodos de Boyd et alii (1988), Sznaiier et alii (1997), Scherer (1993), bem como o apresentado neste trabalho. No segundo grupo enquadram-se os métodos propostos por Safonov e Goh (1994), Scherer (1995), Sales e Corrêa (1998) e em Sales (2000), e no terceiro, o método proposto em Corrêa et alii (1997).

O artigo de Boyd et alii (1988) não trata diretamente

da resolução numérica do problema  $H_2/H_\infty$ , mas propõe algumas idéias básicas referentes à utilização de bases ortogonais do espaço de Hardy  $H_+^2$ , compostas por funções racionais. Em Scherer (1993) comenta-se o uso das conhecidas funções de Laguerre e é proposto um algoritmo teórico para detecção da ordem da solução ótima de um problema  $H_2/H_\infty$  multiobjetivo, caso exista esta solução. O trabalho de Sznaiier et alii (1997) fornece limitantes inferiores para o valor ótimo do critério com o auxílio das funções de Laguerre. Apesar de interessantes do ponto de vista teórico, as soluções obtidas neste último artigo não produzem bons limitantes, pois o problema original é subdividido em dois subproblemas, sendo a restrição tratada independentemente do funcional de custo quadrático. Os trabalhos de Safonov (1994), Scherer (1995) e de Sales e Corrêa (1998) propõem resolver o problema via desigualdades matriciais lineares (LMIs), porém impondo restrições adicionais que conduzem a controladores não apropriados (*cf.* (Sales, 2000)). Em particular, Scherer (1995) iguala dois parâmetros independentes, levando a um novo problema com propriedades diversas do original. Em Sales (2000) discute-se problemas de viabilidade a partir da resolução de desigualdades matriciais lineares e bilineares dependentes da frequência via desenvolvimentos do método proposto por Corrêa et alii (1997).

O método de Corrêa et alii (1997) é baseado na abordagem do problema original de forma dual a partir de uma seqüência de problemas  $H_2$ , cujas soluções formam uma seqüência aproximante, fornecendo limitantes inferiores para o valor ótimo do critério adotado no problema original. A seqüência de aproximantes assim obtida é não-viável e possui rápido crescimento de ordem. O artigo sugere a utilização do método de redução de ordem via realizações balanceadas a fim de tratar o efeito mencionado.

Até 1999, em nosso conhecimento, não havia sido demonstrada a existência de solução do problema  $H_2/H_\infty$ . Sobre suas propriedades, supondo sua existência, Megretski (1994) demonstrara que a solução ótima, caso existisse, seria de dimensão infinita, salvo se a restrição  $H_\infty$  fosse obedecida pela solução do problema quadrático sem restrições. Já Corrêa et alii (1997) mostrara que a solução, caso existisse, pertenceria à casca convexa da restrição  $H_\infty$ . Os demais artigos ou substituíram o problema original por novos problemas em que a solução seria passível de ser determinada, ou construíram seqüências de problemas convergindo em algum sentido para o problema original, não demonstrando sequer que as soluções dos problemas aproximantes formariam uma seqüência aproximante para a solução do problema original.

A demonstração da existência e unicidade da solução do problema  $H_2/H_\infty$  em ambiente  $H_\infty$  foi anunciada pelos autores (1999) e apresentada em Ades (1999). Um estudo mais profundo desta demonstração (sob hipóteses mais gerais) e da regularidade da solução ótima pode ser encontrado em Silveira e Ades (2000) e em Silveira (2001). O conhecimento da existência da solução ótima e de suas propriedades permitiu refinar o método de Galerkin, levando ao método sugerido nestes trabalhos e apresentado aqui em detalhe.

O método proposto neste artigo tem por fim a obtenção de soluções aproximadas de dimensão finita e viáveis para o problema  $H_2/H_\infty$  a partir do método de Galerkin, usando conjuntos geradores previamente escolhidos para o espaço das soluções. Truncando-se o conjunto, determina-se *a priori* a ordem da solução aproximada a ser calculada, e ajusta-se os coeficientes dos vetores escolhidos com auxílio de um método de otimização apropriado. Pela própria natureza do método, os valores do critério quadrático calculados sobre as soluções aproximadas são limitantes superiores do critério ótimo, sendo estas soluções aproximadas viáveis.

Entre as possíveis bases a serem empregadas, a mais conhecida é a das funções de Laguerre (Hille, 1976). Na seção 5 serão apresentadas outras bases ortogonais que poderão ser utilizadas pelo método proposto, assim como um método geral de construção de conjuntos geradores redundantes mais convenientes para a resolução numérica do problema que as bases ortonormais habituais. O problema de otimização de dimensão finita, encontrado após o truncamento do conjunto gerador, embora convexo, não é diferenciável. Para sua resolução foi utilizado o algoritmo BFGS (Bazarra e Shetty, 1993) com busca unidimensional realizada pelo método de Wolfe (Bonnans et alii, 1997), complementado pelo uso de um subgradiente da restrição  $H_\infty$ . O algoritmo assim proposto funcionou de forma surpreendentemente eficaz e regular, apesar do uso de subgradientes, tendo sido testado em vários problemas *benchmark*, como mostrado por Ades (1999) e na seção 6.

De posse das aproximações calculadas por Corrêa et alii (1997) e daquelas geradas pelo método proposto, tornou-se possível calcular limitantes superiores e inferiores do valor ótimo do critério, permitindo avaliar a precisão da solução obtida.

O histórico acima apresentado foi direcionado em função do método a ser aqui discutido, o que é compreensível por razões de extensão e de foco. Assim, os fortes e belos desenvolvimentos da Teoria de Sistemas Lineares, como mostrados em Zhou et alii (1996), e em especial

os relacionados a realimentações de estado, realizações balanceadas, equações de Riccati e de Lyapunov, não foram citados - o que não é fazer justiça à sua relevância. Estes resultados são essenciais aos métodos aqui apresentados, principalmente se for considerado que, como os cálculos polinomiais não são numericamente robustos, obriga-nos a calcular as diversas fatorações usando equações na forma de estado. Mais precisamente, na metodologia aqui desenvolvida, apenas duas seções da obra citada não foram explicitamente utilizadas!

## 2 NOTAÇÃO E CONCEITOS BÁSICOS

A notação utilizada é a habitual na literatura da área, conforme Zhou et alii (1996). Por  $C_+^o$  ( $C_-^o$ ) representa-se o semiplano aberto complexo à direita (à esquerda) do eixo imaginário. Para uma função de transferência  $G(s)$  define-se  $G^*(s) = G^T(-s)$ . O grau relativo de uma função racional  $K(s) = N(s)D^{-1}(s)$ , representado por  $\partial_r K$ , é o grau de seu denominador  $D(s)$  subtraído do grau de seu numerador  $N(s)$ , ambos supostos polinomiais. Por  $L^2$  denota-se o espaço de Hilbert das funções quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário, munido do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(i\omega)g(i\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(-i\omega)g(i\omega)d\omega \quad (1)$$

Por  $H_+^2$  ( $H_-^2$ ) denota-se o subespaço das funções em  $L^2$  analíticas em  $C_+^o$  ( $C_-^o$ ), tais que a norma induzida pelo produto interno em (1) nas retas  $a+i\omega$ ,  $\omega$  percorrendo os números reais, para todo  $a>0$  ( $a<0$ ), é finita. Estes espaços são equipados com a norma  $L^2$ , neste caso denominada norma  $H_2$ :

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(i\omega)f(i\omega)d\omega = \langle f, f \rangle \quad (2)$$

A decomposição de uma função  $f \in L^2$  em parte estável e parte instável será representada como  $f = [f]_+ + [f]_-$ ,  $[f]_+ \in H_+^2$ ,  $[f]_- \in H_-^2$ .  $[\cdot]_+$  e  $[\cdot]_-$  denotam as projeções ortogonais de  $f$  em  $H_+^2$  e  $H_-^2$ , respectivamente. Cumpre lembrar que estes dois espaços são subespaços fechados e ortogonais de  $L^2$ , conforme a teoria dos espaços de Hardy  $H_+^2$  e  $H_-^2$ , exposta em Hille (1976) e Vidyasagar (1985).

Por  $L^\infty$  designa-se o espaço de Banach das funções essencialmente limitadas sobre o eixo imaginário. Por  $H_+^\infty$  ( $H_-^\infty$ ) denota-se o subespaço das funções em  $L^\infty$  analíticas e limitadas em  $C_+^o$  ( $C_-^o$ ), equipados com a norma

definida em (3), neste caso denominada norma  $H_\infty$ :

$$\|g\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} |g(i\omega)| \quad (3)$$

Por  $L^1$  designa-se o espaço das funções absolutamente integráveis (segundo Lebesgue), e por  $E\{\cdot\}$  a esperança matemática da expressão entre colchetes. Com esta notação, serão representadas as seguintes densidades espectrais de potência:  $\Phi_r(s) = E\{r^*(s)r(s)\} = \phi_r^*(s)\phi_r(s)$ ,  $\Phi_d(s) = E\{d^*(s)d(s)\} = \phi_d^*(s)\phi_d(s)$ .

Os espaços de Hardy ponderados de ordem  $-k$ , assunto de definições e teoremas na seção 4, serão representados por  $H_+^{2,-k}$ , onde  $\langle f, g \rangle_k$  e  $\|f\|_{2,k}$  representam o produto interno e a norma nestes espaços.

Supõe-se conhecidos a teoria e os métodos de fatoração coprimas de funções racionais como quocientes de matrizes racionais próprias estáveis e seu uso na resolução de equações diofantinas sobre o anel euclidiano das matrizes polinomiais e o das matrizes reais, racionais próprias estáveis, como exposto em Vidyasagar (1985) e Silveira (1995), por exemplo. O máximo divisor comum de  $f$  e  $g$  será representado por  $\operatorname{MDC}\{f,g\}$ .

As notações relativas ao caso multivariável serão apresentadas diretamente na seção 7.

### 3 CONSTRUÇÃO DO PROBLEMA $H_2/H_\infty$

Nesta seção será construído, a partir dos problemas de controle que o motivam, o problema  $H_2/H_\infty$  a ser tratado. Serão considerados apenas problemas monovariáveis (SISO), dado que são suficientes para compreender as idéias centrais, evitando que sejam encobertas pelas técnicas e pelas notações necessárias ao caso multivariável (MIMO), extensão que será indicada na penúltima seção do artigo.

O problema de controle a ser discutido é, em essência, o problema do servomecanismo assintótico, com imposição do comportamento transiente e da redução (em média quadrática) do efeito de perturbações via minimização de um critério quadrático convenientemente escolhido, adicionando-se a exigência de robustez em estabilidade face a perturbações na planta dentro de um conjunto pré-especificado. Para enfrentar a minimização do critério será preciso parametrizar o conjunto de todos os controladores estabilizantes que resolvem o problema do servomecanismo assintótico. Em seguida, será construído o critério quadrático e, enfim, discutida a robustez em estabilidade e algumas outras especificações, terminando a definição do problema.

### 3.1 O Problema do Servomecanismo Assintótico e a Parametrização de suas Soluções

Suponha uma planta linear e um controlador com dois graus de liberdade descritos por:

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$u(s) = C_1(s)r(s) + C_2(s)[z(s) - v(s)] + w(s)$$

onde  $f(s)$  representa a transformada de Laplace da função  $f(t)$ ;  $y(t)$  e  $z(t)$  representam a saída a ser controlada e a saída medida;  $u(t)$  e  $d(t)$  representam a variável de controle e o sinal de perturbação sobre a planta;  $r(t)$  representa o sinal de referência indicando o comportamento assintótico desejado para  $y(t)$ ;  $w(t)$  e  $v(t)$  representam ruídos; as funções reais racionais próprias  $P_{kj}(s)$  representam as funções de transferência descrevendo a planta  $P(s)$ ; e as funções reais racionais próprias  $C_j(s)$  representam as funções de transferência descrevendo o controlador  $C(s)$ .

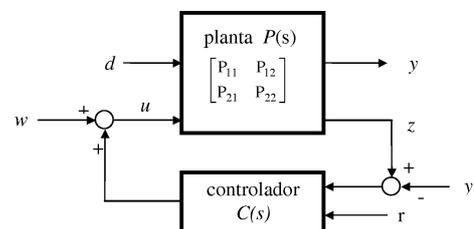


Figura 1: Diagrama do sistema controlado.

Os conjuntos de sinais de referência e de perturbação são descritos por:

$$\begin{aligned} r(s) &= \Psi_r^{-1}(s)\mu_r(s) \\ d(s) &= \Psi_d^{-1}(s)\mu_d(s) \end{aligned} \quad (5)$$

sendo  $\Psi_r(s)$  e  $\Psi_d(s)$  funções reais, racionais, bipróprias e estáveis dadas com todos os seus zeros na região de instabilidade,  $\mu_r(s)$  e  $\mu_d(s)$  funções reais, racionais, estritamente próprias e estáveis variando livremente de forma a descrever as classes de sinais de referências e de distúrbios. Serão supostas conhecidas as fatorações coprimas (no anel euclidiano das funções racionais próprias estáveis)  $P_{kj}(s) = N_{kj}(s)[D_{kj}(s)]^{-1}$ , onde  $N_{kj}(s)$  e  $D_{kj}(s)$  são funções racionais próprias estáveis, com  $D_{kj}(s)$  biprópria. As funções reais racionais próprias

estáveis  $X(s)$  e  $Y(s)$  (a última sendo biprópria) serão definidas pela equação diofantina (Identidade de Bézout):

$$Y(s)D_{21}(s) + X(s)N_{21}(s) = 1 \quad (6)$$

Um estudo mais aprofundado das equações diofantinas e das fatorações, polinomiais ou sobre o conjunto das funções reais, racionais, próprias e estáveis, pode ser encontrado em Vidyasagar (1985), Corrêa (1992) ou em Silveira (1995), mostrando que (6) possui soluções  $Y(s)$  e  $X(s)$  se e somente se  $D_{21}(s)$  e  $N_{21}(s)$  são coprimos. O último texto mostra como calculá-las a partir de soluções da equação polinomial correspondente para fatorações (coprimas) polinomiais de  $P_{21}(s)$ , seguindo diretamente o caminho encontrado por Youla e sua equipe.

O controlador será suposto na forma  $[C_1(s) \ C_2(s)] = [D_c(s)]^{-1} \cdot [N_{c1}(s) \ N_{c2}(s)]$ , sendo o par  $\{D_c(s), N_{c2}(s)\}$  coprimo e  $D_c(s)$  bipróprio. Serão supostas as condições de estabilizabilidade da malha (Nett, 1986), isto é, que as funções racionais:

$$\begin{aligned} Q_a(s) &= P_{11}(s)D_{21}(s) \\ Q_b(s) &= P_{22}(s)D_{21}(s) \\ Q_c(s) &= P_{12}(s) - P_{11}(s)D_{21}(s)X(s)P_{22}(s) \end{aligned}$$

sejam próprias e estáveis. Neste caso, mostra-se por Nett (1986), Silveira (1995) e Corrêa (1992), que o conjunto dos controladores estabilizantes da malha é descrito por:

$$\begin{aligned} C_1(s) &= [Y(s) + K(s)N_{21}(s)]^{-1}M(s) \\ C_2(s) &= [Y(s) + K(s)N_{21}(s)]^{-1}[X(s) - K(s)D_{21}(s)] \end{aligned}$$

para  $M(s)$  e  $K(s)$  percorrendo o conjunto das funções reais racionais próprias estáveis tais que  $[Y(s) + K(s)N_{21}(s)]$  é uma função biprópria. Usando este controlador, pode-se calcular algebricamente o erro  $e(s) = r(s) - y(s)$  e o controle  $u(s)$ , levando a:

$$\begin{aligned} e &= (1 - Q_a M)\Psi_r^{-1}\mu_r - (Q_a K Q_b + Q_c)\Psi_d^{-1}\mu_d \\ u &= D_{21}M\Psi_r^{-1}\mu_r - (X - D_{21}K)Q_b\Psi_d^{-1}\mu_d \end{aligned}$$

onde o argumento complexo “ $s$ ” deixou de ser representado por simplicidade de notação (quando houver risco de confusão, os argumentos “ $s$ ” e “ $t$ ” serão devidamente explicitados). O importante para a construção do problema é que estas expressões sejam funções afins dos parâmetros  $K$  e  $M$ , funções reais racionais próprias estáveis.

Como  $e(s)$  é uma função racional,  $e(t) \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$  para todo  $\mu_r$  e todo  $\mu_d$  (como definidos) se e somente se  $(1 - Q_a M)\Psi_r^{-1}$  e  $(Q_a K Q_b + Q_c)\Psi_d^{-1}$  são funções estáveis, isto é, possuem todos os seus pólos na região de

estabilidade (Corrêa, 1992), (Silveira, 1995). Estas são as condições de rastreamento assintótico de sinais de referência  $r(s)$  da classe descrita por  $\Psi_r^{-1}\mu_r$  e de rejeição assintótica de perturbações  $d(s)$  da classe descrita por  $\Psi_d^{-1}\mu_d$ , conduzindo às equações diofantinas:

$$Q_a M + F_r \Psi_r = 1 \text{ e } Q_a K Q_b + F_d \Psi_d = -Q_c \quad (7)$$

solúveis se e somente se o par  $\{Q_a, \Psi_r\}$  é coprimo e se o MDC  $\{Q_a Q_b, \Psi_d\}$  divide  $Q_c$ . Resolvendo as duas equações em (7), encontra-se que:

$$M = X_r + G\Psi_r$$

para toda função racional própria estável  $G, X_r$  tal que  $Q_a X_r + Y_r \Psi_r = 1$  (existindo pela coprimidade pressuposta) e:

$$K = -X_d \bar{Q}_c + H \bar{\Psi}_d$$

Para toda função racional própria estável  $H$  tal que  $[Y + (H\bar{\Psi}_d - X_d\bar{Q}_c)N_{21}]$  seja biprópria,  $\bar{Q}$  e  $\bar{\Psi}_d$  obtidos de  $Q_a Q_b$  e de  $\Psi_d$ , respectivamente, dividindo-os por MDC  $\{Q_a Q_b, \Psi_d\}$ ,  $X_d$  tal que  $\bar{Q}X_d + \bar{\Psi}_d Y_d = 1$  (existindo, pois  $\bar{Q}$  e  $\bar{\Psi}_d$  são coprimos por construção).

Expressões semelhantes podem ser encontradas para a rejeição assintótica de ruídos  $v(s)$  no sensor, onde  $u(s) = C_1(s)r(s) - C_2(s)[z(s) + v(s)]$ , exigindo novas condições de coprimidade para a existência de soluções (Silveira e Corrêa, 1992). Controladores com um grau de liberdade podem também ser considerados, fazendo-se  $C_1(s) = C_2(s)$ , isto é,  $M = X - K D_{21}$ , o que exigirá novas condições de coprimidade. Controladores qualitativamente robustos, isto é, aqueles que mantêm as propriedades de rastreamento assintótico para as perturbações na planta suficientemente pequenas e dentro de uma região admissível dada (Silveira, 1996), também levam a parametrizações mais complexas. Finalmente, se  $y = z$  (o sinal controlado coincide com o sinal medido), as condições de Nett (1986) recaem no caso clássico onde  $Q_a$  e  $Q_b$  representam o numerador da planta.

### 3.2 Construção do Critério Quadrático

A substituição dos valores de  $K$  e  $M$  na expressão de  $e(s)$  e de  $u(s)$  acima leva, depois de alguns cálculos, a:

$$\begin{aligned} e &= \{(1 - Q_a X_r)\Psi_r^{-1} - Q_a G\}\mu_r + \\ &\quad + \{(\bar{Q}X_d\bar{Q}_c - Q_c)\bar{\Psi}_d^{-1} - \bar{Q}H\}\mu_d \\ u &= \{D_{21}[X_r\Psi_r^{-1} + G]\}\mu_r - \\ &\quad - \{(X + D_{21}X_d\bar{Q}_c)Q_b\Psi_d^{-1} - D_{21}H Q_b\}\mu_d \end{aligned} \quad (8)$$

onde todas as parcelas de (8) são funções reais racionais próprias estáveis, graças às equações em (7).

Deseja-se construir um critério quadrático sobre  $e(t)$  e  $u(t)$ , considerando todo o conjunto de sinais de referência e de perturbações, isto é, independente de  $\mu_r$  e de  $\mu_d$ . Para isso, seguindo Corrêa e Silveira (1995), será aplicada uma conhecida propriedade da transformada de Fourier (Rudin, 1966, Theorem 9.6) ao erro filtrado  $\tilde{e}(s) = W_r(s)e(s)$ , sendo  $W_r(s)$  uma função racional tal que  $\tilde{e}(s)$  seja estritamente própria e estável. Como a função  $\tilde{e}(t)$  é contínua e limitada,

$$\sup_{t \in R} |\tilde{e}(t)| \leq \| \{ [(1 - Q_a X_r) \Psi_r^{-1}] - Q_a G \} \mu_r + \{ (\bar{Q} X_d \bar{Q}_c - Q_c) \bar{\Psi}_d^{-1} - D_{21} H Q_b \} \mu_d \|_1$$

onde  $\|f(\cdot)\|_1$  representa a norma  $L^1$  da função  $f(s)$  restrita ao eixo imaginário. Usando que os termos entre colchetes,  $\mu_r(s)$  e  $\mu_d(s)$  são quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário, e elevando a expressão ao quadrado, pode-se verificar que (usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz):

$$\begin{aligned} \sup_{t \in R} |\tilde{e}(t)|^2 &\leq \|W_r \{ [(1 - Q_a X_r) \Psi_r^{-1}] - Q_a G \}\|_2^2 \| \mu_r \|^2 \text{ se } \mu_d \equiv 0 \\ \sup_{t \in R} |\tilde{e}(t)|^2 &\leq \|W_r \{ (\bar{Q} X_d \bar{Q}_c - Q_c) \bar{\Psi}_d^{-1} - D_{21} H Q_b \}\|_2^2 \| \mu_d \|^2 \text{ se } \mu_r \equiv 0 \end{aligned}$$

com  $\|f(\cdot)\|_2$  representando a norma quadrática de  $f(s)$  definida na seção 2. Assim, as minimizações dos termos quadráticos que multiplicam  $\| \mu_r \|^2$  e  $\| \mu_d \|^2$  estão relacionadas com a minimização do valor máximo do módulo do erro (no tempo  $t$ ) para todos os sinais de referência e de perturbação considerados. As definições dos critérios:

$$\begin{aligned} J_{er}(G) &= \|W_r \{ [(1 - Q_a X_r) \Psi_r^{-1}] - Q_a G \}\|_2^2 \text{ e} \\ J_{ed}(H) &= \|W_r \{ (\bar{Q} X_d \bar{Q}_c - Q_c) \bar{\Psi}_d^{-1} - D_{21} H Q_b \}\|_2^2 \end{aligned}$$

passam a ser naturais, lembrando que estão relacionados com o comportamento transitório do sistema controlado. Um estudo mais aprofundado desta relação encontra-se em Corrêa e Silveira (1995). O uso do filtro  $W_r$  é essencial para evitar descontinuidades iniciais nos termos que formam  $e(t)$ , sem o que impossibilitariam as majorações utilizadas.

A construção de um critério envolvendo  $u(s)$  não pode seguir o mesmo caminho, pois, como  $r(s)$  é um sinal persistente, donde não pertencente a  $L^2$ ,  $u(s)$  também será um sinal persistente. A solução consiste em considerar um critério apenas sobre a parte transitória de  $u(t)$ , retirando-lhe sua parte estacionária. De fato, mostrou-se mais interessante (Corrêa e Silveira, 1995) definir um

sinal ponderando convenientemente as duas partes por:

$$\bar{u} = [D_{21} X_r \Psi_r^{-1} \mu_r]_+ + D_{21} G \mu_r + (1 - W_{ru}) [D_{21} X_r \Psi_r^{-1} \mu_r]_- \quad (\text{se } \mu_d \equiv 0),$$

onde  $W_{ru}$  é uma função racional, estritamente própria e estável, tal que o último termo da expressão seja também estável. Cálculos diretos com as integrais definindo as normas quadráticas mostram que, sempre para  $\mu_d \equiv 0$ :

$$\| \bar{u} \|^2 \leq \|W_{ru} M_{ro} + M_{r1} G\|_2^2 \| \tilde{\mu}_r \|^2$$

onde  $M_{ro}$  e  $M_{r1}$  são funções racionais próprias tais que  $W_{ru} M_{ro}$  e  $M_{r1}$  são estáveis e as normas quadráticas são finitas para todo  $G$ , sendo  $\| \tilde{\mu}_r \|$  a norma euclidiana habitual do vetor real formado pelos coeficientes numéricos do numerador de  $\mu_r(s)$ . Considerações análogas para o caso em que  $\mu_r \equiv 0$  e  $\mu_d \neq 0$  levam, *mutatis mutandis*, a uma expressão da forma:

$$\| \bar{u} \|^2 \leq \|W_{du} M_{do} + M_{d1} H\|_2^2 \| \tilde{\mu}_d \|^2$$

As definições dos critérios:

$$\begin{aligned} J_{ur}(G) &= \|W_{ru} M_{ro} + M_{r1} G\|_2^2 \text{ e} \\ J_{ud}(H) &= \|W_{du} M_{do} + M_{d1} H\|_2^2 \end{aligned}$$

passam a ser naturais, observando-se que estão relacionados com o comportamento transitório do sistema controlado para todos os sinais de referência e de perturbação considerados. Um estudo de como a escolha dos filtros de ponderação  $W_r$ ,  $W_{ru}$  e  $W_{du}$  afeta o regime transitório do sistema controlado aparece em Corrêa e Silveira (1995). Neste trabalho também é demonstrado que a minimização dos critérios compostos:

$$J_a(G) = J_{er}(G) + \rho_a J_{ur}(G), \quad J_b(H) = J_{ed}(H) + \rho_b J_{ud}(H)$$

sempre possui solução para  $\rho_a > 0$  e  $\rho_b > 0$ , com  $G(s)$  e  $H(s)$  funções racionais próprias estáveis. Este ponto será revisto mais adiante sobre o problema  $H_2$  geral.

Critérios quadráticos como os construídos acima são denominados de “desempenho quadrático” na literatura. Outras motivações para critérios deste tipo podem ser encontradas em Chaoubah (1999).

Em problemas de controle ótimo estocástico (LQG) surgem também critérios quadráticos deste tipo quando os sinais de perturbação são modelados como processos estocásticos gaussianos estacionários e de média nula, com densidade espectral de potência conhecida, como nos artigos já citados de Youla e sua equipe. Neste tipo de problema busca-se minimizar uma combinação linear

positiva das integrais no tempo das covariâncias do erro  $e(t)$  e de  $u(t)$ . Denotando as densidades espectrais de potência de  $r(t)$  e de  $d(t)$  por  $\Phi_r(s)$  e  $\Phi_d(s)$ , respectivamente, e sendo  $\rho$  um número real positivo, os cálculos acima mostram que os critérios quadráticos associados podem ser escritos como:

$$J(G, H) = E\left\{\int_0^\infty [e^T(t)e(t) + \rho u^T(t)u(t)]dt\right\} = \int_{-\infty}^\infty [E\{e^T(s)e(s)\} + \rho E\{u^T(s)u(s)\}]_{s=i\omega} d\omega$$

que, após o uso das expressões (8) e das decomposições:

$$E\{r^T(s)r(s)\} = \Phi_r(s) = \phi_r^*(s)\phi_r(s) \\ E\{d^T(s)d(s)\} = \Phi_d(s) = \phi_d^*(s)\phi_d(s)$$

(onde  $\phi_r(s)$  e  $\phi_d(s)$  são racionais, próprias, estáveis e de fase mínima), chega-se a:

$$J(G, H) = \|[ (1 - Q_a X_r) - Q_a G \Psi_r ] \phi_r \|_2^2 + \rho \| D_{21} [ X_r + G \Psi_r ] \phi_r \|_2^2 + \|[ (\bar{Q} X_d \bar{Q}_c - Q_c) - \bar{Q} H \bar{\Psi}_d ] \phi_d \|_2^2 + \rho \| [ (X + D_{21} X_d \bar{Q}_c) Q_b - D_{21} H Q_b \bar{\Psi}_d ] \phi_d \|_2^2$$

com  $\rho > 0$ , gerando novos funcionais quadráticos a serem adicionados aos anteriores. Funcionais correspondentes a ruídos como  $v(t)$  e a sinais como  $z(t)$  são construídos em Silveira e Corrêa (1992) e, um funcional considerando o efeito de primeira ordem em variações na planta é construído em Youla et alii (1976).

A soma destes diversos funcionais quadráticos, após alguns cálculos (que, para sistemas multivariáveis, fazem apelo ao produto de Kronecker), conduz a funcionais do tipo:

$$J_2(G) = \int_{-\infty}^\infty [G^*(s)\Gamma(s)G(s) - 2G^*(s)\gamma(s)]_{s=i\omega} d\omega + J_2(0)$$

onde  $\Gamma(s) = \Gamma^*(s)$  (isto é,  $\Gamma(s)$  é uma função “parahermitiana”) não possui pólos ou zeros no eixo imaginário, sendo fatorável (por um conhecido teorema devido a Youla) como  $\Gamma(s) = \Phi^*(s)\Phi(s)$ , sabendo-se que  $\Phi(s)$  é uma função real racional, estável e de fase mínima. De fato, a combinação de diferentes critérios como os descritos acima busca evitar que  $\Gamma(s)$  tenha zeros ou pólos no eixo imaginário, como discutido em Silveira e Corrêa (1992). Mais ainda, a formação dos termos permite mostrar que  $\gamma(s) = \Phi^*(s)\eta(s)$ , onde  $\eta(s)$  não possui pólos no eixo imaginário (embora possa possuir zeros no eixo imaginário e pólos em  $C_+^o$ ).

### 3.3 Construção das restrições

Como é comum em problemas multicritério, pode-se combinar partes dos funcionais quadráticos já definidos entre si usando combinações lineares positivas, deixando os restantes para serem tratados como restrições, no formato:

$$\bar{J}(G) = \int_{-\infty}^\infty [G^*(s)\bar{\Gamma}(s)G(s) - 2G^*(s)\bar{\gamma}(s)]_{s=i\omega} d\omega + \bar{J}(0) \leq \lambda_2$$

com  $\lambda_2$  um número real positivo e maior que o mínimo de  $\bar{J}(G)$ , de forma que o conjunto assim definido não seja vazio. Essa restrição pode ser vista como uma relaxação da condição de minimizar  $\bar{J}(G)$ .

Outros funcionais muito utilizados (como critérios a serem otimizados ou para definir novas restrições) empregam a norma do espaço  $H_+^\infty$ . Uma primeira classe corresponde a problemas de filtragem, onde busca-se fazer o ganho estacionário de alguma das funções de transferência da malha, menor que um valor dado, em uma determinada faixa de frequências. Por exemplo, se é desejado que o ganho estacionário da perturbação  $d(s)$  para o erro  $e(s)$  seja inferior a  $\lambda$  na faixa de frequências  $[\omega_a, \omega_b]$ , costuma-se escolher uma função racional  $W(s)$  cujo módulo seja aproximadamente unitário em  $[\omega_a, \omega_b]$  e desprezível fora, buscando funções racionais próprias estáveis  $H(s)$  que parametrizam os controladores de interesse tais que:

$$\sup_{\omega \in R} |W[\bar{Q} X_d \bar{Q}_c - Q_c - \bar{Q} H \bar{\Psi}_d]|_{s=i\omega} = \|W[\bar{Q} X_d \bar{Q}_c - Q_c - \bar{Q} H \bar{\Psi}_d]\|_\infty \leq \lambda$$

Restrições deste tipo podem ser escritas englobando as diferentes especificações estacionárias (sobre “bandas de frequência”), como o rastreamento assintótico ou a rejeição assintótica de perturbações, trocando a condição de erro nulo em dada frequência por ganho limitado na banda de frequências escolhida (para as funções de transferência de  $r(s)$  ou de  $d(s)$  a  $e(s)$ , respectivamente). Nesta formulação recupera-se os problemas originais da área de controle devidos a Bode, que são apresentados nos textos clássicos nas áreas de Controle e de Eletrônica Linear (ver Doyle et alii (1992) ou Cruz (1996) para um desenvolvimento mais detalhado). Este tipo de problema aparece naturalmente como uma restrição a ser obedecida, e não como um critério a ser minimizado. Cabe observar que, na formulação tradicional devida a Bode, a parametrização de Youla não é usada, sendo o parâmetro de projeto a função de transferência do controlador  $C_2(s)$ . Neste caso o funcional  $\bar{J}(G)$  deixa de ser quadrático em relação ao parâmetro.

Uma variante deste problema aparece quando há o interesse de aproximar o máximo possível (no sentido do ganho estacionário) uma das funções de transferência do sistema controlado de um filtro dado. Por exemplo, deseja-se que a função de transferência de  $d(s)$  a  $e(s)$  aproxime ao máximo um filtro para perturbações em uma dada banda de frequências, digamos o filtro  $R(s)$ . Neste caso o problema passa a ser o de minimizar a diferença entre os diagramas de Bode das funções  $R(s)$  e de  $[\bar{Q}X_d\bar{Q}_c - Q_c - \bar{Q}H\Psi_d](s)$  ao longo da banda de frequências de interesse, ou seja, minimizar:

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in R} |W[\bar{Q}X_d\bar{Q}_c - Q_c - \bar{Q}H\Psi_d] - R|_{s=i\omega} &= \\ &= \|W[\bar{Q}X_d\bar{Q}_c - Q_c - \bar{Q}H\Psi_d] - R\|_{\infty} \end{aligned}$$

onde o filtro de ponderação  $W(s)$  só é significativo na banda de frequências estipulada. Tem-se o chamado *model matching problem*, que pode gerar uma restrição na forma já estudada, como encontrar  $H(s) \in H_{\infty}^+$  tal que:

$$\begin{aligned} \sup_{\omega \in R} |W[\bar{Q}X_d\bar{Q}_c - Q_c - \bar{Q}H\Psi_d] - R|_{s=i\omega} &= \\ &= \|W[\bar{Q}X_d\bar{Q}_c - Q_c - \bar{Q}H\Psi_d] - R\|_{\infty} \leq \lambda \end{aligned}$$

para  $\lambda$  superior ao ínfimo da expressão.

Uma terceira classe de problemas é chamada de problema de desempenho  $H_{\infty}$ , onde procura-se minimizar o ganho do sistema controlado, visto como um operador transformando sinais de quadrado integrável. Por exemplo, supondo  $d(t)$  de quadrado integrável, com  $\|d(t)\|_2 < \infty$ , o ganho  $L^2$  do operador que relaciona  $d(t)$  ao erro  $e(t)$  é a menor constante real  $\kappa$  tal que  $\|e(t)\|_2 \leq \kappa\|d(t)\|_2$ , para todo  $d(t)$ . Esta constante depende do controlador escolhido, e o problema busca escolher o controlador de forma a minimizar  $\kappa$ . Denotando a função de transferência que relaciona  $d(s)$  a  $e(s)$  por  $H_{de}(s)$ , o operador de interesse é descrito por:

$$e(t) = \int_0^t h_{de}(t-\tau)d(\tau)d\tau \Leftrightarrow e(s) = H_{de}(s)d(s)$$

Aplicando a transformada de Fourier e o Teorema de Parseval ao cálculo da norma quadrática (no tempo) de  $e(t)$ , encontra-se:

$$\begin{aligned} \|e(t)\|_2^2 &= \|e(i\omega)\|_2^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |e(i\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{de}(i\omega)d(i\omega)|^2 d\omega \leq \\ &\leq \sup_{\omega \in R} |H_{de}(i\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |d(i\omega)|^2 d\omega = \|H_{de}(s)\|_{\infty}^2 \|d(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

onde  $\kappa^2 \leq \|H_{de}\|_{\infty}^2$ . Por outro lado, suponha que  $\|H_{de}\|_{\infty} = |H_{de}(i\omega_o)|$ , para alguma frequência  $\omega_o$ , e faça  $d_{\varepsilon}(i\omega) = 1$  para  $\omega \in [\omega_o - \varepsilon, \omega_o + \varepsilon]$  e nula fora deste intervalo. Neste caso  $\|d_{\varepsilon}(i\omega)\|_2 < \infty$ , isto é,  $d_{\varepsilon}(s)$  é uma função de quadrado integrável. Definindo  $e_{\varepsilon}(s) = H_{de}(s)d_{\varepsilon}(s)$ , é fácil verificar que:

$$\|e_{\varepsilon}\|_2^2 = \|H_{de}\|_{\infty}^2 \|d_{\varepsilon}\|_2^2 + \xi(\varepsilon), \text{ onde } \xi(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ se } \varepsilon \rightarrow 0$$

Assim, a razão  $\|e_{\varepsilon}\|_2^2/\|d_{\varepsilon}\|_2^2$  aproxima-se arbitrariamente de  $\|H_{de}\|_{\infty}^2$  se  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o que implica ser o supremo da razão igual a  $\|H_{de}\|_{\infty}^2$ , isto é,  $\kappa = \|H_{de}\|_{\infty}$ : o ganho do operador sobre o  $L^2$  associado a  $H_{de}(s)$  é dado exatamente por  $\|H_{de}\|_{\infty}$ .

Substituindo a expressão de  $H_{de}(s)$  em função do parâmetro de Youla, dada em (8), e ponderando-a (por conveniência futura do projeto) por um filtro  $W$ , o conjunto de parâmetros  $H$  que limita o ganho  $L^2$  com  $\kappa \leq \lambda$  é descrito pela condição:

$$\|W[\bar{Q}X_d\bar{Q}_c - Q_c - \bar{Q}H\Psi_d]\|_{\infty} \leq \lambda,$$

a mesma que apareceu no problema de filtragem acima.

Outros funcionais de desempenho  $H_{\infty}$  podem ser definidos, considerando a influência de perturbações e ruídos quadraticamente integráveis, aplicados a diferentes pontos da malha de controle e influenciando diferentes sinais de interesse.

A robustez de estabilidade conduz a uma das mais importantes restrições usando a norma  $H_{\infty}$ . O problema consiste em escolher controladores estabilizantes que estabilizem não só a planta nominal, mas também a planta perturbada, para perturbações livres dentro de um conjunto pré-especificado. Será desenvolvida aqui uma medida da robustez de estabilidade para perturbações aditivas não-estruturadas, isto é, quando a planta nominal  $P_{21}(s)$  é perturbada para  $P_{21}(s) + \Delta P_{21}(s)$ ,  $\Delta P_{21}(s)$  livre no conjunto de funções de transferência  $\Delta P(s)$  tais que  $|\Delta P(i\omega)| \leq m(\omega)$ ,  $m(\omega)$  uma função de tolerância dada. Perturbações multiplicativas ou nos fatores coprimos da planta são estudadas em Corrêa (1992) e em Cruz (1996).

Pelo critério de Nyquist, o controlador  $C_2 = [D_{c2}]^{-1}N_{c2}$  estabiliza a planta nominal  $P_{21}$  se a curva  $[P_{21}C_2](\omega)$  envolve o ponto  $s = -1 + 0i$  tantas vezes quanto o número de pólos de  $P_{21}C_2$  no semiplano  $s$  aberto à direita do eixo imaginário, no sentido horário. Para que o mesmo controlador  $C_2$  estabilize todas as plantas perturbadas  $P_{21} + \Delta P_{21}$ , dada a estabilidade do sistema controlado nominal,  $|\Delta P(i\omega)| \leq m(\omega)$ , a curva  $[(P_{21} + \Delta P_{21})C_2](i\omega)$  não deve tocar o ponto  $s = -1$  para qualquer perturbação na classe considerada. Isto

é,  $[(P_{21} + \Delta P_{21})C_2](i\omega) \neq -1$  para  $|\Delta P(i\omega)| \leq m(\omega)$ . Ou ainda,  $1 + [(P_{21} + \Delta P_{21})C_2](i\omega) \neq 0$  para  $|\Delta P(i\omega)| \leq m(\omega)$ . Dividindo a equação por  $1 + [P_{21}C_2](i\omega)$ , obtém-se a condição:

$$\left[1 + \frac{C_2}{1 + P_{21}C_2} \Delta P\right](i\omega) \neq 0, \text{ para } |\Delta P(i\omega)| \leq m(\omega),$$

que será verificada se e somente se:

$$\left[\frac{C_2}{1 + P_{21}C_2}\right](i\omega) < \frac{1}{m(\omega)}, \text{ para todo } \omega \text{ real.}$$

Costuma-se trocar o uso da função  $m(\omega)$  pelo uso de um filtro  $W(s)$ , próprio e estável, tal que  $|W(i\omega)|$  aproxime  $m(\omega)$  por falta, reescrevendo-se a condição como:

$$\left[\frac{WC_2}{1 + P_{21}C_2}\right](i\omega) < \tilde{\lambda}, \text{ para todo } \omega,$$

ou seja,  $\left\|\frac{WC_2}{1 + P_{21}C_2}\right\|_{\infty} < \tilde{\lambda}$  onde  $\|\cdot\|_{\infty}$  representa a norma  $H_{\infty}$ . Recalculando a função de transferência à esquerda em função do parâmetro  $H$ , encontra-se:

$$WC_2(1 + P_{21}C_2)^{-1} = WD_{21}N_{c2} = \\ WD_{21}[X + X_d\bar{Q}_cD_{21} - H\bar{\Psi}_dD_{21}]$$

Relaxando levemente a desigualdade estrita e transformando-a em uma desigualdade não estrita, chega-se a seguinte condição:

$$\|WD_{21}[X + X_d\bar{Q}_cD_{21} - H\bar{\Psi}_dD_{21}]\|_{\infty} \leq \lambda < \tilde{\lambda}$$

semelhante à restrição de desempenho  $H_{\infty}$ .

O uso de perturbações multiplicativas leva a condições semelhantes (trocando  $WD_{12}$  por  $WN_{12}$ ), assim como o uso de perturbações nos fatores coprimos da planta. Cruz (1996) desenvolve outras restrições deste tipo considerando a robustez de desempenho da planta em relação a perturbações não estruturadas, além de discutir a escolha dos filtros de ponderação  $W$  em função dos interesses de projeto. Este assunto também pode ser visto em Chaoubah (1999).

### 3.4 Formulação do problema $H_2/H_{\infty}$

A especificação de um problema de controle  $H_2/H_{\infty}$  consiste na escolha de:

- uma classe de controladores parametrizada por funções racionais próprias estáveis (soluções do problema de estabilização, ou de problemas de rastreamento assintótico e/ ou rejeição assintótica de sinais, ou do problema do servomecanismo qualitativamente robusto, ou de outro problema assintótico levando a parametrizações convenientes);

- um conjunto de critérios quadráticos de interesse, como os construídos acima, a ser reunido em um único critério usando combinações lineares positivas:

$$J_2(K) = \rho_a \|A_a + B_a K\|_2^2 + \dots + \rho_n \|A_n + B_n K\|_2^2$$

onde  $\rho_a, \dots, \rho_n$  são números reais positivos estabelecendo a importância relativa dos diferentes critérios;

- um conjunto de restrições quadráticas sobre o conjunto de parâmetros  $K$  construídas da mesma forma que os critérios quadráticos, na forma geral:

$$\Theta_{\chi} = \{K : \|C_{\chi} + D_{\chi}K\|_2^2 \leq \mu_{\chi}\}, \chi = 1, \dots, m$$

com  $\mu_{\chi}$  superior ao ínfimo do funcional que define  $\Theta_{\chi}$ , de forma a que a restrição não seja vazia;

- um conjunto de restrições  $H_{\infty}$  sobre o conjunto de parâmetros construído como acima, na forma geral:

$$\Omega_v = \{K : \|E_v K + F_v\|_2^2 \leq \lambda_v\}, v = 1, \dots, p$$

com  $\lambda_v$  superior ao ínfimo do funcional que define  $\Omega_v$ , de forma a que a restrição não seja vazia;

O critério  $J_2(K)$  pode ser reescrito, após alguns cálculos, usando a expressão da norma quadrática (e produtos de Kronecker, no caso multivariável), como:

$$J_2(K) = \int_{-\infty}^{\infty} [K^*(s)\Gamma(s)K(s) - 2K^*(s)\gamma(s)]_{s=i\omega} d\omega + J_2(0)$$

onde  $\Gamma(s)$ ,  $\gamma(s)$  e  $J_2(0)$  são definidos por:

$$\Gamma(s) = \rho_a B_a^*(s)B_a(s) + \dots + \rho_n B_n^*(s)B_n(s) \\ \gamma(s) = \rho_a B_a^*(s)A_a(s) + \dots + \rho_n B_n^*(s)A_n(s) \\ J_2(0) = \rho_a \|A_a\|_2^2 + \dots + \rho_n \|A_n\|_2^2$$

Definindo os conjuntos  $\Omega$  e  $\Theta$  de acordo com:  $\Omega = \bigcap_v \Omega_v$  e  $\Theta = \bigcap_{\chi} \Theta_{\chi}$ , torna-se possível reescrever o problema como o de encontrar  $\tilde{K}$  tal que:

$$J_2(\tilde{K}) = \inf_{K \in \Omega \cap \Theta} J_2(K)$$

Embora no problema construído nesta seção o objetivo seja o de encontrar parâmetros racionais próprios estáveis, levando a controladores próprios de dimensão finita, o problema de otimização resultante somente poderá ser resolvido no completamento do conjunto dos

parâmetros na norma induzida pela parte quadrática de  $J_2(K)$ . Isto é, em geral, o parâmetro ótimo  $\tilde{K}$ , se existir, poderá ser irracional, não correspondendo a um controlador de dimensão finita. Na próxima seção serão apresentados os espaços naturais para a resolução do problema proposto e enunciados os teoremas de existência, unicidade e regularidade de suas soluções.

Preparando esses resultados, convém observar nas fórmulas acima que, por construção,

- as funções  $A_a, \dots, A_n$  e as funções  $C_\chi$  são funções racionais de quadrado integrável, o que equivale a serem funções racionais sem pólos no eixo imaginário e com grau relativo superior ou igual a 1;
- $\Gamma(s)$  é uma função racional sem pólos no eixo imaginário e com grau relativo superior ou igual a 2; e  $\gamma(s)$  é uma função racional sem pólos no eixo imaginário e com grau relativo também superior ou igual a 2;
- as funções  $E_v$  e  $F_v$  são funções racionais próprias sem pólos no eixo imaginário, podendo ser bipróprias (grau relativo nulo).

Além disso, pode-se estar interessado em problemas puramente quadráticos (quando  $\Omega$  não é considerado), sem ou com restrições, ou em problemas sem restrições  $H_\infty$  (quando  $\Theta$  não é considerado), ou, finalmente, no problema completo.

#### 4 EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE DAS SOLUÇÕES DO PROBLEMA $H_2/H_\infty$

Para estudar a existência, unicidade e regularidade das soluções do problema  $H_2/H_\infty$  será necessário introduzir os espaços de Hardy ponderados e suas propriedades, desenvolvidas em Silveira e Ades (2000) e em Silveira (2001). De fato, a resolução do problema  $H_2/H_\infty$  exige a definição de espaços funcionais contendo as classes de Hardy  $H_+^2$  e  $H_+^\infty$ , dentro dos quais os critérios como  $J_2(K)$  sejam contínuos e os conjuntos  $\Omega$  e  $\Theta$  sejam fechados e limitados. Este é o objeto das próximas definições.

**Definição 4.1:** Seja  $\Phi_k(s) = (s + 1)^{-k}$ ,  $\Gamma_k(s) = \Phi_k(-s)\Phi_k(s)$ . Dadas duas funções  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  de variável complexa  $s$ , define-se:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_k &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(-s)\Gamma_k(s)g(s)]_{s=i\omega} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(-s)\Phi_k(-s)\Phi_k(s)g(s)]_{s=i\omega} d\omega \\ \|f\|_{2,k} &= \sqrt{\langle f, f \rangle_k} \end{aligned}$$

$H_+^{2,-k}$  o espaço das funções de variável complexa  $s$ , analíticas em  $C_+^o$ , com norma ponderada  $\|f\|_{2,k}$  finita sobre toda reta vertical contida em  $C_+^o$ , as normas sobre as diferentes retas uniformemente limitadas.

Como  $\langle f, g \rangle_k$  coincide com o produto interno de  $\Phi_k f$  por  $\Phi_k g$  em  $L^2$  e  $\|f\|_{2,k} = \|\Phi_k f\|_2$  (a norma de  $\Phi_k f$  em  $L^2$ ), demonstra-se facilmente que  $\langle f, g \rangle_k$  é um produto interno, que  $\|f\|_{2,k}$  é a norma quadrática associada, e que  $H_+^{2,-k}$  é um espaço de Hilbert com produto interno  $\langle f, g \rangle_k$  e norma  $\|f\|_{2,k}$ . Observe que se  $f(s)$  é uma função racional,  $f(s)$  pertence a  $H_+^{2,-k}$  se e somente se é estável (donde sem pólos no eixo imaginário) e  $\partial_r f \geq 1 - \partial_r \Phi_k$ . A partir destes fatos e de algumas majorações simples sobre as funções de ponderação  $\Gamma_k(s)$ , e da densidade em  $L^2$  das funções racionais estritamente próprias e sem pólos no eixo imaginário (Khoan, 1972), demonstra-se o próximo teorema.

**Teorema 4.1:** Se  $0 < k < m$ , a inclusão  $H_+^2 = H_+^{2,0} \subset H_+^{2,-k} \subset H_+^{2,-m}$  é válida e o operador definido por  $f(s) \mapsto (s + 1)^{m-k} f(s)$  é uma isometria de  $H_+^{2,-k}$  em  $H_+^{2,-m}$ . Em particular, subconjuntos fechados e limitados de  $H_+^{2,-k}$  também são fechados e limitados em  $H_+^{2,-m}$ . Além disso, o conjunto das funções racionais estáveis com grau relativo inferior ou igual a  $1 - \partial_r \Phi_k$  é denso em  $H_+^{2,-k}$ .

Demonstra-se também, nos artigos citados, a relação entre as topologias de  $H_+^\infty$  e de  $H_+^{2,-k}$ .

**Teorema 4.2:** Conjuntos fechados e limitados em  $H_+^\infty$  ainda são fechados e limitados em  $H_+^{2,-1}$ , donde também em  $H_+^{2,-k}$ , para  $k \geq 1$ .

As propriedades do funcional  $J_2(H)$  em  $H_+^{2,-k}$  são apresentadas a seguir.

**Teorema 4.3:** Se (i)  $\partial_r \gamma \geq \partial_r \Phi + 1$ , (ii)  $\partial_r \Phi = m > 0$ , (iii)  $\Gamma(s)$  não possui pólos ou zeros no eixo imaginário e  $\gamma(s)$  não possui pólos no eixo imaginário, então:  
(a) se  $0 \leq k \leq m$ , o funcional  $J_2(K)$  é contínuo em  $H_+^{2,-k}$ ;

- (b) se  $k > m$  e  $K \in H_+^{2,-k} - H_+^{2,-m}$ ,  $J_2(K) = \infty$ ;  
(c)  $J_2(K)$  é estritamente convexo em  $H_+^{2,-m}$ .

Graças à densidade das funções racionais próprias estáveis em  $H_+^{2,-k}$  (ver o Teorema 4.1), o Teorema 4.3 pode ser demonstrado inicialmente supondo todos os dados racionais, levando-se, depois, o resultado ao limite na topologia de  $H_+^{2,-k}$ . Neste caso,  $J_2(K) < \infty$  se e somente se  $2\partial_r K + 2\partial_r \Phi \geq 2$  e  $\partial_r K + \partial_r \gamma \geq 2$ , o que é implicado pelas hipóteses do Teorema 4.3 desde que  $0 \leq k \leq m$  e  $K \in H_+^{2,-k}$ , pois  $\partial_r K \geq 1 - k \geq 1 - m$ . A continuidade de  $J_2(K)$  decorre de:

$$\begin{aligned} \|\Phi K\|_2^2 &= \|\Phi \Phi_k^{-1} \Phi_k K\|_2^2 \leq \|\Phi \Phi_k^{-1}\|_2^2 \|\Phi_k K\|_2^2 = \\ &= \|\Phi \Phi_k^{-1}\|_2^2 \|K\|_{2,k} \text{ se } k < m; \\ \|\Phi K\|_2^2 &\leq \sup_{\omega} |\Phi(i\omega)\Phi_k^{-1}(i\omega)|^2 \|K\|_{2,k} \text{ se } k = m; \end{aligned}$$

e cálculos análogos para o termo linear do funcional, usando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(-i\omega)\gamma(i\omega)d\omega = \langle \Phi_k K, \Phi_k^{-1} \gamma \rangle,$$

se  $k < \partial_r \gamma + 1 \leq m + 2$ . A hipótese (a) é natural para os critérios considerados neste artigo, como pode ser verificado na definição de  $\gamma(s)$ , comparando seu grau relativo com o de  $\Phi(s)$ .

O Teorema 4.3 permite estudar a existência, unicidade e regularidade das soluções do problema  $H_2$  (sem restrições) e do problema  $H_2/H_\infty$ , conforme enunciado no próximo teorema, que coleta o conjunto de resultados relativos ao problema demonstrados em Silveira e Ades (2000), e Silveira (2001).

**Teorema 4.4:** Suponha válidas as hipóteses do Teorema 4.3. Defina a função racional  $\hat{K}$  por  $\hat{K} = \Phi^{-1}[(\Phi^*)^{-1}\gamma]_+$ , sendo  $[\cdot]_+$  a projeção ortogonal em  $H_+^2$ , aplicável devido à hipótese  $\partial_r \gamma - \partial_r \Phi \geq 1$  e devido à função projetada não possuir pólos no eixo imaginário. Observe que  $\partial_r \hat{K} \geq 1 - m$  (donde  $\hat{K} \in H_+^{2,-m}$ ) e  $J_2(\hat{K}) < \infty$ . Logo, se  $p = 1 - \partial_r \hat{K}$ ,  $H_+^{2,-p}$  é o menor dos espaços de Hardy ponderados contendo  $\hat{K}$ , e  $p \leq m$ .

<sup>2</sup>A demonstração deste fato apoia-se em que  $\partial_r(\hat{K}) = \partial_r([( \Phi^* )^{-1} \gamma ]_+) - \partial_r \Phi = \partial_r([( \Phi^* )^{-1} \gamma ]_+) - m$ , e em  $\|\Phi \hat{K}\|_2^2 < \infty \Leftrightarrow \partial_r \hat{K} \geq 1 - m$ , donde  $J_2(\hat{K}) < \infty \Leftrightarrow \|[( \Phi^* )^{-1} \gamma ]_+\|_2^2 < \infty \Leftrightarrow \partial_r([( \Phi^* )^{-1} \gamma ]_+) \geq 1$ . Por outro lado, sob a hipótese  $\partial_r \gamma \geq \partial_r \Phi + 1$ , temos que  $\partial_r([( \Phi^* )^{-1} \gamma ]_+) = \partial_r \gamma - \partial_r \Phi = \partial_r \gamma - \partial_r \Phi \geq \partial_r \Phi + 1 - \partial_r \Phi = 1$ , mostrando que a função racional  $(\Phi^*)^{-1} \gamma \in L^2$ . Assim sua projeção  $[(\Phi^*)^{-1} \gamma]_+$  pertence ao mesmo espaço, e  $\partial_r([( \Phi^* )^{-1} \gamma ]_+) \geq 1$ . Em conseqüência,  $J_2(\hat{K}) < \infty$ , isto é,  $p \leq m$ .

Se  $k \geq p$ , então o problema de minimização de  $J_2(K)$  sem restrições possui solução em  $H_+^{2,-k}$ , sendo esta solução única e dada por  $\hat{K}$ .

Se  $0 \leq k < p$ , então o problema de minimização de  $J_2(K)$  sem restrições não possui solução em qualquer espaço  $H_+^{2,-k}$ , sendo o ínfimo do funcional nestes espaços dado por  $J_2(\hat{K})$ ,  $K_n = (s + 1)^{k-p} \hat{K} \in H_+^{2,-k}$  definindo uma seqüência minimizante em  $H_+^{2,-k}$ , isto é,  $J_2(K_n) \rightarrow J_2(\hat{K})$ , onde  $J_2(\hat{K})$  é o ínfimo de  $J_2(K)$  em  $H_+^{2,-k}$  (embora  $\hat{K} \notin H_+^{2,-k}$ ).

Se  $k \geq 1$ , se as restrições  $\Theta_\chi$  definem subconjuntos fechados de  $H_+^{2,-k}$  e se o conjunto de restrições  $\Omega \cap \Theta$ , definido na seção 3, não é vazio, então o problema de minimização de  $J_2(K)$  para  $K \in \Omega \cap \Theta$  possui solução única  $\tilde{K} \in H_+^{2,-k} \cap H_+^\infty$ . Mais ainda, a solução ótima  $\tilde{K}$  pertence ao conjunto das funções aproximáveis por funções racionais na norma de  $H_+^\infty$  (isto é, é contínua no eixo imaginário estendido).

Neste último caso, com  $k \geq p$ , o problema pode ser reescrito em  $H_+^{2,-k}$  como o da minimização de  $\|\Phi(K - \hat{K})\|_2^2 - \|\Phi \hat{K}\|_2^2$  sob a condição  $K \in \Omega \cap \Theta$  (um problema chamado, na literatura, de *best approximation*).

A demonstração do item (c) apoia-se no fato de que funcionais estritamente convexos e contínuos em espaços de Hilbert possuem um único mínimo em conjuntos convexos, fechados e limitados (Ekeland e Temam, 1974, *Proposition* II.1.2), e no fato de  $\Omega \cap \Theta$  ser um subconjunto convexo, fechado e limitado em  $H_+^{2,-k}$ , por sua definição e pelos Teoremas 4.1 e 4.2. Com este mesmo argumento pode-se considerar apenas as restrições quadráticas  $\Theta_\chi$ , ou apenas as restrições definindo  $\Omega$ . A demonstração dos itens (a) e (d) decorre do seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} J_2(K) &= \|\Phi K\|_2^2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi K)^* \Phi \Phi^{-1} (\Phi^*)^{-1} \gamma|_{s=i\omega} d\omega \\ &= \|\Phi K\|_2^2 - 2 \langle \Phi K, \Phi \Phi^{-1} [(\Phi^*)^{-1} \gamma]_+ \rangle \\ &= \|K\|_k^2 - 2 \langle K, \hat{K} \rangle_k \\ &= \|K - \hat{K}\|_k^2 - \|\hat{K}\|_k^2 = \|\Phi(K - \hat{K})\|_2^2 - \|\Phi \hat{K}\|_2^2 \end{aligned}$$

onde foi utilizado que, se  $p \leq k \leq m$ , todos os termos são finitos, que:

$$\begin{aligned} (\Phi^*)^{-1} \gamma &= [(\Phi^*)^{-1} \gamma]_+ + [(\Phi^*)^{-1} \gamma]_- \in L^2, \\ \text{com } [(\Phi^*)^{-1} \gamma]_+ &\in H_+^2 \text{ e } [(\Phi^*)^{-1} \gamma]_- \in H_-^2, \end{aligned}$$

e que a parcela instável, sendo ortogonal a  $\Phi K \in H_+^2$ , pode ser retirada do termo linear de  $J_2(K)$  (pois  $H_-^2$  e  $H_+^2$ , são subespaços ortogonais de  $L^2$ ).

O item (b) decorre da continuidade de  $J_2(K)$  em  $H_+^{2,-p}$ , de  $\partial_r K_n = 1 - k$  e de  $J_2(K_n) \rightarrow J_2(\hat{K})$ , como demonstrado em Silveira (2001).

No caso particular onde  $\partial_r \Phi = 1$  e  $\partial_r \gamma = 2$ , que corresponde ao critério proposto em Corrêa e Silveira (1995),  $p = m = 1$ . Donde o problema sem restrições possui solução única em  $H_+^{2,-1}$ , o valor de  $J_2(K)$  sendo infinito no complemento linear desta classe em espaços mais largos.

A figura 2 ilustra as relações entre os espaços  $H_+^{2,-k}$  e o comportamento de  $J_2(K)$  nestes espaços. A figura 3 ilustra através de um diagrama esquemático as relações entre os espaços mencionados na figura 2.

$$H_+^2 = H_+^{2,0} \subset H_+^{2,-1} \subset \dots \subset H_+^{2,-p+1} \subset H_+^{2,-p} \subset \dots \subset H_+^{2,-m} \subset H_+^{2,-m-1}$$

$$\cup \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad J_2(K) < \infty \quad \leftarrow \rightarrow \quad J_2(K) = \infty$$

$$H_+^\infty \quad \quad \quad \hat{K}$$

Figura 2: Relações entre os espaços  $H_+^{2,-k}$  e comportamento de  $J_2(K)$ .

## 5 UM MÉTODO DE EXPANSÃO EM BASES PRÉ-ESTABELECIDAS

Nesta seção será discutida a resolução numérica do Problema  $H_2/H_\infty$ , descrito matematicamente como o seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s) \in RH_+^\infty} J_2(K) = \|A + BK\|_2^2 \quad (9)$$

sujeito a  $J_\infty(K) = \|EK - F\|_\infty \leq \lambda$ .

As funções  $A$  e  $B$  serão supostas reais racionais estáveis e estritamente próprias (donde pertencem a  $H_+^2$ ). As funções  $E$  e  $F$  devem ser reais, racionais, próprias e estáveis, estabelecidas a partir do problema abordado, sendo  $\lambda$  escolhido de forma que:

$$\lambda \geq \lambda_0 = \min_{K \in H_+^\infty} \|EK - F\|_\infty \quad (10)$$

O cálculo de  $\lambda_0$ , de acordo com o que foi definido em (10), leva ao chamado Problema de Nehari (Zhou et alii, 1996). Em Sales (1994) mostra-se que a desigualdade na restrição do problema (9) pode ser substituída por uma igualdade, desde que a solução do problema sem restrição,  $\hat{K}$ , não verifique a restrição (quando, então, a restrição é inútil). Assim, o problema (9) passa a ser descrito por:

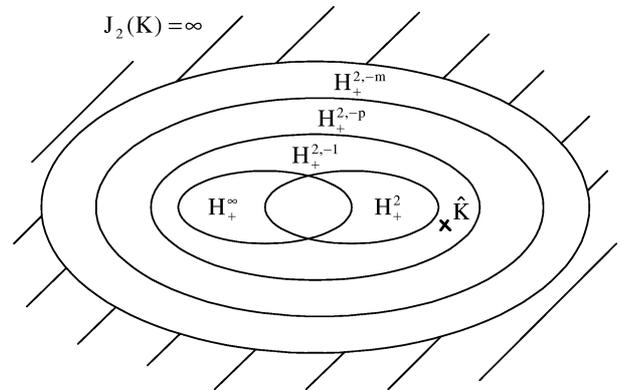


Figura 3:  $J_2(K)$  e os espaços  $H_+^{2,-k}$  se  $\partial_r \gamma - \partial_r \Phi \geq 1$ .

$$\min_{K(s) \in H_+^\infty} J_2(K) = \|A + BK\|_2^2 \quad (11)$$

sujeito a  $J_\infty(K) = \|EK - F\|_\infty = \lambda$

O método de Galerkin consiste em, fornecida uma base para o espaço solução do problema original e escolhida uma dimensão  $n$ , calcular a solução do problema restrito ao subespaço  $n$ -dimensional definido pelos primeiros  $n$  vetores da base (truncamento da base). O método faz sentido se for demonstrado que o limite das soluções dos problemas aproximados tende à solução do problema original quando  $n \rightarrow \infty$ . Por exemplo, usando a base ortonormal de  $H_+^2$  formada pelas funções  $L_i(s)$ :

$$L_i(s) := \frac{\sqrt{2a}}{s+a} \left( \frac{s-a}{s+a} \right)^{i-1} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \quad (12)$$

usualmente denominadas de “funções de Laguerre” (Hille, 1976), onde  $a$  é uma constante real e positiva, qualquer função  $G(s) \in H_+^{2,-1}$  pode ser expandida<sup>3</sup> como:

$$G(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i L_i(s) \quad (13)$$

sendo  $\alpha_i$  um número real para todo natural  $i$ . Truncando a série (13) nos seus primeiros  $n$  termos e levando a a (11), obtém-se o seguinte problema:

$$\min_{\alpha \in R^n} J_2(\alpha) := \|A + BK(\alpha)\|_2^2 \quad (14)$$

sujeito a  $J_\infty(\alpha) := \|EK(\alpha) - F\|_\infty = \lambda$

onde  $K(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(s)$  e  $\alpha^T := [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n]$ .

<sup>3</sup>Lembrando que  $H_+^2$  é denso em  $H_+^{2,-1}$  na topologia deste último (Silveira e Ades, 2000).

Este novo problema de otimização é de dimensão finita, com parâmetro vetorial  $\underline{\alpha}$ , sendo o critério ainda quadrático na nova variável.

Pode-se também utilizar conjuntos geradores do espaço de soluções, mesmo redundantes, desde que as propriedades de convergência sejam preservadas. Por exemplo, será numericamente conveniente complementar o conjunto das funções de Laguerre com a função constante  $L_0(s) = 1$ , pois o espaço solução de (11) é  $H_+^{2,-1}$ , que contém  $H_+^\infty$ . Este novo conjunto gerador não é mais uma base, mas permite um controle numérico mais apurado da seqüência aproximante, considerando as aproximações do valor em  $s = \infty$ . Outras bases ou conjuntos geradores podem ser utilizados, em especial aqueles construídos a partir do Teorema de Runge (Ades, 1999).

Outros conjuntos geradores podem ser definidos a partir de bases ortogonais, conforme os autores (1999):

$$\{L_m^\Gamma, m = 0, 1, \dots\} \text{ com } L_0^\Gamma = 1 \text{ e}$$

$$L_m^\Gamma = \varphi^*(s) \frac{(s-a)^{(m-1)\nu}}{(s+a)^{m\nu}} \text{ para } m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

onde  $\nu$  é o grau do polinômio  $\varphi(s)$ , denominador da função racional  $B(s)$  em (14), e:

$$\{M_m^\Gamma, m = 0, 1, \dots\} \text{ com } M_0^\Gamma = 1, M_1^\Gamma = \frac{\varphi^*(s)}{(s+a_1)^\nu} \text{ e}$$

$$M_m^\Gamma = \frac{\varphi^*(s)}{(s+a_m)^\nu} \prod_{f=1}^{m-1} \frac{(s-a_f)^\nu}{(s+a_f)^\nu} \text{ para } m = 2, 3, \dots \quad (16)$$

onde  $a_f$  é um número real estritamente positivo para  $f = 1, 2, \dots$

A conduta adotada para solucionar o problema em (14) consiste em transformá-lo num novo problema sem restrições via penalidades. Aplica-se então o método de otimização BFGS (Bertsekas, 1995), da classe dos métodos quase-Newton, com busca unidimensional pelo método de Wolfe (Bonnans et alii, 1997), para solucionar o problema:

$$\min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n} J_\pi(K) := J_2 + \pi_1(J_\infty - \lambda_0) + \pi_2 \cdot \max(0, J_\infty - \lambda) \quad (17)$$

onde  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são constantes reais positivas calculadas de acordo com o problema e  $K$  é gerado pela base truncada, de acordo com (14). O novo problema possui um único mínimo, pois seu critério é estritamente convexo e a projeção da restrição no subespaço proposto ainda é um conjunto convexo fechado limitado (ver Ades (1999) para uma demonstração detalhada).

Para aplicar o método BFGS será necessário calcular os gradientes das funções envolvidas em (14). O cálculo

direto do gradiente de  $J_2(\underline{\alpha})$  mostra que:

$$\nabla J_2(\underline{\alpha})^t = \left( \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_{n-1}} \right) \quad (18)$$

onde

$$\frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_0} = 2 \langle BL_0, A + BK \rangle_2,$$

$$\frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_1} = 2 \langle BL_1, A + BK \rangle_2, \dots \quad (19)$$

Um cálculo similar para  $J_\infty$  não é possível. Em seu lugar deve-se calcular um subgradiente, conforme será discutido adiante. Considerando que  $G(s)$  seja uma função real, racional, própria e denotando por  $\omega_0$  a frequência em que ocorre o máximo do módulo de  $G(i\omega_0)$ , um subgradiente do funcional  $J_\infty(\underline{\alpha})$  poderá ser obtido de acordo com o seguinte desenvolvimento. Seja:

$$\Theta_0 = \|G(s)\|_\infty = \sup_\omega |G(i\omega)| = |G(i\omega_0)| =$$

$$= \sqrt{G^*(s)G(s)}|_{s=i\omega_0} = H(s)|_{s=i\omega_0} \quad (20)$$

e  $h(s) = G^*(s)G(s)$ . Assim, por (20):

$$H(s) = \sqrt{h(s)} \quad (21)$$

Usando uma das expansões acima:

$$G(s) = E(s)K(s) - F(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i E(s)L_i(s) - F(s) \quad (22)$$

De (21):

$$\frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2\sqrt{h(s)}} \frac{\partial h(s)}{\partial \alpha_i} \quad (23)$$

De (22) e da definição de  $h(s)$ :

$$h(s) = \left[ \sum_{i=0}^n \alpha_i E^*(s)L_i^*(s) \right] \left[ \sum_{i=0}^n \alpha_i E(s)L_i(s) \right] -$$

$$- \left( \left[ \sum_{i=0}^n \alpha_i E^*(s)L_i^*(s) \right] F(s) + F(s) \left[ \sum_{i=0}^n \alpha_i E(s)L_i(s) \right] \right) +$$

$$+ F^*(s)F(s) \quad (24)$$

Derivando parcialmente (24) em relação a  $\alpha_i$  e calculando em  $s = i\omega_0$ :

$$\frac{\partial h(s)}{\partial \alpha_i} \Big|_{s=i\omega_0} =$$

$$2 \operatorname{Re} \{ E(i\omega_0)L_i(\omega_0) [E^*(i\omega_0)K^*(i\omega_0) - F^*(i\omega_0)] \} \quad (25)$$

Finalmente, substituindo (25) em (23):

$$\frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_i} \Big|_{s=i\omega_0} =$$

$$\frac{\operatorname{Re} \{ E(i\omega_0)L_i(i\omega_0) [E^*(i\omega_0)K^*(i\omega_0) - F^*(i\omega_0)] \}}{\Theta_0} \quad (26)$$

É possível agora definir a direção  $\xi$ , vetor real de dimensão  $n + 1$ , por:

$$\xi^T = \left( \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_n} \right) \Big|_{s=i\omega_0} \quad (27)$$

**Lema 5.1:** A direção  $\xi$  é um subgradiente de  $J_\infty(\underline{\alpha})$ .

A demonstração do Lema 5.1 encontra-se em Ades (1999). O subgradiente em (27) pode ser usado no lugar do gradiente de  $J_\infty(\underline{\alpha})$ , viabilizando a utilização do método BFGS/ Wolfe.

O cálculo das normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , exibidas em (2) e (3), respectivamente, é também um ponto importante da metodologia apresentada. Os dois lemas seguintes, demonstrados em Zhou et alii (1996) e aqui apresentados por uma questão de completude do texto, mostram como fazê-lo.

**Lema 5.2:** Considere a seguinte função de transferência  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , sendo  $A$  estável. Neste caso:

$$\|G\|_2^2 = \text{tr}(B^*L_oB) = \text{tr}(CL_cC^*)$$

onde  $L_c$  e  $L_o$  são os gramianos de controlabilidade e observabilidade, obtidos pela resolução das seguintes equações de Lyapunov:

$$\begin{aligned} AL_c + L_cA^* + BB^* &= 0 \\ A^*L_o + L_oA + C^*C &= 0 \end{aligned}$$

**Lema 5.3:** Seja  $\lambda > 0$  e  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  uma função racional própria estável. Então  $\|G\|_\infty < \lambda$  se e somente se  $\bar{\sigma}(D) < \lambda$  e a matriz  $\Delta$  não possui autovalores sobre o eixo imaginário, onde:

$$\Delta = \begin{bmatrix} A + BT^{-1}D^*C & BT^{-1}B^* \\ -C^*(I + DT^{-1}D^*)C & -(A + BT^{-1}D^*C)^* \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\text{e } T := \lambda^2 I - D^*D \quad (29)$$

A norma  $H_\infty$  pode ser calculada por um algoritmo de bisseção, utilizando os limitantes inferior e superior mostrados em Zhou et alii (1996, Lema 6.3) e o Lema 5.3 apresentado acima. Para empregar o subgradiente mencionado no Lema 5.1, resta calcular a frequência  $\omega_0$  em (20), que é o conteúdo do próximo resultado.

**Lema 5.4:** Considere  $\Delta$  como em (28),  $G(s)$  realizada de acordo com o Lema 5.3 e tal que  $\|G\|_\infty = \lambda$ . A frequência  $\omega_0$  em que ocorre o supremo em (20) pode ser calculada como:

$$\omega_0 = |i\omega_0| = |\sigma\{\Delta(\lambda)\}|$$

onde  $\sigma\{\cdot\}$  representa o autovalor do argumento sobre o eixo imaginário.

*Demonstração:* Seja  $\Phi(s) = \lambda^2 I - G^*(s)G(s)$  e como  $\|G\|_\infty = \lambda$ , suponha que  $|G(i\omega_0)| = \lambda$ . Então  $\Phi(i\omega) \geq 0$  para todo  $\omega$  real e  $\Phi(i\omega_0) = 0$ , ou seja,  $\Phi(i\omega)$  tem um zero sobre o eixo imaginário em  $\omega_0$ . Conseqüentemente  $\Phi^{-1}(i\omega)$  possui um pólo sobre o eixo imaginário em  $\omega_0$ . Mostra-se por meio de alguns cálculos algébricos que:

$$\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \Delta & \\ [ T^{-1}D^*C & T^{-1}B^* ] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BT^{-1} \\ -C^*DT^{-1} \\ T^{-1} \end{bmatrix}$$

donde conclui-se que  $\Delta$  possui um autovalor igual a  $i\omega_0$ , que é a frequência desejada.

Cabe observar em (18) que é possível explicitar  $\alpha_i$  nas equações e determinar analiticamente o vetor  $\underline{\alpha}_{otimo}$  que minimiza o funcional  $J_2(\underline{\alpha})$ . No caso do funcional  $J_\infty(\underline{\alpha})$ , também é possível explicitar  $\alpha_i$  em (26), mas persiste a dependência com  $\omega_0$ , que por sua vez depende de  $\underline{\alpha}$ , isto é,  $\omega_0 = \omega_0(\underline{\alpha})$ . Por fim, um subgradiente do funcional  $J_\pi(\underline{\alpha})$  pode ser calculado a partir de sua definição em (17), com o auxílio de (19) e (27), bastando para isto considerar dois casos, ou seja:

$$\text{a) Se } J_\infty(\underline{\alpha}) - \gamma > 0: \xi_{J_\pi} = \nabla J_2(\underline{\alpha}) + (\pi_1 + \pi_2)\xi \quad (30)$$

$$\text{b) Se } J_\infty(\underline{\alpha}) - \gamma \leq 0: \xi_{J_\pi} = \nabla J_2(\underline{\alpha}) + \pi_1\xi \quad (31)$$

A demonstração da convergência deste método, para qualquer conjunto gerador, aparece em Ades (1999) e em Silveira e Ades (2000), sendo os resultados obtidos coletados no próximo teorema.

**Teorema 5.5:** Suponha válidas as hipóteses do Teorema 4.3. Utilizando as notações do Teorema 4.4, a seqüência de soluções aproximadas obtida pelo método proposto neste artigo converge fracamente em  $H_+^{2,-k}$  para a solução ótima (e única) do problema  $H_2/H_\infty$  original, para  $k \geq 1$ . Se  $k \geq p$ , a seqüência converge também fortemente.

Na figura 4 mostra-se o diagrama em blocos do sistema computacional que implementa o método proposto. Este sistema se subdivide em três partes, ou seja: programa principal, rotinas de otimização e simulador. O programa principal determina o problema a ser resolvido, definindo as funções  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $E(s)$  e  $F(s)$  em (11). Além disso, escolhe a ordem da solução a ser calculada e o ponto inicial  $\underline{\alpha}_{in}$  do processo de otimização. As rotinas de otimização são compostas pelo método de otimização e pela rotina de busca unidimensional. Os métodos adotados foram, respectivamente, BFGS e Wolfe. O simulador, que é a terceira parte do sistema, calcula o custo de um ponto do espaço de busca fornecido e seu respectivo gradiente.

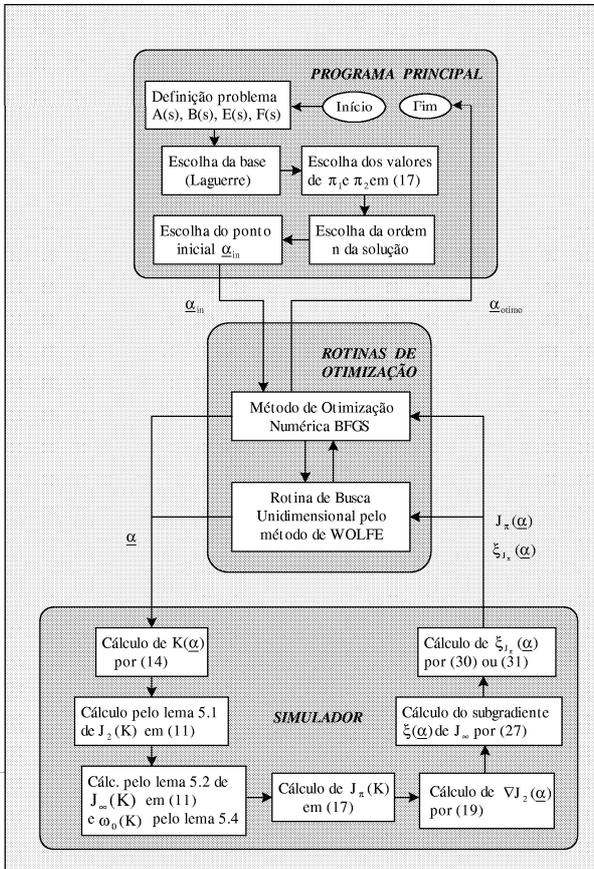


Figura 4: Diagrama em blocos do sistema computacional que implementa o método proposto.

## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção encontram-se apresentados alguns exemplos numéricos de aplicação da metodologia proposta em problemas encontrados na literatura. O método dual descrito em Corrêa et alii (1997) será utilizado para obter minorantes do valor do critério ótimo, permitindo, junto com o método proposto, medir a precisão das soluções obtidas.

**Exemplo 1:** Consiste de um problema de controle *benchmark* definido pelo sistema massa-mola de quarta ordem e discutido em Corrêa et alii (1997). Na Figura 5 mostra-se o diagrama do sistema a ser controlado, composto de dois blocos interligados por duas molas. A entrada do sistema é a força  $F$  aplicada ao bloco de massa  $M_1$  e a saída é a posição  $Y_2$  do bloco de massa  $M_2$ . Os demais parâmetros e variáveis do problema são  $M_1, Y_1, K_1$  e  $K_2$ , que representam, respectivamente, a massa do bloco tracionado, a posição do bloco de massa  $M_1$  e as constantes elásticas das molas. Considerou-se

que o efeito do atrito é desprezível,  $M_1 = M_2 = 1$ , e ainda que  $K_1 + K_2 = 1$ .

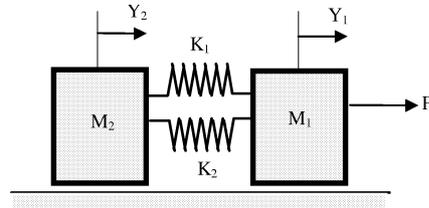


Figura 5: Diagrama do sistema massa-mola.

Equacionando o sistema e aplicando a transformada de Laplace, chega-se às seguintes equações:

$$F(s) - (K_1 + K_2)(Y_1(s) - Y_2(s)) = M_1 s^2 Y_1(s) \quad (32)$$

$$(K_1 + K_2)(Y_1(s) - Y_2(s)) = M_2 s^2 Y_2(s) \quad (33)$$

De (33):

$$(K_1 + K_2)Y_1(s) = [M_2 s^2 + (K_1 + K_2)]Y_2(s) \quad (34)$$

De (32) + (33):

$$F(s) = M_1 s^2 Y_1(s) + M_2 s^2 Y_2(s) \quad (35)$$

Aplicando (34) em (35):

$$(K_1 + K_2)F(s) = [M_2 s^2 + (K_1 + K_2)]M_1 s^2 Y_2(s) + (K_1 + K_2)M_2 s^2 Y_2(s) \quad (36)$$

Portanto, a função de transferência do sistema é dada por:

$$\frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{(K_1 + K_2)}{[M_2 s^2 + (K_1 + K_2)]M_1 s^2 + (K_1 + K_2)M_2 s^2}$$

$$\frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2(s^2 + 2)} \quad (37)$$

Utilizando a parametrização de Youla e formulando o problema de acordo com (11), onde a restrição  $H_\infty$  corresponde à imposição da margem de estabilidade para perturbações nos fatores coprimos da planta (Corrêa et alii, 1997), chega-se a:

$$\min_{K(s) \in H_+^{2,-1}} J_2(K(s)) \text{ sujeito a } J_\infty(K(s)) \leq \lambda \quad (38)$$

sabendo-se que:

$$J_2(K(s)) = \|A(s) + B(s)K(s)\|_2^2 + J_F \quad (39)$$

$$J_\infty(K(s)) = \|K(s) - F(s)\|_\infty \quad (40)$$

onde o valor da constante  $J_F = 26,0144$  e as funções racionais  $A(s)$ ,  $B(s)$  e  $F(s)$  possuem ordens 19, 6 e 4, respectivamente (mostradas no Apêndice). O valor de  $\lambda$  foi arbitrado a partir da degradação de 10% do valor ótimo da margem de estabilidade relativa a perturbações nos fatores coprimos à direita normalizados de (37), conforme Corrêa et alii (1997, pág. 337). Portanto:

$$\lambda = 1,1 \quad \lambda_0 = (1,1)(3,6870) = 4,0557 \quad (41)$$

$$\text{com } \lambda_0 = \min_{K(s) \in H_+^\infty} \|K(s) - F(s)\|_\infty \quad (42)$$

Na tabela 1 encontram-se as figuras de mérito calculadas para alguns controladores de destaque aplicados ao problema. O controlador  $K_{SPQ}$  foi calculado pelo método dual (Seqüência de Problemas Quadráticos de Corrêa et alii (1997)) para  $\lambda = 4,0557$ .

Tabela 1: Figuras de mérito de alguns controladores de destaque relativos ao exemplo do sistema massa-mola.

$K(s)$	Custo $J_2$	Margem $J_\infty$	Ordem	Obs
$K_{H2}$	26,0144	6,8528	22	(1)
$K_{H\infty}$	70,2157	3,6870	3	(2)
$K_{SPQ}$	39,0197	4,0562	25	(3)
$K_{SPQ-R}$	39,0197	4,0563	8	(4)

Observações:

- (1) Controlador que minimiza o custo  $J_2$  (desempenho  $H^2$  ótimo, sem restrições).
- (2) Controlador que minimiza  $J_\infty$  (máxima robustez em estabilidade).
- (3) Controlador calculado pelo método dual com  $\lambda = 4,0577$ .
- (4) Solução de ordem reduzida, obtida a partir de (3), com características semelhantes.

Para aplicação do método proposto neste artigo, o problema em análise passa a ser:

$$\min_{\alpha_i} \{ \|A(s) + B(s)K(s)\|_2^2 + J_F \} \quad (43)$$

sujeito a:  $\|K(s) - F(s)\|_\infty \leq \lambda$  e  $K(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(s)$

Na tabela 2 exhibe-se as características dos controladores calculados pelo método proposto, para  $\lambda = 4,0577$ , adotando as funções de Laguerre completadas com a função

constante e fixando os pólos arbitrariamente sobre a posição  $s = -1$ :

$$\{L_0(s), L_1(s), L_2(s), L_3(s), \dots\} = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}}{(s+1)}, \frac{\sqrt{2}(s-1)}{(s+1)^2}, \frac{\sqrt{2}(s-1)^2}{(s+1)^3}, \dots \right\} \quad (44)$$

Tabela 2: Figuras de mérito dos controladores obtidos pelo método proposto com o conjunto gerador (44), para  $\lambda = 4,0577$ .

$K(s)$	Custo $J_2$	Margem $J_\infty$	No. Termos	Ordem
$K_{L1}$	90,79834	4,3732	2	1
$K_{L2}$	76,47244	4,2969	3	2
$K_{L3}$	76,14408	4,0557	4	3
$K_{L4}$	75,16468	4,0557	5	4
$K_{L5}$	53,74178	4,0557	6	5
$K_{L6}$	53,22238	4,0557	7	6
$K_{L7}$	53,05503	4,0557	8	7
$K_{L8}$	46,22481	4,0557	9	8
$K_{L9}$	45,82748	4,0557	10	9

Pelos resultados apresentados na tabela 2, observa-se que a viabilidade somente é alcançada a partir dos controladores de ordem três. Isto é, só então o conjunto gerador passa a ser rico o suficiente para que a projeção da restrição no subespaço de dimensão finita deixe de ser vazia. Os resultados seguem o comportamento esperado, ou seja, à medida que a ordem do controlador aumenta, o custo  $J_2$  decresce e a margem  $J_\infty$  permanece sobre o valor estipulado em (41). À medida que a ordem adotada para solução aproximada aumenta, gera-se um novo limitante superior para o funcional de custo quadrático  $J_2$ , ou seja, a solução do problema corrente deverá possuir um custo quadrático menor ou igual ao dos anteriores, já que o subespaço corrente contém os subespaços de dimensão menor.

É também possível concluir que o valor do critério  $J_2$  da solução ótima do Problema  $H_2/H_\infty$  em (38) deverá estar no intervalo (39,0197, 45,8275). Foi observado ainda que, apesar da natureza distinta dos métodos, os diagramas de Bode relativos às funções utilizadas empregando os controladores  $K_{SPQ}$  e  $K_{L9}$  nas figuras 6, 7 e 8 possuem uma semelhança considerável. Pelo Teorema 5.5, e considerando os graus relativos de  $A(s)$ ,  $B(s)$  e  $F(s)$ , a seqüência de soluções aproximadas converge fortemente em  $H_+^{2,-1}$  para a solução ótima do problema.

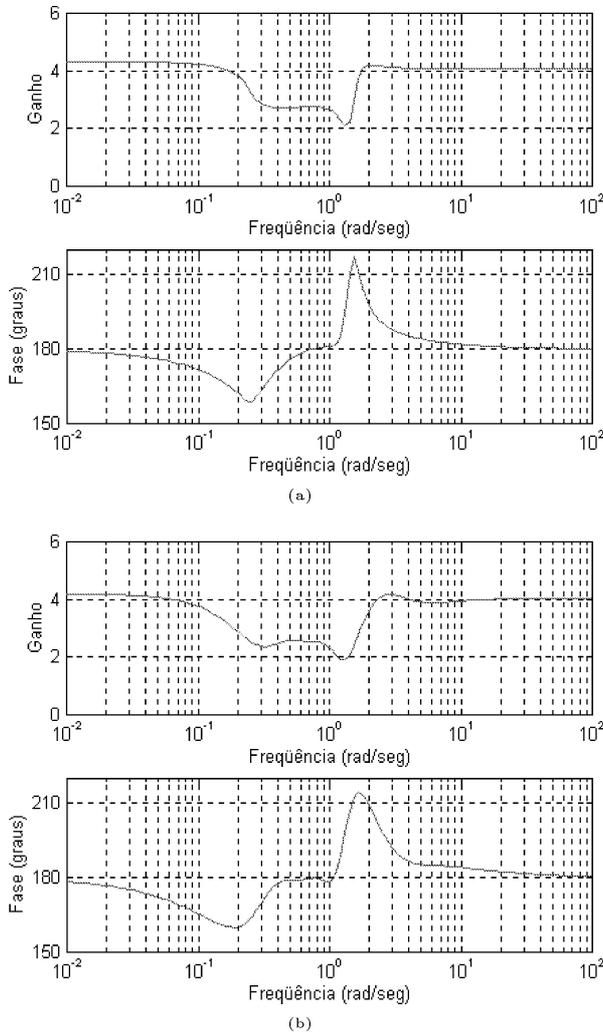


Figura 6: Diagramas de Bode dos controladores (a)  $K_{SPQ}$  e (b)  $K_{L9}$  do Exemplo 1.

**Exemplo 2:** Refere-se ao modelo de um veículo controlado remotamente. Foi utilizado em Sales (1994) para ilustrar o método dual (Seqüência de Problemas Quadráticos-SPQ), em Safonov et alii (1981) para ilustrar o projeto LQG e em Safonov e Chiang (1988) para exemplificar o projeto  $H_\infty$ . Neste caso:

$$P_{11}(s) = P_{21}(s) = \frac{-5,1240s^3 - 945,7226s^2 - 21,9105s + 0,8046}{s^5 + 34,5570s^4 + 130,5382s^3 - 183,9762s^2 + 35,3406s + 23,6040} \quad (45)$$

$$P_{12}(s) = P_{22}(s) = 1 \quad (46)$$

Os fatores espectrais estáveis dos filtros adotados no cri-

tério são:

$$\phi_{we}(s) = \frac{10}{s + 3,2}; \phi_{de}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\text{e } \phi_{ve}(s) = \frac{10s + 13}{s^2 + 3s + 27,25} \quad (47)$$

e os demais coeficientes de ponderação que aparecem no critério, escolhidos iguais a um, por simplicidade.

Deseja-se encontrar soluções para o seguinte problema:

$$\min_{K(s) \in RH_\infty^+} J_2(K(s)) = \|A(s) + B(s)K(s)\|_2^2 + J_F \quad (48)$$

sujeito a  $J_\infty(K(s)) = \|K(s) - F(s)\|_\infty \leq 0,893354$

com o valor da restrição sendo arbitrado a partir da degradação de 10% do valor da margem de estabilidade ótima relativa à perturbações aditivas na planta. Além disso, utilizando os dados em (45) a (47) chega-se ao valor da constante  $J_F = 88,8940963476$  em (48), bem como aos modelos  $A(s), B(s) \in RH_2^+$  e  $F(s) \in RH_2^-$ , cujas ordens são de 19, 13 e 4, respectivamente. Estes modelos encontram-se no Apêndice deste trabalho.

Na tabela 3 encontram-se as figuras de mérito calculadas para alguns controladores de destaque aplicados ao problema. O controlador  $K_{SPQ}$  foi calculado pelo método dual (Corrêa et alii, 1997), para  $\lambda = 0,893354$ .

Na tabela 4 exhibe-se as características dos controladores calculados pelo método proposto, para  $\lambda = 0,893354$ , adotando as funções de Laguerre completadas com a função constante e fixando os pólos arbitrariamente sobre a posição  $s = -1$ :

$$\{L_0(s), L_1(s), L_2(s), L_3(s), \dots\} = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}}{(s+1)}, \frac{\sqrt{2}(s-1)}{(s+1)^2}, \frac{\sqrt{2}(s-1)^2}{(s+1)^3}, \dots \right\} \quad (49)$$

Tabela 3: Figuras de mérito de alguns controladores de destaque relativos ao exemplo 2.

$K(s)$	Custo $J_2$	Margem $J_\infty$	Ordem	Obs
$K_{H2}$	88,894096	2,6686317	26	(1)
$K_{H_\infty}$	313,623947	0,8121397	5	(2)
$K_{SPQ}$	173,083895	0,8937765	20	(3)
$K_{SPQ-R}$	173,083983	0,8939261	15	(4)

Observações:

- (1) Controlador que minimiza o custo  $J_2$  (desempenho  $H^2$  ótimo, sem restrições).

- (2) Controlador que minimiza  $J_\infty$  (máxima robustez em estabilidade).
- (3) Controlador com  $\lambda = 0,893354$  calculado pelo método dual.
- (4) Solução de ordem reduzida, obtida a partir de (3), com características semelhantes.

Tabela 4: Figuras de mérito dos controladores obtidos pelo método proposto com o conjunto gerador (49), para  $\lambda = 0,893354$ .

$K(s)$	Custo $J_2$	Margem $J_\infty$	No. Termos	Ordem
$K_{L1}$	185,53662	0,893354	2	1
$K_{L2}$	180,77010	0,893354	3	2
$K_{L3}$	177,72974	0,893354	4	3
$K_{L4}$	-	-	5	4 <sup>(1)</sup>
$K_{L5}$	177,66629	0,893354	6	5
$K_{L6}$	176,05241	0,893354	7	6
$K_{L7}$	176,04137	0,893354	8	7

<sup>(1)</sup> Não foi possível obter uma solução com 5 termos, ou seja, o coeficiente do último termo permaneceu igual a zero.

Para a margem de estabilidade em  $\lambda = 0,893354$  e considerando as soluções das tabelas 3 e 4, conclui-se que o valor  $J_2$  da solução ótima do problema  $H_2/H_\infty$  em (48) deverá estar no intervalo  $(173,08398, 176,04137)$ , o que em termos percentuais dá  $\approx 1,68\%$ . As figuras 9, 10 e 11 exibem os diagramas de Bode relativos aos controladores  $K_{SPQ}$  e  $K_{L7}$ .

## 7 EXTENSÃO A PROBLEMAS MIMO

Abaixo será indicada rapidamente a extensão dos resultados e da metodologia a problemas multivariáveis (MIMO), onde  $P_{ij}(s)$ ,  $C_i(s)$ ,  $\Psi_r(s)$  e  $\Psi_d(s)$  são matrizes racionais de dimensões apropriadas às dos sinais de referência, perturbação, controle, medida e saída controlada. Como anteriormente, supõe-se conhecidos a teoria e os métodos de fatoração coprimas de matrizes racionais como quocientes de matrizes racionais próprias estáveis e seu uso na resolução de equações diofantinas, como exposto em Vidyasagar (1985) e Silveira (1995), por exemplo. Resultados completos e exemplos do caso MIMO serão objetos de trabalhos futuros.

O cálculo dos controladores resolvendo o problema do servomecanismo no caso multivariável estão explicitados em Silveira e Corrêa (1992) e em Corrêa e Silveira (1995), chegando às expressões correspondentes a (8), usando a mesma notação empregada no presente artigo, acrescida de fatores à direita e à esquerda, que tornam-se

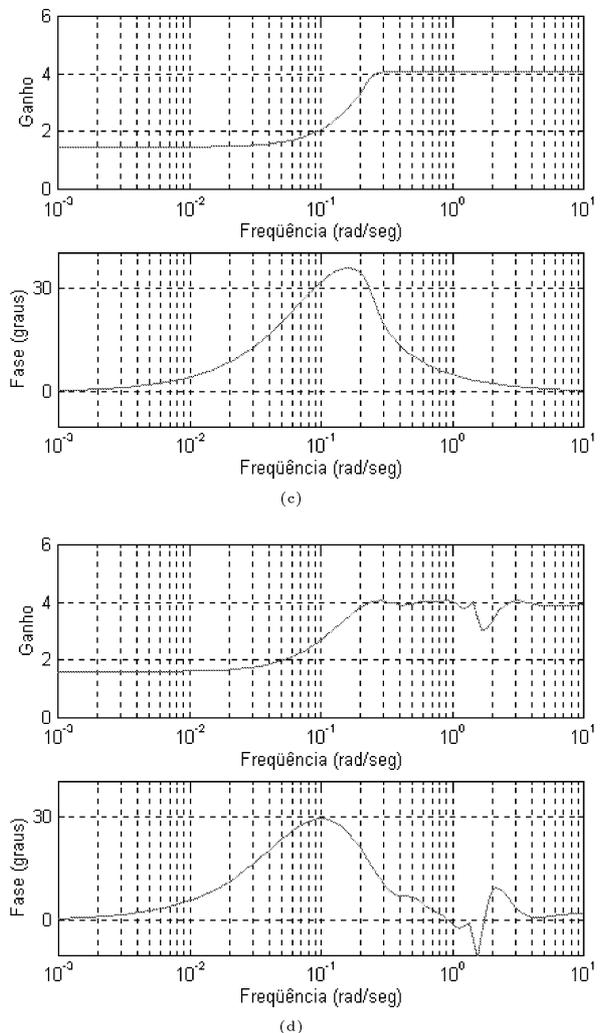


Figura 7: Diagramas de Bode das funções: (c)  $[K_{SPQ}(s) - F(s)]$  e (d)  $[K_{L9}(s) - F(s)]$  do Exemplo 1.

necessários pela não comutatividade do produto matricial. Estes cálculos, com notação um pouco diferente, também podem ser encontrados em Corrêa (1992) e Silveira (1995). Chega-se assim a critérios e restrições da mesma forma, embora as funções indicadas sejam matriciais. O uso do operador traço e dos produtos de Kronecker permitem formular o problema  $H_2/H_\infty$  exatamente como na seção 3.4, sendo  $\Gamma(s) = \Phi^*(s)\Phi(s)$  uma matriz racional para-hermitiana (i.e.,  $\Gamma(s) = \Gamma^*(s)$  sem pólos ou zeros no eixo imaginário),  $\Phi(s)$  uma matriz racional estável, de fase mínima, quadrada e inversível;  $\gamma(s)$  uma matriz racional sem pólos no eixo imaginário; e  $K(s)$  um vetor racional próprio estável.

A extensão do Teorema 4.4 ao caso vetorial, onde

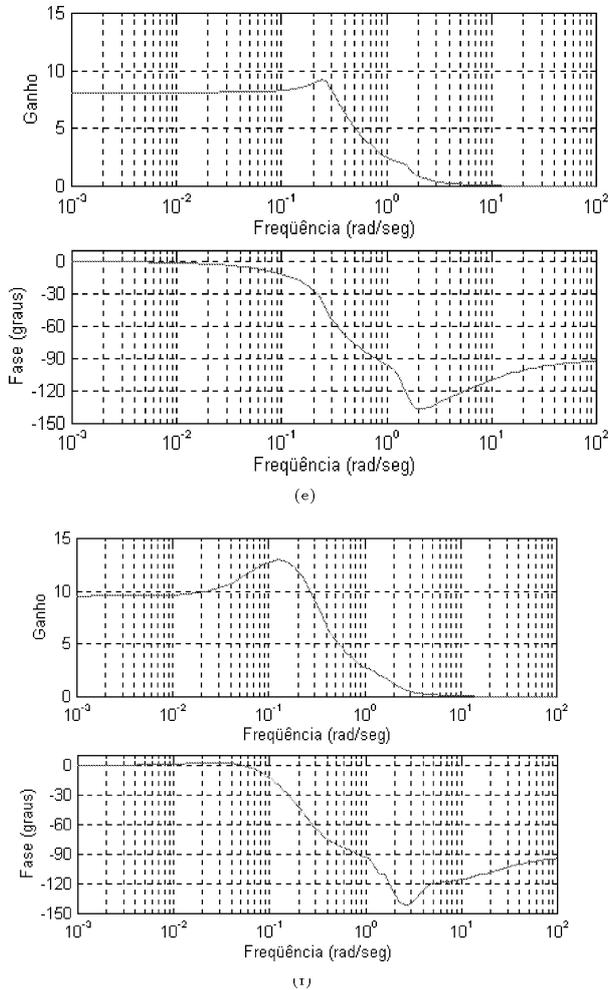


Figura 8: Diagramas de Bode das funções: (e)  $[A(s) + B(s)K_{SPQ}(s)]$  e (f)  $[A(s) + B(s)K_{L9}(s)]$  do Exemplo 1.

$K(s) = [K_1(s)K_2(s)\dots K_n(s)]^T$  é um vetor racional próprio estável com  $n$  coordenadas, usa a noção de multi-índice, onde o multi-índice  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ , com cada  $k_j$  um número inteiro; e exige a definição do grau relativo da  $i$ -ésima coluna da matriz racional  $\Phi(s)$ , denotado por  $\partial_{ri}\Phi$  e representando o menor grau relativo das funções racionais da  $i$ -ésima coluna da matriz  $\Phi(s)$ . A expressão “o grau relativo coluna de  $\Phi(s)$  é dado pelo multi-índice  $\alpha$ ” indicará que  $\partial_{ri}\Phi = \alpha_i, i = 1, \dots, n$ . O espaço funcional  $H_+^{2,-k}$ ,  $k$  um multi-índice com  $n$  coordenadas, será o espaço dos vetores  $n$ -dimensionais onde a  $i$ -ésima coordenada pertence ao espaço de Hardy ponderado  $H_+^{2,-k_i}$ . Finalmente, se  $p$  e  $m$  são dois multi-índices de mesmo tamanho,  $p \leq m$  indica que  $p_i \leq m_i$ , para todo  $i$ .

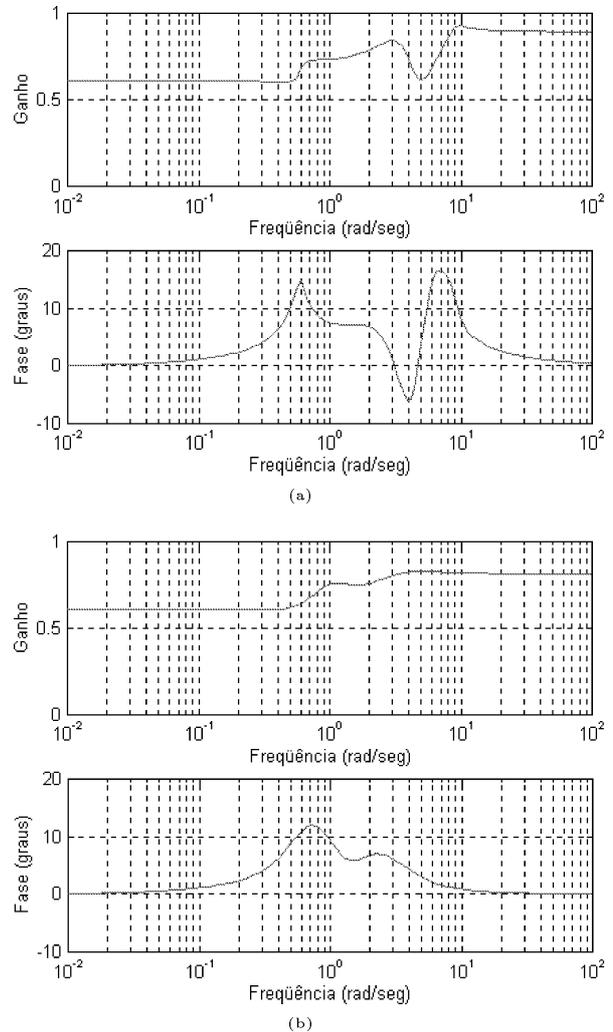


Figura 9: Diagramas de Bode dos controladores (a)  $K_{SPQ}(s)$  e (b)  $K_{L7}(s)$  do Exemplo 2.

As restrições quadráticas estendem-se sem problemas ao caso multivariável, mantendo sua forma  $\|CK + D\|_2^2 \leq \mu$ , lembrando que a norma quadrática de um vetor é a raiz quadrada da soma dos quadrados das normas das componentes. As restrições  $H_\infty$  passam à forma  $\|\bar{\sigma}(EK + F)\|_\infty$ ,  $\bar{\sigma}(\cdot)$  representando o máximo valor singular do argumento (Corrêa, 1992), (Doyle et alii, 1992), (Zhou et alii, 1996). Adaptando os resultados da seção 4 ao caso vetorial pode-se demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 7.1:** Se (i)  $\partial_r \gamma_i \geq \partial_{ri}\Phi + 1$ , (ii)  $\partial_{ri}\Phi = m_i > 0$ , (iii)  $\Phi(s)$  é matriz racional  $n \times n$ , estável e de fase mínima, (iv)  $\gamma(s)$  é um vetor racional  $n \times 1$ , sem pólos sobre o eixo imaginário, (v)  $\hat{K} = \Phi^{-1}[(\Phi^*)^{-1}\gamma]_+$ , sendo  $p_i = 1 - \partial_r \hat{K}_i, i = 1, \dots, n$ , (vi)  $m, p$  e  $k$  são os multi-

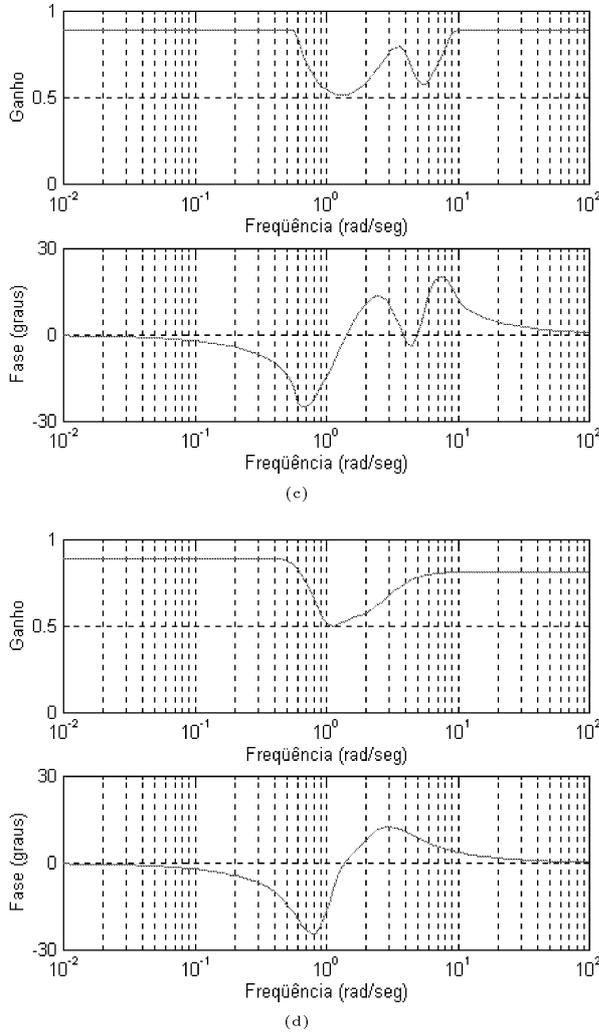


Figura 10: Diagramas de Bode das funções: (c)  $[K_{SPQ}(s) - F(s)]$  e (d)  $[K_{L7}(s) - F(s)]$  do Exemplo 2.

índices de coordenadas  $m_i, p_i, k_i$  respectivamente, então as conclusões do Teorema 4.4 permanecem válidas:

Se  $m \geq k \geq p$ , então o problema de minimização de  $J_2(K)$  sem restrições possui solução em  $H_+^{2,-k}$ , sendo esta solução única e dada por  $\hat{K}$ .

Se  $0 \leq k < p$ , então o problema de minimização de  $J_2(K)$  sem restrições não possui solução em qualquer espaço  $H_+^{2,-k}$ , sendo o ínfimo do funcional nestes espaços dado por  $J_2(\hat{K})$ ,  $K_n = (s+1)^{k-p}\hat{K} \in H_+^{2,-k}$  definindo uma seqüência minimizante em  $H_+^{2,-k}$ , isto é,  $J_2(K_n) \rightarrow J_2(\hat{K})$ , onde  $J_2(\hat{K})$  é o ínfimo de  $J_2(K)$  em  $H_+^{2,-k}$  (embora  $\hat{K} \notin H_+^{2,-k}$ ).

Se  $k \geq 1$ , se as restrições  $\Theta_\chi$  definem subconjuntos fechados de  $H_+^{2,-k}$  e se o conjunto de restrições  $\Omega \cap \Theta$ , definido na seção 3, não é vazio, então o problema de minimização de  $J_2(K)$  para  $K \in \Omega \cap \Theta$  possui solução única  $\tilde{K} \in H_+^{2,-k} \cap H_+^\infty$ .

Neste último caso, com  $m \geq k \geq p$ , o problema pode ser reescrito em  $H_+^{2,-k}$  como o da minimização de  $\|\Phi(K - \hat{K})\|_2^2 - \|\Phi\hat{K}\|_2^2$  sob a condição  $K \in \Omega \cap \Theta$  (um problema chamado, na literatura, de *best approximation*).

Em geral não é possível garantir que  $p \leq m$ , mesmo sob a hipótese (i). Uma condição suficiente para garantir  $p \leq m$  é dada pela hipótese (i) reunida à condição  $\partial_r(\det\Phi) = \partial_{r_i}\Phi + \min_k \partial_r(M_{ik})$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , onde  $M_{ik}$  representa o determinante menor associado ao elemento  $\Phi_{ik}$ <sup>4</sup>. Outra condição suficiente é ter  $J_2(K) = \|\Phi K + B\|_2^2$ , isto é, o critério pode ser escrito como um único termo quadrático, onde  $B \in H_+^2$ .

Em especial, se  $k_i \geq 1$  para todo  $i$ , o problema de minimizar  $J_2(K)$  para  $K \in \Omega \cap \Theta$ , sendo  $\Theta$  um conjunto convexo, fechado e limitado em  $H_+^{2,-k}$  e  $\Omega$  um conjunto convexo, fechado e limitado em  $[H_+^\infty]^n$ , possui solução única em  $H_+^{2,-k}$ , podendo ser reescrito como um problema de melhor aproximação se  $k_i \geq p_i$ , para todo  $i$ .

A metodologia indicada na seção 5 estende-se a este problema usando conjuntos geradores multivariáveis para os espaços produtos  $H_+^{2,-k}$  ( $k$  um multi-índice) formados pelos produtos dos conjuntos geradores propostos, como por exemplo,  $\{(L_i, L_i, \dots, L_i) \in H_+^{2,-k}, i = 0, 1, 2, \dots\}$ ,  $L_0(s) = 1$  e  $L_i(s)$  definido em (12) para  $i > 0$ . Tanto os Lemas e o algoritmo proposto na seção 5 (aplicados coordenada a coordenada) quanto o Teorema 5.5 estendem-se de forma imediata, ressalvada a inevitável complexidade combinatória presente na dimensão do vetor de parâmetros  $K(s)$ , multiplicada pelo número de elementos do conjunto gerador a ser usado, dependente este

<sup>4</sup>A demonstração desta observação pode ser feita completando a observação ao Teorema 4.4 com o fato de, pelo Teorema de Cramer e pela fórmula de Laplace para o desenvolvimento de determinantes por colunas,

$$[(\Phi^*)^{-1}\gamma]_i = \frac{[\sum_j \gamma_j M_{ij}]/[\sum_k \Phi_{ik}^* M_{ik}]}{\det(\Phi^*)}$$

$$\partial_r[(\Phi^*)^{-1}\gamma]_i = \partial_r(\sum_j \gamma_j M_{ij}) - \partial_r(\sum_k \Phi_{ik}^* M_{ik}) \geq$$

$$\partial_r(\gamma_j) + \min_j \partial_r(M_{ij}) - \partial_{r_i}\Phi - \min_k \partial_r(M_{ik}) \geq \partial_{r_i}\Phi + 1 - \partial_{r_i}\Phi = 1,$$

onde foi usada a condição (i) e a condição sobre o grau relativo de  $\det\Phi$ . No Apêndice mostra-se um exemplo onde, apesar da condição (i) ser verificada,  $p > m$ , isto é,  $J_2(\hat{K}) = \infty$ . A última condição é consequência de  $\gamma$  igualar a  $\Phi^*B$ , pois

$$J_2(K) = \|\Phi K\|_2^2 - 2 \int [K^* \Phi^* B]_{s=i\omega} + \|B\|_2^2 \text{ e} \\ \|[(\Phi^*)^{-1}\gamma]_+ + \|_2^2 = \|[(\Phi^*)^{-1}(\Phi^*B)]_+ + \|_2^2 = \|B\|_2^2 < \infty, \text{ por hipótese.}$$

do controle do erro em cada coordenada de  $K(s)$ . Este controle de erro pode ser realizado de forma diferenciada para diferentes coordenadas, se for interessante, pelo uso de conjuntos geradores onde a ordem cresce mais rapidamente nas coordenadas exigindo maior precisão.

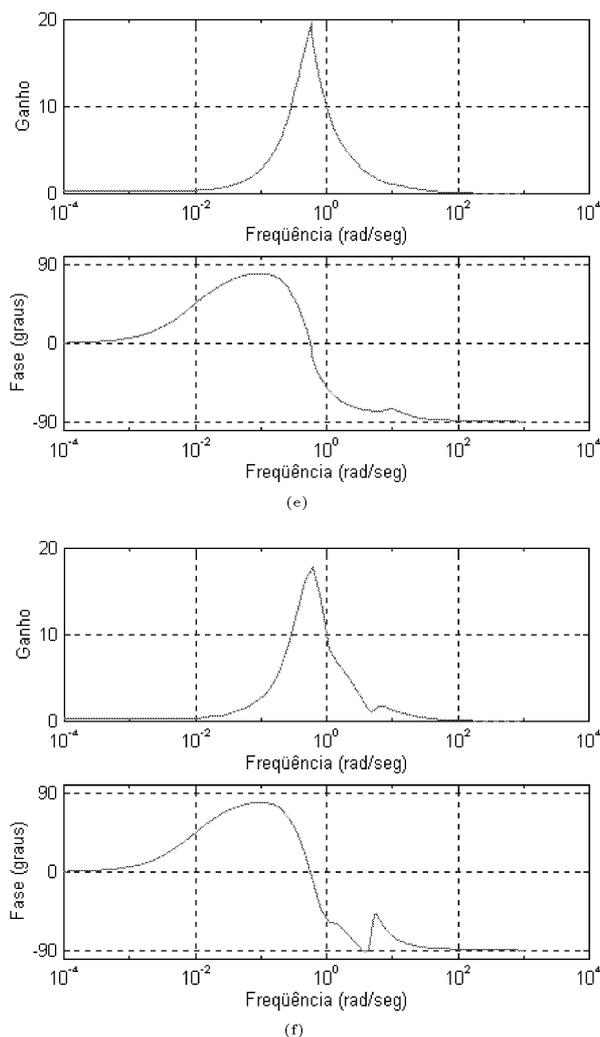


Figura 11: Diagramas de Bode das funções: (e)  $[A(s) + B(s)K_{SPQ}(s)]$  e (f)  $[A(s) + B(s)K_{L7}(s)]$  do Exemplo 2.

## 8 CONCLUSÕES

Neste artigo apresentou-se um tutorial e um método direto de resolução do Problema  $H_2/H_\infty$ , além de dois exemplos ilustrativos. Entre as vantagens do método proposto, pode-se citar a sua simplicidade e a ordem relativamente baixa das soluções aproximadas obtidas, dados os valores do critério. Com o auxílio do método

dual (Corrêa et alii, 1997) torna-se possível medir a precisão da minimização do funcional de custo quadrático.

A apresentação cuidadosa da extensão da metodologia proposta à situação onde os vetores do conjunto gerador são escolhidos de forma a acelerar a convergência da seqüência aproximante, otimizando-se o critério quadrático  $J_2$  sobre as restrições e sobre a posição dos pólos das funções do conjunto gerador, inicialmente apresentada em Ades (1999), será assunto de artigo ora em preparação.

## REFERÊNCIAS

- Ades, R. (1999). *Problema  $H_2/H_\infty$  - Soluções Aproximadas por meio de Expansão em Bases*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Elétrica, PUC-Rio, RJ.
- Athans, M. e Falb, P. L. (1966). *Optimal Control*. McGraw Hill, NY.
- Bazaraa, M. S. e Shetty, C. M. (1993). *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, NY.
- Bernstein, D. S. e Haddad, W. M. (1989). "LQG control with an  $H_\infty$  performance bound: A Riccati equation approach". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, n° 3, pp. 293-305.
- Bertsekas, D. P. (1995). *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, NY.
- Bonnans, J. F.; Gilbert, J. C.; Lemaréchal, C. e Sagastizábal, C. (1997). *Optimisation Numérique - Aspects théoriques et pratiques*. Mathematiques & Applications 27, Springer-Verlag, Berlin.
- Boyd, S. P.; Balakrishnan, V.; Barratt, C. H.; Khraishi, N. M.; Li, Xiaoming; Meyer, D. G. e Norman, S. A. (1988). "A new CAD method and associated architectures for linear controllers". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, n° 3, pp. 268-283.
- Chaoubah, A. (1999). *Controle  $H_2$  robusto relativo a perturbações estruturadas, uma abordagem via fatores coprimos normalizados*. Tese de Doutorado, DEE/PUC-Rio, RJ.
- Corrêa, G. O. (1992). "Uma introdução à teoria de controle por realimentação". *Minicurso XV CNMAC*, LNCC, Rio de Janeiro.
- Corrêa, G. O. (1994). "Introdução ao controle ótimo no domínio da frequência". *Revista da Sociedade Brasileira de Automática*, Minicurso 10° CBA.

- Corrêa, G. O. e Silveira, M. A. (1995). "On the design of servomechanisms via  $H_2$ -optimization". *International Journal of Control*, vol. 61, n° 2, pp. 475-491.
- Corrêa, G. O.; Sales, D. M. e Soares, T. M. (1997). "Approximate solutions to  $H_2/H_\infty$  problems via sequences of  $H_2$ -cost /  $H_2$ -constraint optimization problems". *International Journal of Control*, vol. 67, n° 3, pp. 333-353.
- Cruz, J. J. (1996). *Controle robusto multivariável*. EDUSP, SP.
- Desoer, C. A.; Liu, R. W.; Murray, J. e Francis, B. (1980). "Feedback system design: the fractional representation approach". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 831-847.
- Doyle, J. C. e Stein, G. (1981). "Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, pp. 4-16.
- Doyle, J. C.; Francis, B. A. e Tannenbaum, A. R. (1992). *Feedback Control Theory*. Macmillan, New York.
- Ekeland, I. e Temam, R. (1974). *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod, Paris.
- Francis, B. (1987). *A course on  $H_\infty$  control theory*. Springer Verlag, Berlin.
- Glover, K. e Mustafa, D.S. (1989). "Derivation of the maximum entropy  $H_\infty$ -controller and a state-space formula for its entropy". *International Journal of Control*, vol. 50, n° 3, pp. 899-916.
- Hille, E. (1976). *Analytic function theory*. Chelsea, NY.
- Khargonekar, P. P. e Rotea, M. A. (1991). "Mixed  $H_2/H_\infty$  control: A convex optimization approach". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, n° 7, pp. 824-837.
- Khoan, V. K. (1972). *Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles*. Vuibert, tome 2, Paris.
- Krasnosel'skii, M. A.; Vainikko, G. M.; Zabreiko, P. P.; Rutitskii, Ya. B. e Stetsenko, V. Ya. (1972). *Approximate Solution of Operator Equations*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen.
- Kucera, V. (1979). *Discrete Linear Control: The Polynomial Approach*. Wiley, New York.
- Kwakernaak, H. (1986). "A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of multivariable feedback systems". *International Journal of Control*, pp. 117-156.
- Kwakernaak, H. e Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*. John Wiley, NY.
- Megretski, A. (1994). "On the order of optimal controllers in mixed  $H_2/H_\infty$  control". *Proceedings of 1998 American Control Conference, Lake Buena Vista, FL (1994)*, pp. 3173-3174.
- Nett, C. N. (1986). "Algebraic aspects of linear control system stability". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, pp. 941-949.
- Park, K. e Bongiorno Jr., J. J. (1989). "A General Theory for the Wiener-Hopf Design of Multivariable Control Systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, n° 6, pp. 619-626.
- Park, K. e Bongiorno Jr., J. J. (1990). "Wiener-Hopf design of servo-regulator-type multivariable control systems including feedforward compensation". *International Journal of Control*, vol. 52, pp. 1189-1216.
- Peres, P. L. D.; Geromel, J. C. e Bernussou, J. (1993). "Quadratic stabilization of linear uncertain systems in convex-bounded domains". *Automatica*, vol. 29, n° 2, pp. 491-493.
- Rudin, W. (1996). *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, NY.
- Saeks, R. e Murray, J. (1981). "Feedback systems synthesis: the tracking and disturbance rejection problems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, pp. 203-217.
- Safonov, M. G. e Goh, K. C. (1994). "Control system synthesis via bilinear matrix inequalities". *Proceedings ACC 1994*, Baltimore.
- Sales, D. M. (1994). *Controle  $H_2/H_\infty$ : Soluções Aproximadas baseadas em Seqüências de Problemas Quadráticos*. Tese de Mestrado, IME, RJ.
- Sales, D. M. (2000). *Solução de problemas de controle via BMIs e LMIs dependentes da frequência*. Tese de Doutorado, DEE/PUC-Rio, RJ.
- Sales, D. M. e Corrêa, G. O. (1988). "Controle  $H_2/H_\infty$  via LMI: proximidade da solução ótima". *Anais do XII CBA*, UFU, Uberlândia.
- Scherer, C. W. (1993). "Multiobjective  $H_2/H_\infty$  control". *Selected Topics in Identification, Modelling and Control*, Delft University Press, vol. 6, pp. 85-94, Holland.
- Scherer, C. (1995). "Mixed  $H_2/H_\infty$  control". *Trends in control: an european perspective*, IFAC.

Silveira, M. A. (1995). *Controle de Sistemas Lineares*. Publicações do 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/ CNPq, RJ.

Silveira, M. A. (1996). "Robust Optimal Control". *Proceedings of IEEE-SMC and IMACS Multiconference CESA 96*, France.

Silveira, M. A. (2001). "Robust optimal tracking and regulation for linear systems: the  $H^2/H^\infty$  approach", Proceedings 40th IEEE Conference on Decision and Control 2001 at Orlando, Florida, 4 a 7 de dezembro de 2001. Invited paper.

Silveira, M. A. e Ades, R. (1999). "Robust optimal controllers (Mixed  $H_2/H_\infty$  problem) via Galerkin's method". *Proceedings of the 1999 IFAC*, China.

Silveira, M. A. e Ades, R. (2000). "The solution of the  $H_2/H_\infty$  problem by direct methods". *Publicação Interna DEE-01/00*, DEE/PUC-Rio, RJ, aceita para publicação pelo SIAM J. Control and Optimization.

Silveira, M. A. e Corrêa, G. O. (1992). " $H_2$ -optimal control of linear systems with tracking / disturbance rejection constraints". *International Journal Control*, vol. 55, nº 5, pp. 1115-1139.

Sznaier, M.; Rotstein H.; Bu, J. e Sideris, A. (1997). "An exact solution to continuous-time mixed  $H_2/H_\infty$  control problems". *Proceedings AACC-1997*.

Vidyasagar, M. (1985). *Control System Synthesis*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Willems; J. C. (1971). "Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 6, pp. 621-634.

Youla, D. C.; Jabr, H. A. e Bongiorno Jr., J. J. (1975). "Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers, Part I". *IEEE Transactions on Automatic Control*.

Youla, D. C.; Jabr, H. A. e Bongiorno Jr., J. J. (1976). "Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers, Part II: The Multivariable Case". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 21, pp. 319-338.

Youla, D. C. e Bongiorno Jr., J. J. (1985). "A feedback theory of two-degree-of-freedom optimal Wiener-Hopf design". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, pp. 652-665.

Zames, G. (1981). "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, pp. 301-320.

Zhou, K.; Doyle, J. C. e Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, NY.

## Apêndice 1: Dados dos exemplos.

**Exemplo 1:** Na tabela 5 encontram-se os coeficientes em ordem decrescente de grau, onde o último coeficiente é o de grau zero, dos polinômios do numerador e do denominador das funções de transferências de  $A(s)$ ,  $B(s)$  e  $F(s)$  do exemplo 1.

Tabela 5: Modelos de  $A(s)$ ,  $B(s)$  e  $F(s)$  utilizados no exemplo 1.

Modelo	Coeficientes do numerador	Coeficientes do denominador	
$A(s)$	0	1.0000000000000000e+000	
	4.710906970933326e+000	9.731474482443330e+000	
	4.550270577013053e+001	5.539707065150240e+001	
	2.572149635701103e+002	2.232934742571207e+002	
	1.032622403564578e+003	7.017546121419040e+002	
	3.227798516437962e+003	1.795345459112574e+003	
	8.225004429620971e+003	3.841623049386590e+003	
	1.751129269731991e+004	6.979961529243392e+003	
	3.167096449546073e+004	1.086224926609179e+004	
	4.901371762569520e+004	1.452676367779859e+004	
	6.516190866001650e+004	1.667738024605201e+004	
	7.426504479827300e+004	1.634478732161120e+004	
	7.214692537488748e+004	1.352792493023176e+004	
	5.901970748203967e+004	9.292001922592666e+003	
	3.990291642365406e+004	5.152250316503403e+003	
$B(s)$	0	1.0000000000000000e+000	
	1.000000000000001e+000	2.474734368402468e+000	
	2.120554103642794e+000	4.557155097076176e+000	
	4.243374853238152e+000	5.803825959640539e+000	
	4.855241617539127e+000	3.964096281145180e+000	
	3.272687463702943e+000	1.342691050178350e+000	
	1.000000000000004e+000	1.000000000000004e-001	
	$F(s)$	0	1.0000000000000000e+000
		2.139867544115218e+000	-1.374734368402494e+000
		-2.733661815699907e+000	2.944947291833524e+000
		6.589817553821601e+000	-2.426910501783556e+000
		-5.785850503289970e+000	1.000000000000046e+000

Os controladores reproduzidos na tabela 6, calculados pelo método proposto, podem ser colocados sob a forma de uma FT racional por meio de (50):

$$K(s) = [ L_0(s) \quad L_1(s) \quad \cdots \quad L_n(s) ] \theta \quad (50)$$

Tabela 6: Controladores obtidos pelo método proposto para o exemplo 1.

$K(s)$	$\underline{\theta}$	$K(s)$	$\underline{\theta}$	$K(s)$	$\underline{\theta}$
$K_{L9}$	-4.05318227407731	$K_{L8}$	-4.05574933558666	$K_{L7}$	-3.71072523865832
	1.51684834528797		1.57049916733634		1.31839288348468
	0.90252988686680		0.93077185509349		0.56621369481449
	-0.26570896749308		-0.31062340357414		-0.51338265110765
	-0.26127224984327		-0.37845295537855		-0.68753878232618
	-0.30747231331139		-0.44362178568748		-0.62982389202476
	0.40663809249666		0.18295718936630		-0.08933133539187
	0.29673657209326		0.16766333405005		-0.00580507329546
	0.29833903903117		0.16481887975827		
	0.01442022450972				
$K_{L6}$	-3.65412995985833	$K_{L5}$	-3.83991247240168	$K_{L4}$	-4.04346643840845
	1.23562091717101		1.50359596790230		2.47869783187154
	0.46760605926763		0.67064793257171		1.64449196351352
	-0.58478797736812		-0.43068861442934		0.77881355570037
	-0.72519084589060		-0.59438478328857		0.15197034766953
	-0.64005606744182		-0.53014110684161		
-0.06772310932732					
$K_{L3}$	-4.05569719760712	$K_{L2}$	-3.44840169255883	$K_{L1}$	-1.85399305951671
	2.38914075060905		1.70256110189804		0.24950440134033
	1.41711919680345		0.68893759176152		
	0.55417853394415				

Tabela 7: Modelos de  $A(s)$ ,  $B(s)$  e  $F(s)$  no exemplo 2.

Modelo	Coefficientes do numerador	Coefficientes do denominador	
$A(s)$	0	1.000000000000000e+000	
	2.104546574459903e+001	4.250311947337076e+002	
	8.963331823421431e+003	5.581215367435686e+004	
	1.182288433895933e+006	2.327114788600798e+006	
	4.995617026320633e+007	4.237341547393929e+007	
	9.288021298508420e+008	4.475884616871588e+008	
	9.959564060585610e+009	3.189444757430189e+009	
	7.103824798975662e+010	1.605752310656949e+010	
	3.540720089565016e+011	5.757884037772778e+010	
	1.240345649692309e+012	1.416922476420949e+011	
	2.898955650943401e+012	2.302058710317365e+011	
	4.054860324259159e+012	2.467584698131624e+011	
	2.704357065189816e+012	1.758145887823473e+011	
	9.590470992588880e+011	8.314063915429361e+010	
	1.966876192788110e+011	2.566071199942276e+010	
	2.369676504296551e+010	4.991978756349352e+009	
	1.634930863901040e+009	5.770275184568057e+008	
	6.170683436926579e+007	3.622086451622349e+007	
1.174592704085518e+006	1.098452824198816e+006		
8.640643928108260e+003	1.277992716654094e+004		
$B(s)$	0	1.000000000000000e+000	
	-1.000000293936709e+001	5.229122593029562e+001	
	-5.790299554207852e+002	9.131682718204416e+002	
	-1.198765496244540e+004	8.744697771714638e+003	
	-1.335137690138736e+005	5.558582627418657e+004	
	-9.199237961363190e+005	2.458774269996874e+005	
	-4.190348059339091e+006	7.385197620629581e+005	
	-1.277558012567916e+007	1.458079114043581e+006	
	-2.464888609101170e+007	1.865013425042370e+006	
	-2.384123652036215e+007	1.538688732366352e+006	
	-7.027921710932779e+006	8.052664353740353e+005	
	-1.025138277574148e+006	2.549166239466458e+005	
	-7.026822518987335e+004	4.374284434987681e+004	
	-2.156068791827736e+003	3.081634027031825e+003	
	$F(s)$	0	1.000000000000000e+000
		-1.838138993718762e+000	-2.755462523455378e+000
		2.380860186074642e+000	2.968865557623980e+000
		-7.752938640836877e-001	-1.475224664317159e+000
-8.098457493406322e-002		2.866927210392816e-001	

onde  $L_0(s), L_1(s), \dots, L_n(s)$  são as funções de Laguerre, conforme definidas no exemplo 1 e  $\underline{\theta}^t = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]$  contém os coeficientes calculados de cada uma das funções.

**Exemplo 2:** As tabelas 7 e 8 seguem os mesmos formatos das correspondentes apresentadas para o exemplo 1.

**Apêndice 2 :** Exemplo onde  $p > m$ , isto é,  $J_2(\hat{K}) = \infty$ , apesar da hipótese (i) do Teorema 7.1 ser verificada.

Faça

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} (s+1)^{-1} & (s+3)^{-1} \\ (s+2)^{-1} & (s+4)^{-1} \end{bmatrix}$$

e

$$\gamma(s) = \begin{bmatrix} (s+5)^{-2} \\ 2(s+6)^{-2} \end{bmatrix}.$$

Um cálculo direto mostra que:

$$\det[(\Phi^*)^{-1}] = -0,5(1-s)(2-s)(3-s)(4-s)$$

onde houve cancelamento de todos os termos de grau maior que zero no denominador do determinante.

Por outro lado,  $\partial_r(\gamma_i) = 2 \geq 2 = \partial_{r_i}(\Phi) + 1$ , para  $i = 1, 2$ . Calculando, mostra-se que  $[(\Phi^*)^{-1}\gamma]$  é estável,

Tabela 8: Controladores obtidos pelo método proposto para o exemplo 2.

$K(s)$	$\theta$	$K(s)$	$\theta$	$K(s)$	$\theta$
	0.81325559717489		0.83259530814251		0.89335433673392
	-0.14912496749292		-0.17816464517325		-0.25444289561462
	0.01296173995632		-0.01691862616151		-0.07685171112445
	0.01149590504987		-0.01705973999512		-0.08274076020377
$K_{L7}$	0.00319533952778	$K_{L6}$	-0.02249761475240	$K_{L5}$	-0.09476711453395
	0.03014278844656		0.00815790262805		-0.03603761495317
	0.02555122704879		0.00980249044059		
	0.00596764740739				
	0.77392279125771		0.88860208303594		0.73676167023731
$K_{L3}$	-0.10299839981975	$K_{L2}$	-0.25384420906207	$K_{L1}$	-0.09557196286491
	0.04676005219457		-0.05663648582933		
	0.03446614299186				

mas o grau relativo de suas duas coordenadas iguala -1. Mesmo fatorando  $[(\Phi^*)^{-1}\gamma]$  em  $H_+^{2,-2}$ , tem-se que

$$J_2(\hat{K}) = \|\Phi\Phi^{-1}[(\Phi^*)^{-1}\gamma]_+\|_2^2 - 2 \int_{\{[(\Phi^*)^{-1}\gamma]_+\}^*} (\Phi^*)^{-1}\Phi^*\gamma|_{s=i\omega} d\omega = \infty$$

o que pode ser demonstrado formalmente aproximando  $\hat{K}$  em  $H_+^{2,-2}$  por funções  $K_q$  pertencentes a  $H_+^2$  (para as quais o critério é finito), donde  $J_2(K_q) \rightarrow J_2(\hat{K}) = \infty$ . Isto é,  $p > m$  neste caso.