

---

# CONTROLADOR EM MODO DUAL ADAPTATIVO ROBUSTO PARA PLANTAS COM GRAU RELATIVO ARBITRÁRIO

**Caio D. Cunha\***  
dorneles@ufrnet.br

**Aldayr D. Araújo\***  
aldayr@dca.ufrn.br

**Francisco C. Mota†**  
mota@dca.ufrn.br

\*Departamento de Engenharia Elétrica -UFRN  
CEP:59.072-970 Natal-RN, fone 84 3215 3731-fax 84 3215 3767

†Departamento de Engenharia da Computação e Automação -UFRN CEP:59.072-970 Natal-RN, fone 84 3215 3771-fax 84 3215 3738

---

## RESUMO

Neste artigo é apresentado o Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto (DMARC). O DMARC é um sistema de controle que combina as estratégias de Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) com leis integrais de adaptação e o Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (VS-MRAC) com leis chaveadas de acordo com a teoria de sistemas com estrutura variável. A idéia básica é incorporar as vantagens de desempenho transitório de um VS-MRAC, com as propriedades de regime permanente de um MRAC convencional. Desta forma, obtém-se um sistema de controle robusto a incertezas paramétricas e perturbações externas, com desempenho rápido e pouco oscilatório durante o transitório e um sinal de controle suave em regime permanente.

**PALAVRAS-CHAVE:** Controle em Modo Dual, Controle Adaptativo, Sistemas com Estrutura Variável.

## ABSTRACT

In this paper the Dual-Mode Adaptive Robust Controller (DMARC) is presented. The DMARC is a control strategy which interpolates the Model Reference Adaptive Control

(MRAC) and the Variable Structure Model Reference Adaptive Control (VS-MRAC). The main idea is to develop a robust controller to parametric uncertainties and external disturbances with good transient characteristics (fast response and small oscillations) as in a VS-MRAC and good steady-state characteristics (smooth control signal) as in a conventional MRAC.

**KEYWORDS:** Dual Mode Control, Adaptive Control, Variable Structure Systems.

## 1 INTRODUÇÃO

O Controlador em Modo Dual Adaptativo Robusto teve sua motivação a partir do artigo de Hsu e Costa (1989), onde os autores propuseram uma lei de controle que, dependendo da escolha de um parâmetro, podia se comportar como o Controlador MRAC ou como o Controlador VS-MRAC e suas versões intermediárias.

No MRAC convencional, que usa leis integrais de adaptação, a saída da planta segue um modelo de referência especificado (Ioannou e Sun (1996), Åström e Wittenmark (1995), Sastry e Bodson (1989) e Narendra e Annaswamy (1989)). Mesmo com as modificações para aumentar a robustez do algoritmo convencional (fator  $\sigma$ , normalização, etc.), em geral o transitório é lento e oscilatório.

---

Artigo submetido em 16/12/2004 (Id:608)

Revisado em 19/07/2006, em 10/04/2008 e em 27/11/2008

Aceito sob recomendação do Editor Associado Prof. Liu Hsu

No VS-MRAC, utiliza-se a estrutura do controle por modelo de referência do MRAC. As leis integrais de adaptação são substituídas por leis chaveadas, resultando em um sinal de controle chaveado, como nos sistemas a estrutura variável (ver seção 4) (Hsu e Costa (1989), Hsu, Araújo e Costa (1994), Hsu, Lizarralde e Araújo (1997), Cunha e outros (2003)). Apesar do bom desempenho transitório, em geral tem-se a presença do fenômeno de “chattering”.

A partir da teoria de controle binário desenvolvida por Emelyanov (1987), Hsu e Costa propuseram um Controlador Binário Adaptativo por Modelo de Referência (B-MRAC) (Hsu e Costa (1990) e (Hsu e Costa (1994))). De acordo com o princípio binário, existem variáveis que são denominadas coordenadas (sofrem transformações) e variáveis que são denominadas operadores (definem as transformações aplicadas às coordenadas), e são todas tratadas como variáveis de estado do sistema (Andrievskii, Stotskii e Fradkov (1988) e Hsu e Costa (1994)). No B-MRAC é proposta uma combinação de um sistema com estrutura variável e um algoritmo de adaptação paramétrica. Utiliza-se uma lei gradiente de adaptação de alto ganho com projeção, a qual com um parâmetro (operador, segundo o princípio binário) suficientemente elevado faz o controlador tender ao VS-MRAC.

O DMARC faz uma ligação entre o VS-MRAC e o MRAC convencional. O objetivo é conseguir um sistema robusto, com desempenho rápido e pouco oscilatório (características do VS-MRAC), e sinal de controle suave em regime permanente (características do MRAC). A transição entre as duas estratégias de controle é feita, em tempo real, através de um parâmetro (operador) que varia em função do erro entre a saída da planta e a saída do modelo de referência.

A estrutura do controlador, aqui utilizada, baseia-se no VS-MRAC generalizado proposto por Araújo e Hsu, (1990) e do B-MRAC proposto por Hsu e Costa (1994).

## 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere uma planta linear, com parâmetros incertos, monovariável e invariante no tempo, com entrada  $u$  e saída  $y$ , com função de transferência

$$W(s) = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}. \quad (1)$$

Considere, também, o modelo de referência tendo a entrada  $r$  e a saída  $y_m$ , caracterizado pela função de transferência

$$M(s) = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)}. \quad (2)$$

Tem-se como objetivo determinar  $u$  tal que o erro de saída

$$e_0 = y - y_m \quad (3)$$

tenda a zero assintoticamente para condições iniciais arbitrárias e sinais de referência  $r(t)$  uniformemente limitados e contínuos por partes.

As seguintes hipóteses convencionais são feitas (Sastry e Bodson (1989), p. 103-104):

- A planta é controlável e observável com grau  $[D_p(s)] = n$  e grau  $[N_p(s)] = m$ ,  $n$  e  $m$  conhecidos;
- $\text{sinal}(k_p) = \text{sinal}(k_m)$ , positivos por simplicidade;
- $N_p(s)$  é Hurwitz ( $W(s)$  é de fase mínima);
- O modelo de referência tem o mesmo grau relativo da planta ( $n^* = n - m$ );
- Somente a entrada e a saída da planta são usadas para gerar  $u$ .

São usados os seguintes filtros de entrada e saída da planta

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \Lambda v_1 + gu \\ \dot{v}_2 = \Lambda v_2 + gy \end{cases} \quad (4)$$

onde  $v_1$  e  $v_2$  pertencem ao  $\mathbb{R}^{n-1}$ , e  $\Lambda$  é escolhido tal que  $N_m(s)$  é um fator de det  $(sI - \Lambda)$ . Define-se o vetor regressor como  $\omega^T = [v_1^T \ y \ v_2^T \ r]$ . O controle é, então, definido como

$$u = \theta(t)^T \omega(t) \quad (5)$$

onde  $\theta(t)^T = [\theta_{v_1}^T(t) \ \theta_n(t) \ \theta_{v_2}^T(t) \ \theta_{2n}(t)]$  é o vetor de parâmetros adaptativos (Ioannou e Sun (1996), p. 384).

Sabe-se que, sob as hipóteses acima, existe um único vetor constante  $\theta^*$  tal que a função de transferência da planta em malha fechada (com  $u = \theta^{*T} \omega$ , de  $r$  para  $y$ , é  $M(s)$  (condição de “Matching”). Obviamente  $\theta^*$  somente pode ser conhecido se a planta for conhecida. Quando isto não é o caso,  $\theta(t)$  é adaptado até que  $e_0(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e, eventualmente sob alguma condição de riqueza de sinal,  $\theta(t) \rightarrow \theta^*$  (Ioannou e Sun (1996). p. 177).

Seja  $[A, b, h^T]$  uma realização mínima da planta e  $x \in \mathbb{R}^n$  o respectivo vetor de estado. Então, a planta com os filtros podem ser representados como

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_0 x_c + b_0 u \\ y &= h_c^T x_c \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $x_c^T = [x^T, v_1^T, v_2^T]$ ,  $x_c \in \mathbb{R}^{3n-2}$ ,

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ gh^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} b \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{e } h_c^T &= [h^T \quad 0 \quad 0]. \end{aligned}$$

Nota-se que  $\omega = \Omega x_c + b_r r$  com

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_c = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ h^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se, então,

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + \frac{b_c}{\theta_{2n}^*} (u - \theta^{*T} \omega) + b_c r \\ y &= h_c^T x_c \end{aligned} \quad (7)$$

onde  $A_c = A_0 + b_0 \theta_r^{*T} \Omega_c$ ,  $\theta_r^{*T} = [\theta_1^* \dots \theta_{2n-1}^*]$ ,  $b_c = \theta_{2n}^* b_0$ ,  $\theta_{2n}^* = k_m/k_p > 0$ .

$[A_c, b_c, h_c^T]$  é uma realização não mínima e estável de  $M(s)$  (Sastry, (1984)), ou seja, o modelo de referência pode ser representado como

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cm} &= A_c x_{cm} + b_c r, \quad x_{cm} \in \mathbb{R}^{3n-2}. \\ y_m &= h_c^T x_{cm}. \end{aligned} \quad (8)$$

Definindo o vetor de erro por  $e = x_c - x_{cm}$ , tem-se a seguinte equação de erro

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_c e + \frac{b_c}{\theta_{2n}^*} (u - \theta^{*T} \omega) \\ e_0 &= h_c^T e \end{aligned} \quad (9)$$

e, na forma entrada saída,

$$e_0 = \frac{1}{\theta_{2n}^*} M(u - \theta^{*T} \omega). \quad (10)$$

Observe que nenhuma restrição foi feita em relação ao grau relativo da planta.

### 3 MRAC CONVENCIONAL

Considere um polinômio  $L(s)$  de grau  $N = n^* - 1$  escolhido de forma que  $M(s)L(s)$  seja ERP (Estritamente Real Positiva).

Seja o sinal auxiliar

$$y_a = ML\theta_{2n+1} (L^{-1}u - \theta^T L^{-1}\omega) \quad (11)$$

onde  $\theta_{2n+1}$  e  $\theta$  são estimativas para  $1/\theta_{2n}^*$  e  $\theta^*$  (parâmetros de "Matching"), respectivamente. O erro aumentado é definido como

$$e_a = (y - y_m) - y_a = e_0 - y_a. \quad (12)$$

Para garantir a estabilidade global do sistema adaptativo, Narendra, Lin e Valavani (1980) propuseram a seguinte modificação em  $y_a$

$$y_a = ML [\theta_{2n+1} (L^{-1}\theta^T - \theta^T L^{-1}) \omega + \alpha e_a (L^{-1}\omega)^T (L^{-1}\omega)], \quad \alpha > 0. \quad (13)$$

Para atualizar  $\theta(t)$  e  $\theta_{2n+1}(t)$  são usadas as seguintes leis integrais de adaptação

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -e_a (L^{-1}\omega) \\ \dot{\theta}_{2n+1} &= e_a (L^{-1}\theta^T - \theta^T L^{-1}) \omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Assim, o MRAC convencional pode ser resumido na Tabela 1.

Ioannou e Kokotovic (1984) contribuíram significativamente para o controle adaptativo de sistemas com grau relativo unitário, introduzindo o fator  $\sigma$  na lei de adaptação

$$\dot{\theta} = -\sigma\theta - e_0\omega \quad (15)$$

Tabela 1: MRAC convencional.

$u = \theta^T \omega$
$e_a = (y - y_m) - y_a = e_0 - y_a$ $y_a = ML[\theta_{2n+1}(L^{-1}\theta^T - \theta^T L^{-1})\omega + \alpha e_a(L^{-1}\omega)^T(L^{-1}\omega)], \alpha > 0$
$\dot{\theta} = -e_a(L^{-1}\omega)$ $\dot{\theta}_{2n+1} = e_a(L^{-1}\theta^T - \theta^T L^{-1})\omega$

a qual garante no mínimo estabilidade local na presença de dinâmica não modelada e/ou distúrbios externos. O primeiro termo do lado direito da igualdade pode ser interpretado como um fator de esquecimento e o segundo termo, um fator de aprendizagem. A introdução do fator  $\sigma$ , entretanto, pode levar ao aparecimento de “bursting” como verificado por Hsu e Costa (1987). Narendra e Annaswami (1987) propuseram a utilização de um fator de esquecimento variável, substituindo o parâmetro sigma pelo módulo do erro de saída eliminando o efeito de “bursting”.

A estabilidade global e a eliminação de “bursting” do algoritmo com modificação sigma foram obtidas depois por Ioannou e Tsakalis (1986), retendo a modificação sigma e introduzindo normalização no termo  $e_0\omega$ .

A introdução da normalização pode levar a transitórios de adaptação demasiadamente lentos e mesmo com a excitação rica em frequências, a qualidade do transitório de adaptação (quando  $\theta(t)$  está distante de  $\theta^*$ ) não é uniforme e a convergência dos parâmetros adaptativos é muito lenta. Apesar do comportamento transitório não ser totalmente aceitável, em algumas situações, o sinal de controle é suave, tornando-o adequado para a condição de regime permanente.

## 4 VS-MRAC

O VS-MRAC foi desenvolvido por Hsu e Costa (1989) no intuito de buscar um controlador robusto em relação às incertezas da planta e com um desempenho transitório significativamente melhor que os obtidos com os algoritmos baseados em identificação de parâmetros. Para o caso de  $n^* = 1$ , a solução foi substituir as leis integrais de adaptação por leis de adaptação a estrutura variável, tornando o erro de saída  $e_0(t) \equiv 0$  uma superfície deslizante no espaço de estado do erro do sistema. A lei de adaptação é dada por

$$\theta = -\bar{\Theta} \text{sgn}(e_0\omega), \quad \bar{\Theta} = \text{diag}(\bar{\theta}_1 \dots \bar{\theta}_{2n}) \quad (16)$$

onde  $\bar{\theta}_j > |\theta_j^*|, j = 1, \dots, 2n$ .

Para o caso de  $n^* \geq 2$  (Hsu (1990), Hsu Araújo e Costa(1994)), foi necessária a introdução de uma cadeia de erros auxiliares para o rastreamento do modelo. O algoritmo apresentado em Hsu (1990) foi modificado por Araújo e Hsu (1990), diminuindo o número de relés e possibilitando a obtenção de um melhor desempenho transitório.

Aqui será apresentada a versão compacta do VS-MRAC proposta por Araújo e Hsu (1990), denominada de VS-MRAC compacto.

Sejam os seguintes sinais filtrados

$$\xi_i = (L_{i+1} \dots L_N)^{-1}\omega, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\xi_N = \omega$$

$$\chi_i = (L_{i+1} \dots L_N)^{-1}u, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\chi_N = u$$

onde

$$L(s) = L_1(s) \dots L_N(s), \quad N = n^* - 1$$

$$L_i(s) = s + \delta_i, \quad \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \delta_i \in \Re$$

Define-se os limitantes superiores

$$\bar{\theta}_{ij} > \rho |\theta_j^* - \theta_{j,nom}|, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, 2n$$

$$\bar{\theta}_{Nj} > |\theta_j^* - \theta_{j,nom}|, \quad j = 1, \dots, 2n$$

$$\bar{k} > \frac{|k^* - k_{nom}|}{k_{nom}}$$

onde  $\theta_{nom}$  é um vetor de parâmetros nominais obtido com algum modelo nominal da planta (idealmente  $\theta_{j,nom} = \theta_j^*$ ),  $\rho = \frac{k^*}{k_{nom}}$  (idealmente  $\rho = 1$ ), e  $k_{nom}$  é um valor nominal para  $k^* = 1/\theta_{2n}^*$  (assume-se  $k_{nom} \neq 0$ ). Além disso tem-se  $u_{nom} = \theta_{nom}^T \omega$ .

O algoritmo de controle encontra-se resumido na Tabela 2.

As leis de adaptação a estrutura variável são escolhidas de forma que os erros auxiliares  $e'_i$  ( $i=0,1,\dots,N$ ) atinjam modos deslizantes em um tempo finito. Os controles equivalentes

Tabela 2: VS-MRAC compacto.

$u = -u_N + u_{nom}$
$y_a = k_{nom}ML[u_0 - L^{-1}(u_N)]$
$e_a = e_0 - y_a$
$e'_0 = e_a$
$e'_i = (u_{i-1})_{eq}^* - L_i^{-1}(u_i), \quad i = 1, \dots, N$
$f_i = \bar{k} \chi_i - \theta_{nom}^T \xi_i  + \bar{\theta}_i^T  \xi_i , \quad i = 0, 1, \dots, N-1$
$f_N = \bar{\theta}_N  \chi_N , \quad \bar{\theta}_i^T = [\bar{\theta}_{i,1} \dots \bar{\theta}_{i,2n}], \quad i = 0, \dots, N$
$u_i = f_i \text{sgn}(e'_i), \quad i = 0, 1, \dots, N$

$((u_i)_{eq}^*)$  são obtidos assintoticamente de  $(u_i)$  por meio de um filtro passa-baixas com frequência de corte suficientemente elevada.

## 5 DMARC

### 5.1 caso $n^* = 1$

No DMARC é feita uma ligação entre o MRAC e o VS-MRAC através da variação em tempo real de um parâmetro na lei de adaptação. Considere a seguinte lei de adaptação

$$\mu \dot{\theta} = -\sigma \theta - \sigma \Gamma e_o \omega \quad (17)$$

onde

$$\Gamma = \text{diag} \left[ \frac{\bar{\theta}_j}{|e_o \omega_j|} \right], \quad \bar{\theta}_j > |\theta_j^*|, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Quando  $\mu \rightarrow 0$ , nota-se que a equação (17) se resume a (16), ou seja, ao algoritmo VS-MRAC. A equação (17) pode ser reescrita como

$$\dot{\theta} = -\frac{\sigma}{\mu} \theta - \frac{1}{\mu} \sigma \Gamma e_o \omega. \quad (18)$$

Novamente, quando  $\mu \rightarrow 0$ , observa-se que o fator de esquecimento tende a infinito, implicando que o VS-MRAC não tem memória. O termo de aprendizagem também cresce ilimitadamente, de onde conclui-se que no VS-MRAC a adaptação é instantânea.

Quando  $\mu = 1$ , a equação (17) se resume a

$$\dot{\theta} = -\sigma \theta - \sigma \Gamma e_o \omega \quad (19)$$

que é a lei de adaptação do MRAC com fator  $\sigma$  e uma normalização no termo de aprendizagem.

### 5.2 caso $n^* \geq 2$

De forma similar ao artigo de Hsu e Costa (1994), usa-se a estrutura do VS-MRAC, descrita na Tabela 2, que é aplicável para  $n^* \geq 2$ . Utiliza-se o DMARC na última malha responsável pela geração do sinal de controle  $u_N$  (ver Figura 1).

Tabela 3: DMARC.

$u = -u_N + u_{nom}$
$y_a = k_{nom}ML[u_0 - L^{-1}(u_N)]$
$e_a = e_0 - y_a$
$e'_0 = e_a$
$e'_i = (u_{i-1})_{eq}^* - L_i^{-1}(u_i), \quad i = 1, \dots, N$
$f_i = \bar{k} \chi_i - \theta_{nom}^T \xi_i  + \bar{\theta}_i^T  \xi_i , \quad i = 0, 1, \dots, N-1$
$u_i = f_i \text{sgn}(e'_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1$
$u_N = -\theta_N^T \omega$
$\mu \dot{\theta}_N = -\sigma \theta_N - \sigma \Gamma_N e'_N \omega$

O algoritmo de controle é apresentado na Tabela 3. Na Figura 1, o bloco pontilhado que representa o relé regido pela função de modulação  $f_N$  é substituído por leis adaptativas ou chaveadas (geradas pelo DMARC) de forma que  $u_N$  é determinado pelas expressões

$$u_N = -\theta_N^T \omega$$

$$\mu \dot{\theta}_N = -\sigma \theta_N - \sigma \Gamma_N e'_N \omega \quad (20)$$

onde

$$\Gamma_N = \text{diag} \left[ \frac{\bar{\theta}_{N,j}}{|e'_N \omega_j|} \right], \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Analisando as duas últimas expressões da Tabela 3, vê-se que quando  $\mu \rightarrow 0$

$$\theta_N = -\bar{\Theta}_N \text{sgn}(e'_N \omega), \quad \bar{\Theta}_N = \text{diag}(\bar{\theta}_{N,1} \dots \bar{\theta}_{N,2n}) \quad (21)$$

e, como  $\xi_N = \omega$  tem-se para  $u_N$

$$u_N = (\text{sgn}(\omega))^T \bar{\Theta}_N \omega \text{sgn}(e'_N)$$



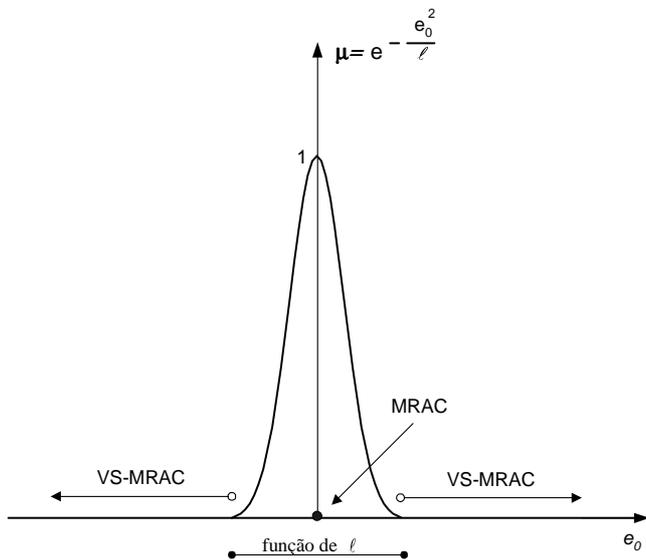


Figura 2: Evolução de  $\mu$  em função do erro de saída.

Analisando a derivada da equação (23) tem-se

$$\dot{\mu} = -2\frac{\mu}{\ell}e_0\dot{e}_0. \quad (24)$$

Sendo  $e_0 = 0$  a superfície de deslizamento e  $e_0\dot{e}_0 < 0$ , a condição de escorregamento para o VS-MRAC, vê-se que o parâmetro  $\mu$  só pode crescer (tendendo ao MRAC) quando a condição de escorregamento for satisfeita. Se a condição de escorregamento não for satisfeita o  $\mu$  decresce (tendendo ao VS-MRAC) tão mais rápido quanto menor for o parâmetro  $\ell$ . Com um valor de  $\ell$  suficientemente pequeno, o algoritmo de controle funciona como VS-MRAC até um valor bem pequeno de  $e_0$ , permitindo uma resposta transitória muito rápida.

Tem-se, então, a análise apresentada na Tabela 4.

Tabela 4: Comportamento de  $\mu$  quanto à condição de escorregamento.

Se $e_0\dot{e}_0 < 0$ condição de escorregamento satisfeita	então $\dot{\mu} > 0$ $\mu$ aumenta (aproxima-se do MRAC)
Se $e_0\dot{e}_0 > 0$ condição de escorregamento não satisfeita	então $\dot{\mu} < 0$ $\mu$ diminui (aproxima-se do VS-MRAC)
Se $e_0\dot{e}_0 = 0$ superfície de escorregamento alcançada	então $\dot{\mu} = 0$ $\mu$ constante, controlador fixo

## 7 ANÁLISE DE ESTABILIDADE PARA PLANTAS DE PRIMEIRA ORDEM

Considere um exemplo simples onde a planta e o modelo de referência são dados, respectivamente, por

$$\dot{y} = -ay + u; \quad y, u \in \mathfrak{R}; \quad a \in \mathfrak{R} \quad (25)$$

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + r; \quad y_m, r \in \mathfrak{R}; \quad a_m \in \mathfrak{R}, \quad a_m > 0 \quad (26)$$

onde  $a$  é o único parâmetro desconhecido.

A lei de adaptação do DMARC (17) é

$$\mu\dot{\theta} = -\sigma\theta - \sigma\bar{\theta}\text{sgn}(e_0y) \quad (27)$$

com  $\mu$  dado por (23). A lei de controle é

$$u = \theta y + r. \quad (28)$$

No modo regulação ( $r = 0$ ),  $y_m = 0$ ,  $e_0 = y$  e uma realização para o erro de saída é escrita como segue

$$\dot{e}_0 = (\theta - a)e_0$$

$$\dot{\theta} = -\sigma e^{\frac{\epsilon_0^2}{\ell}}(\theta + \bar{\theta}), \quad \bar{\theta} > |a| + \epsilon, \quad \epsilon > \frac{1}{4} \text{ ou}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma e^{\frac{\epsilon_0^2}{\ell}}\hat{\theta}, \quad \hat{\theta} = \theta + \bar{\theta}. \quad (29)$$

Nota-se que o sistema possui um ponto de equilíbrio em  $(e_0 = 0, \hat{\theta} = 0)$ , cuja análise linearizada, em torno desse ponto de equilíbrio, caracteriza-o como um nó estável.

Definindo a função de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}e_0^2 + \frac{1}{2\sigma}\hat{\theta}^2 \quad (30)$$

tem-se para sua derivada

$$\dot{V} = -(\bar{\theta} + a)e_0^2 + \hat{\theta}e_0^2 - \hat{\theta}^2 e^{\frac{\epsilon_0^2}{\ell}}. \quad (31)$$

Analisando (31), nota-se que para  $\hat{\theta} \leq 0$  tem-se  $\dot{V} < 0$ . Considerando  $0 < \ell \leq 1$ , tem-se que  $e^{\frac{\epsilon_0^2}{\ell}} > e_0^2$ . Assim, para

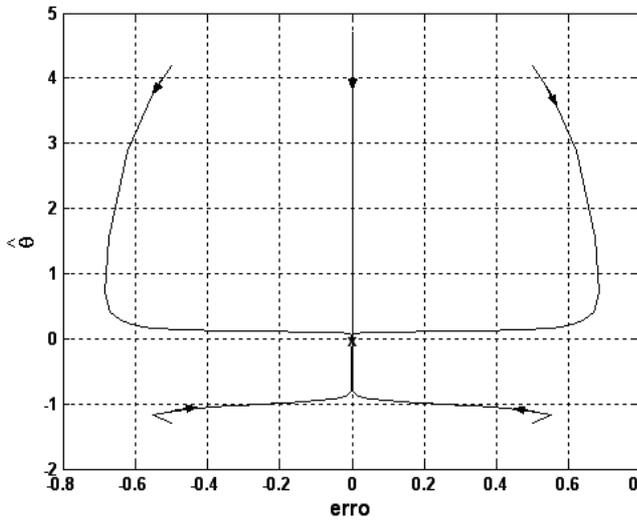


Figura 3: Plano de fase para uma planta de primeira ordem,  $r = 0$ .

$\hat{\theta} \geq 1$  implica que  $\hat{\theta}^2 \geq \hat{\theta}$  e, conseqüentemente,  $\dot{V} < 0$ . Ainda, a partir de (31) tem-se

$$\dot{V} \leq -(\bar{\theta} + a) e_0^2 + (\hat{\theta} - \hat{\theta}^2) e_0^2. \quad (32)$$

No intervalo  $0 < \hat{\theta} < 1$ , o segundo termo do lado direito de (32) é positivo. Porém, a função  $(\hat{\theta} - \hat{\theta}^2)$  possui um máximo em  $\hat{\theta} = \frac{1}{2}$ . Desta forma, reescreve-se (32) como

$$\dot{V} \leq \left(-\bar{\theta} - a + \frac{1}{4}\right) e_0^2. \quad (33)$$

Com esse resultado, de (29) e (31), vê-se que  $\dot{V} = 0$  apenas no ponto  $(e_0 = 0, \hat{\theta} = 0)$  e  $\dot{V} < 0$  para todo espaço em torno dele. Como  $V > 0$  é radialmente ilimitada, conclui-se que  $(e_0 = 0, \hat{\theta} = 0)$  é globalmente assintoticamente estável. Devido à estabilidade assintótica global da origem no espaço de estado, conclui-se que para esse controlador não há possibilidade do surgimento do fenômeno de “bursting”.

Na Figura 3 é apresentado o plano de fase para  $r = 0$ , com cinco condições iniciais distintas. Observa-se a convergência para  $(e_0 = 0, \hat{\theta} = 0)$  independente da condição inicial. Os dados utilizados na simulação foram:  $a = -2$ ,  $a_m = 1$ ,  $\bar{\theta} = 3, 2$ ,  $\ell = 0, 1$  e  $\sigma = 0, 1$ . Os resultados das simulações para  $r = 0$  encontram-se na Figura 3.

Com os mesmos dados anteriores foram feitas simulações para  $r = 1$  e os resultados encontram-se na Figura 4. Nesse caso, como a referência é persistentemente excitante,

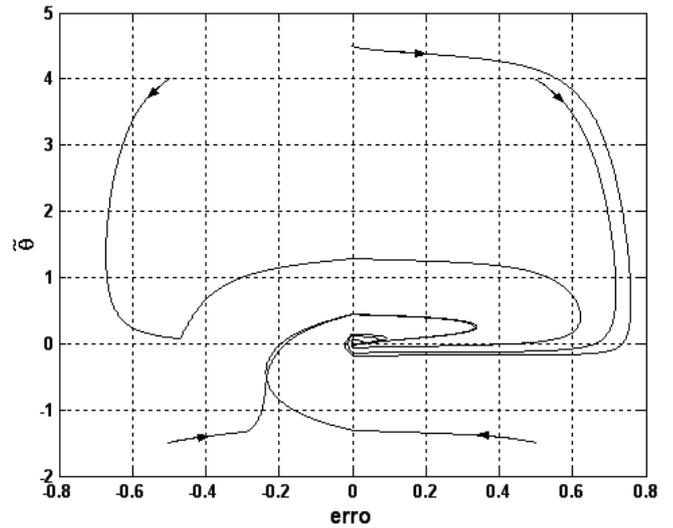


Figura 4: Plano de fase para uma planta de primeira ordem,  $r = 1$ .

observam-se as convergências de  $\theta$  para  $\theta^*$  ( $\hat{\theta} = 0$ ) e do erro de saída para zero.

A análise de estabilidade, para plantas com  $n^* > 1$ , pode ser feita a partir da análise de plantas com  $n^* = 1$ , seguindo Hsu (1990) e Hsu e Costa (1994). Uma vez que  $e'_N$  é governado por uma função de transferência estritamente real positiva (ver Figura 1 e Tabela 3) é sugerido o uso da lei de adaptação do DMARC para  $n^* = 1$ , no bloco pontilhado da Figura 1, onde é gerado  $u_N$ . Desde que seja garantido que  $\theta_N$  é uniformemente limitado, todos os sinais do sistema serão uniformemente limitados. Assim, independente da forma como é feita a modificação em  $\theta_N$ , a convergência exponencial dos erros auxiliares  $e_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N - 1$ ) para zero permanece válida (Hsu (1990) e Hsu e Costa (1994)).

## 8 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Foi escolhido o controle de posição de um motor CC cuja função de transferência é um sistema de ordem e grau relativo, ambos, iguais a 3 (Feller e Benz (1987)). A função de transferência da planta é

$$W(s) = \frac{2 \cdot 10^3 \hat{k}_p}{s(s^2 + 20s + 2000)}$$

onde  $\hat{k}_p$  varia entre 2,5 e 10, tornando o ganho de alta frequência conhecido com incertezas.

O modelo de referência é especificado por

$$M(s) = \frac{10^4}{(s + 55,55)^3}$$

e os sinais  $v_1$  e  $v_2$  com a mesma dinâmica do modelo, ou seja

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3090 & -111 \end{bmatrix} ; \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 3090 \end{bmatrix}.$$

Foi escolhido o polinômio  $L(s)$  como

$$L(s) = L_1(s) L_2(s) = (s + 55,55)^2$$

tornando, assim, mais simples o operador ML.

Para gerar os controles equivalentes foram usados os seguintes filtros de segunda ordem

$$F_i(s) = (\tau_i s)^2 + 2\xi\tau_i s + 1$$

$$\tau_i = (400\pi)^{-1}, \quad \xi = 0,7 \quad , \quad i = 1, 2.$$

Os parâmetros do controlador para o VS-MRAC compacto determinados a partir de  $\theta^*$  e da incerteza em  $\hat{k}_p$  são

$$\theta_{nom}^T = (0; 0; 0; 0; 0; 1); \quad k_{nom} = 1$$

$$\bar{\theta}_i^T = (13,5; 0,1; 75; 60; 2,75; 1,1); \quad i = 0, 1$$

$$\bar{\theta}_2^T = (6,75; 0,05; 150; 120; 5,5; 1,1); \quad \bar{k} = 1, 1.$$

Inicialmente foram feitas simulações com o MRAC Convencional e o VS-MRAC compacto com  $\hat{k}_p = 5$  e  $r(t) = 0, 1$  mantidos constantes. As condições iniciais foram tais que  $y(0) = 2 \cdot 10^{-3}$ . Os resultados dessas simulações com o MRAC encontram-se na Figura 5 e com o VS-MRAC na Figura 6.

Verifica-se no MRAC um transitório demasiadamente longo e oscilatório (comparado com o VS-MRAC), porém com sinal de controle suave. No VS-MRAC o transitório é rápido, pouco oscilatório, mas com o sinal de controle de alta frequência.

Nas simulações subsequentes, foram feitas as modificações mostradas na Tabela 5.

Para sintonizar o DMARC utilizou-se a expressão para o parâmetro  $\mu$

$$\mu = e^{-e'^2_N/\ell} \quad (34)$$

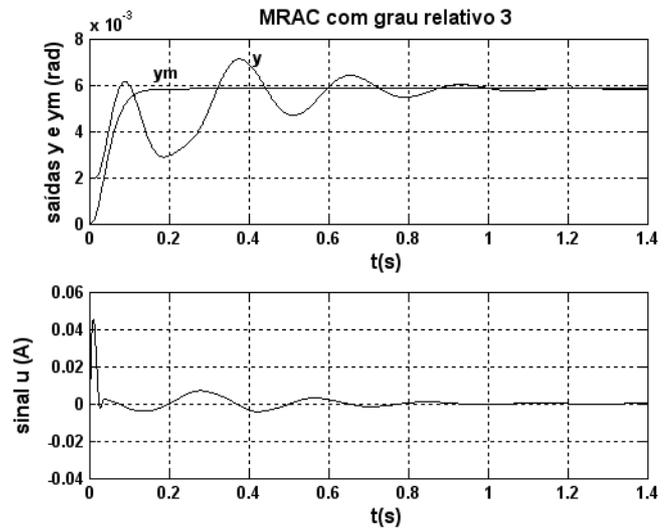


Figura 5: Desempenho do MRAC.

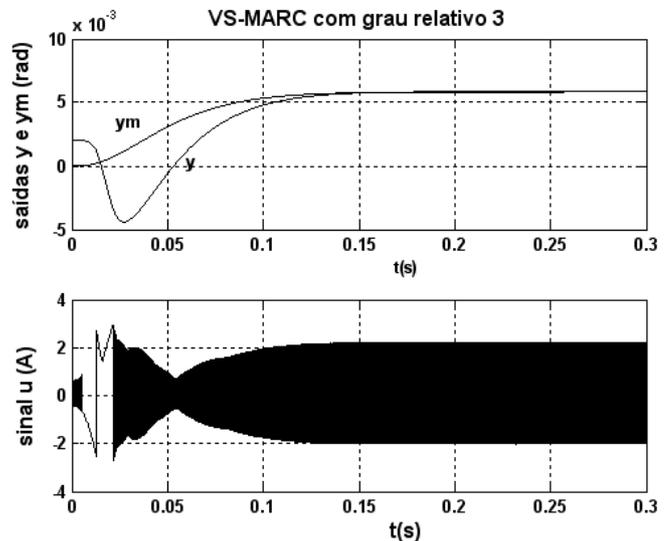


Figura 6: Desempenho do VS-MRAC.

Tabela 5: Modificações feitas nas simulações

para $0s \leq t < 0,2s$		
$r(t) = 0, 1$	$d(t) = 0, 03$	$\hat{k}_p = 5$
para $0,2s \leq t < 0,4s$		
$r(t) = 0$	$d(t) = 0$	$\hat{k}_p = 10$
para $0,4s \leq t \leq 0,6s$		
$r(t) = 0, 1$	$d(t) = -0, 03$	$\hat{k}_p = 2, 5$

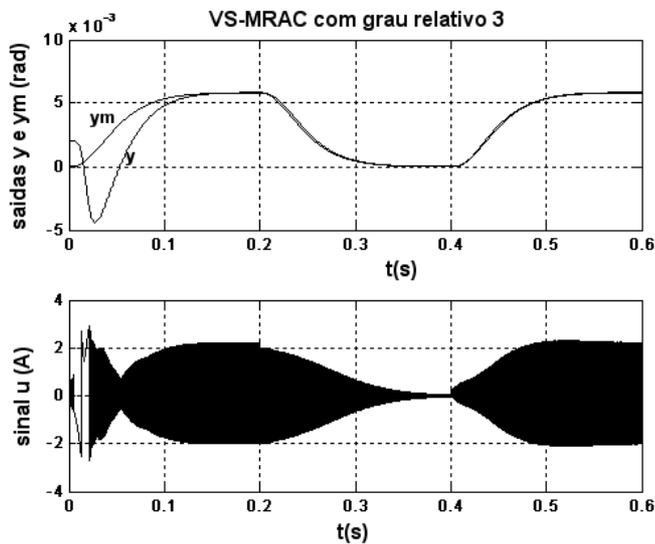


Figura 7: Desempenho do VS-MRAC.

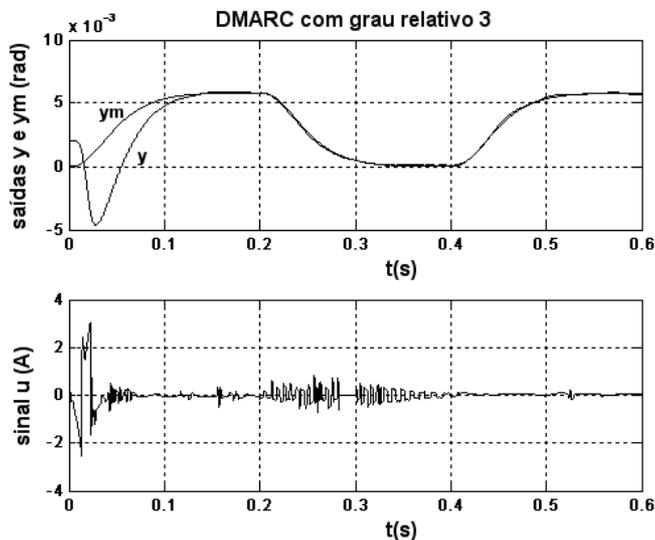


Figura 8: Desempenho do DMARC.

onde  $\ell$  é um parâmetro a ser ajustado.

Nessas novas condições foram escolhidos os parâmetros  $\sigma = 0,05$  e  $\ell = 5 \cdot 10^{-9}$  para o DMARC.

Os resultados das simulações com o VS-MRAC e com o DMARC são apresentados nas Figuras 7 e 8, respectivamente. Nota-se que tanto o VS-MRAC como o DMARC apresentam uma pequena oscilação, atingindo o regime permanente em um tempo consideravelmente pequeno, com robustez em relação à variação paramétrica e à perturbação externa. Entretanto, o sinal de controle do DMARC apresenta uma boa suavização, em relação ao sinal do VS-MRAC, e pequena magnitude em regime permanente.

A análise de  $e'_N$  em (34) é semelhante à análise feita para  $e_0$  em (23), para o caso  $n^* = 1$ , uma vez que a malha na qual se encontra  $e'_N$  é representada por um sistema de primeira ordem.

## 9 CONCLUSÕES

Neste artigo é proposto um DMARC para o controle de uma planta com grau relativo arbitrário. Utilizou-se a estrutura do VS-MRAC compacto proposta por Araújo e Hsu (1990). Conforme pode ser verificado pelas simulações, o algoritmo em Modo Dual Adaptativo Robusto proporcionou um transitório rápido e praticamente sem oscilações e um desempenho em regime permanente com sinal de controle com boa suavização. Adicionalmente apresentou robustez a incertezas paramétricas e distúrbios. Uma análise de estabilidade é feita para o caso particular de uma planta de primeira ordem. A análise generalizada, para plantas com grau relativo arbitrário, poderá ser feita seguindo Hsu (1990) e Hsu e Costa (1994), considerando-se que na Figura 1 o DMARC é aplicado na última malha, a um sistema de primeira ordem.

## REFERÊNCIAS

- Andrievskii, B. R., Stotskii, A. A. e Fradkov, A. L. (1988). Velocity Gradient Algorithms in Control and Adaptation Problems, *Automation and Remote Control*, 49(12), Part 1, 1533-1564.
- Araújo, A. D. e Hsu, L. (1990). Further Developments in Variable Structure Adaptive Control Based only on Input/Output Measurements, *Proceedings of the 11<sup>th</sup> IFAC World Congress*, Tallinn, August, 4, 293-298.
- Åström, K. J. e Wittenmark, B. (1995). Adaptive Control, Addison-Wesley Pub. Co.
- Cunha, C. D., Araújo, A. D., Barbalho, D. S. e Mota, F. C. (2005). A Dual-Mode Adaptive Robust Controller Applied to the Speed Control of a Three-Phase Induction Motor, *Asian Journal of Control*, 7(2), 197-201.
- Cunha, J.P.V.S., Hsu, L., Costa, R.R. e Lizarralde, F. (2003). Output-Feedback Model-Reference Sliding Mode Control of Uncertain Multivariable Systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-48 (12), 2245-2250.
- Emelyanov, S. V. (1987). Binary Automatic Control Systems. MIR Publishers, Moscow (English Translation).
- Feller, P. e Benz, U. (1987). Sliding Mode Position Control of a DC Motor, *Proc. 10th IFAC World Congress*, 3, 333-338.
- Hsu, L. (1990). Variable Structure Model Reference Adaptive Control Using only Input and Output Measure-

- ments: The General Case, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC- 35 (11), 1238-1243.
- Hsu, L. e Costa, R.R. (1987). Bursting Phenomena in Continuous-Time Adaptive Systems with a  $\sigma$ -Modification, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-32(1), 84-86.
- Hsu, L. e Costa, R. R. (1989). Variable Structure Model Reference Adaptive Control Using only Input and Output Measurements: Part I, *Int. J. Control*, 49(2), 399-416.
- Hsu, L., Araújo, A. D. e Costa, R. R. (1994). On the Design of Variable Structure Adaptive Control Using only Input/ Output Data, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-39 (1), 4-21.
- Hsu, L. e Costa, R.R. (1990). A Binary Control Approach to Design Globally Exponentially Stable Systems. Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Systems Engineering, Las Vegas, July.
- Hsu, L. e Costa, R. R. (1994). B-MRAC Global Exponential Stability with a New Model Reference Adaptive Controller Based on Binary Control Theory, *Control-Theory and Advanced Technology*, 10 (4), Part 1, 649-668.
- Hsu, L., Lizarralde, F. e Araujo, A. D. (1997). New Results on Output-Feedback Variable Structure Model-Reference Adaptive Control: Design and Stability Analysis, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-42 (3), 386-393
- Ioannou, P. A. e Sun, J. (1996). Robust Adaptive Control, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- Ioannou, P. A. e Kokotovic, P. V. (1984). Instability Analysis and Improvement of Robustness of Adaptive Control, *Automatica*, 20(5),583-594
- Ioannou, P. A. e Tsakalis, K. S. (1986). A Robust Direct Adaptive Controller, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-31( 11), 1033-1043.
- Mota, F. C. e Araújo, A. D. (2002). Proposta de um Controlador Dual Adaptativo Robusto Utilizando o Modelo de Takagi-Sugeno, *Congresso Brasileiro de Automática*, Natal-RN, Brasil, 173-177.
- Narendra, K. S. e Annaswamy, A. M. (1987). New Adaptive Law for Robust Adaptive Control Without Persistent Excitation, *IEEE Trans Automatic Control*, AC-32, 134 -145.
- Narendra, K. S. e Annaswamy, A. M. (1989). Stable Adaptive Systems, Prentice Hall, Inc., New Jersey.
- Narendra, K. S., Lin, Y. H. e Valavani, L. S. (1980). Stable Adaptive Controller Design - Direct Control, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-25( 6), 570-583.
- Sastry, S. S. (1984). Model - Reference Adaptive Control – Stability, Parameter Convergence and Robustness, *IMA J. Mathematical Control and Information*, 1, 27-66.
- Sastry, S.S. e Bodson, M. (1989). Adaptive Control: Stability Convergence and Robustness, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall.
- Takagi, T. e Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control, *IEEE Trans. Syst. Man and Cybern.*, SMC-15(1), 116-132.