

Modelo de Competencias Profesionales de Matemáticas (MCPM) y su Implementación en Profesores de Enseñanza Primaria en Chile

Model of Professional Competence of Mathematics (MCPM) and its Implementation in Primary Teachers in Chile

Verónica Díaz Q.*

Álvaro Poblete L.**

Resumen

En base a la implementación de un Modelo de Competencias Profesionales de Matemáticas (MCPM) este proyecto de investigación y desarrollo se centró en los profesores del segundo ciclo básico, específicamente NB5 (7° grado), con la finalidad de desarrollar e implementar a través de una capacitación, una metodología de trabajo docente basado en una didáctica que asocia el saber matemático-pedagógico y la práctica de aula, logrando la actualización de los saberes matemáticos y didácticos de los profesores que enseñan matemática y potenciando la habilidad para favorecer el aprendizaje por resolución de problemas. La metodología usada fue cualitativa y cuantitativa y, para tal efecto, se trabajó con 47 profesores pertenecientes a 36 escuelas urbanas con dependencia municipal de la Región de Los Lagos de Chile. Los resultados muestran que los profesores progresan ante tareas didáctico-matemáticas, mejorando sustancialmente su desempeño docente y evidenciando competencias generales y específicas.

Palabras-clave: Competencias profesionales. Profesores de enseñanza primaria. Competencias matemáticas. Resolución de problemas.

Abstract

This research project analyzed primary school teachers from 7th grade (second-cycle) enrolled in training through a Model of Professional Competences in Mathematics. The aim of the project was to develop and implement a teaching methodology that relates mathematics and pedagogical knowledge and teaching practice, with a view to updating mathematics teachers' content and pedagogical knowledge that fosters learning through problem-solving. The research used a quantitative, as well as a qualitative methodology. The research population were 47 teachers from 36 urban schools run by municipalities at Región de Los Lagos, in Chile. Results show that teachers improve when faced with didactic-mathematical tasks, reaching substantial improvements in their teaching performance and showing evidence of general and specific competences.

Keywords: Professional competences. Primary-school teachers. Mathematics competences. Problem-solving.

* Doctora en Educación con Especialización en Matemática por la Universidad Humanismo Cristiano (UAHC). Académica e investigadora del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos y Directora del Magister en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, Osorno, Región de Los Lagos, Chile. Dirección postal: Casilla 933, Depto. Ciencias Exactas, Osorno, 5290000, Chile. E-mail: mvdiaz@ulagos.cl

** Ph.D en Didáctica Matemática por la Université Laval (UL). Académico e investigador del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad de Los Lagos y Director del Doctorado en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, Osorno, Región de Los Lagos, Chile. Correo postal: Casilla 933, Depto. Ciencias Exactas, Osorno, 5290000, Chile. E-mail: apoblete@ulagos.cl

1 Introducción

Existe concordancia, en la sociedad, que los profesores son un elemento clave en el sistema educativo y un factor crítico para garantizar cualquier proceso de reforma. Según la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura - UNESCO (2012), entre las variables escolares, la experiencia del docente tiene un efecto positivo continuo en el rendimiento de los estudiantes. Su influencia resulta determinante para el mejoramiento escolar y la consecución de los objetivos educativos que la sociedad espera del sistema. Por otra parte, el papel del conocimiento del profesor sigue siendo central. Según Schoenfeld (2013), lo que se puede alcanzar depende de manera fundamental de lo que se sabe y el conocimiento especializado del contenido resulta clave para el desarrollo del conocimiento del contenido y la enseñanza, y del contenido y de los estudiantes (CLIMENT et al., 2013). De ahí la importancia de asegurar la competencia del docente.

Existe coincidencia en señalar que un docente competente no sólo debe conocer su disciplina, sino manejar variadas estrategias pedagógicas que permitan a sus alumnos desarrollar habilidades más complejas como la resolución de problemas, actitudes y motivaciones para participar en la sociedad y convertirse en aprendices autónomos a lo largo de la vida; todo esto ha puesto en entredicho las instituciones y prácticas tradicionales de formación inicial y continua de los docentes (DARLING-HAMMOND, 2006; DARLING-HAMMOND; CHING; JOHNSON, 2009; OCDE, 2009). El estudio que presentamos se relaciona con estos aspectos y da cuenta del trabajo vivenciado con profesores que enseñan matemática en escuelas primarias públicas y vulnerables, en una región de Chile.

2 Antecedentes teóricos

Para la UNESCO-CEPAL (2013), educación de calidad es aquella que mejora las competencias cognitivas, además de promover actitudes y valores, es decir, aquella que proporciona lo necesario en el aspecto cognoscitivo, pero que también atienda el lado práctico, el aprendizaje de situaciones que servirían para la vida (DÍAZ; POBLETE, 2007b). Para lograr lo anterior, se requieren no sólo recursos financieros y materiales para invertirlos en las escuelas, sino también una buena cantidad de profesores motivados y competentes profesionalmente.

Investigaciones realizadas en Estados Unidos muestran el impacto de un docente mejor o peor preparado. Los efectos de los docentes sobre los niveles de rendimiento suelen

ser acumulativos y no compensatorios, es decir, se entiende que la eficacia de cada profesor en una determinada escuela se pondera con la eficacia agregada de la secuencia de profesores que tiene un alumno en su vida escolar, por tanto, los profesores calificados afectan el rendimiento de sus estudiantes más que cualquier otra variable (AYLWIN; PEÑA, 2007). El contexto específico de trabajo influye el modo como asume un docente su desarrollo profesional y el modo como se inserta en su comunidad de práctica (LAVE; WENGER, 1991).

El contexto de trabajo también lo constituye el sistema educativo más amplio dentro del cual enseña el docente, el que puede presentarse como alineado con su situación usual de trabajo o en oposición o contradicción con ella. Por ejemplo, en un momento de reforma se les puede pedir a los docentes que aprendan determinadas estrategias, y más tarde cuando cambia la intencionalidad de la reforma se les pide modificar lo aprendido anteriormente (AVALOS, 2007). Esto implica demostrar conocimientos, habilidades y competencias, que no se ajustan precisamente al contexto de cambio.

La actividad de enseñar matemáticas tiene una componente social, es una relación entre personas. La relación entre el profesor y el alumno se realizan con el propósito de la apropiación de saber matemática. Uno de los elementos relevantes en el trabajo del profesor es la transposición de ese saber (CHEVALLARD, 1986). Además de éste existe otro elemento clave y que se refiere a las situaciones, ejercicios, tareas o problemas que él puede planificar y proponer para el aprendizaje del alumno.

En el marco de este proyecto hablamos de situaciones o tareas para hacer referencia a las actividades de enseñanza que el profesor propone. Estas situaciones o tareas son posteriores a la transposición didáctica. Están en el plano del saber matemático enseñable. En este estudio, se adopta como marco de referencia a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y sus últimos desarrollos (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). El constructo teórico fundamental de la TAD, es la noción de praxeología u Organización Matemática (OM). Estas emergen como respuesta a una cuestión o conjunto de cuestiones problemáticas que se denominan cuestiones generatrices.

Las organizaciones matemáticas a su vez, constan de dos niveles: 1) el nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, que engloba un cierto tipo de tareas, y las técnicas para resolverlos y 2) el nivel del *logos* o del *saber*, donde se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan (tecnología). Siguiendo las líneas recientes de investigación que propone la TAD, se plantea la necesidad de introducir las Actividades de Estudio e Investigación (AEI) que emergen como modelo didáctico para abordar la

problemática, una organización didáctica donde la clase, bajo la dirección de un profesor, va a hacer estudiar, reconstruir y hacer accesible a los alumnos una cierta Organización Matemática Local (OML) (CORICA; MARIN, 2014).

2.1 Enfoque por competencias

En la comunidad internacional, el enfoque por competencia es considerado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico OCDE como una propuesta educativa que no solo abarca aprendizaje de contenidos, sino que apunta a la formación de ciudadanos constructivos y con capacidad de reflexión, permitiéndoles identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo (OCDE, 2003). A partir del Proyecto DeSeCo de la OCDE, que se concentró en la elaboración de un listado de competencias-clave, diversos países de la Unión Europea han utilizado el enfoque por competencias, como sustento para sus reformas curriculares de la educación obligatoria (RYCHEN; SALGANIK, 2006; OCDE, 2005). El Proyecto Tuning dio paso a que las universidades modificasen su diseño curricular hacia un enfoque por competencias (GONZÁLEZ; WAGENAAR, 2003). Las distintas reformas que ha tenido América Latina también se han visto influenciadas por estas experiencias.

En lo que respecta al ámbito escolar, destacan algunos proyectos en torno a la implementación del enfoque por competencia en matemática tales como la reforma curricular de Portugal (ABRANTES, 2001); la incorporación de competencias matemáticas al currículum danés (NISS, 2002); el proyecto del Programme for International Student Assessment PISA (OCDE, 2003), sustentado en la propuesta de Niss y los estándares de matemáticas en Colombia (MEN, 2006). La competencia, en general y desde la perspectiva de Perrenoud (1998), está relacionada con el proceso de activar conocimientos, habilidades y estrategias en un amplio abanico de contextos, y principalmente en situaciones problemáticas (PERRENOUD, 2004).

En el ámbito de la matemática, para Rico y Lupiáñez (2008), la competencia matemática consiste en un saber hacer en la práctica mediante herramientas matemáticas, utilizando la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Godino (2002) describe la diferencia entre competencia y comprensión: la competencia atiende a un componente práctico - saber hacer -, mientras que la comprensión, a un componente teórico - saber qué hacer y por qué -. Por otra parte, Font (2001) plantea una dicotomía distinta al argumentar que la comprensión se puede entender como una competencia o como un proceso

mental. Para el equipo OCDE/PISA, el término *competencia matemática* se ha elegido con el fin de hacer hincapié en el carácter funcional del conocimiento matemático y en la posibilidad de aplicarlo de forma variada a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos. Para que dicho uso sea posible y viable, se requiere un considerable volumen de conocimientos y habilidades matemáticas fundamentales (SOLAR et al., 2011).

Las competencias profesionales que sirvieron de base en esta investigación, forman parte de un Modelo de Competencias Profesionales de Matemática MCPM (POBLETE; DÍAZ, 2004) que fue previamente validado y evaluado a través de la ejecución de un proyecto (Fondecyt N° 1010980) financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica CONICYT de Chile.

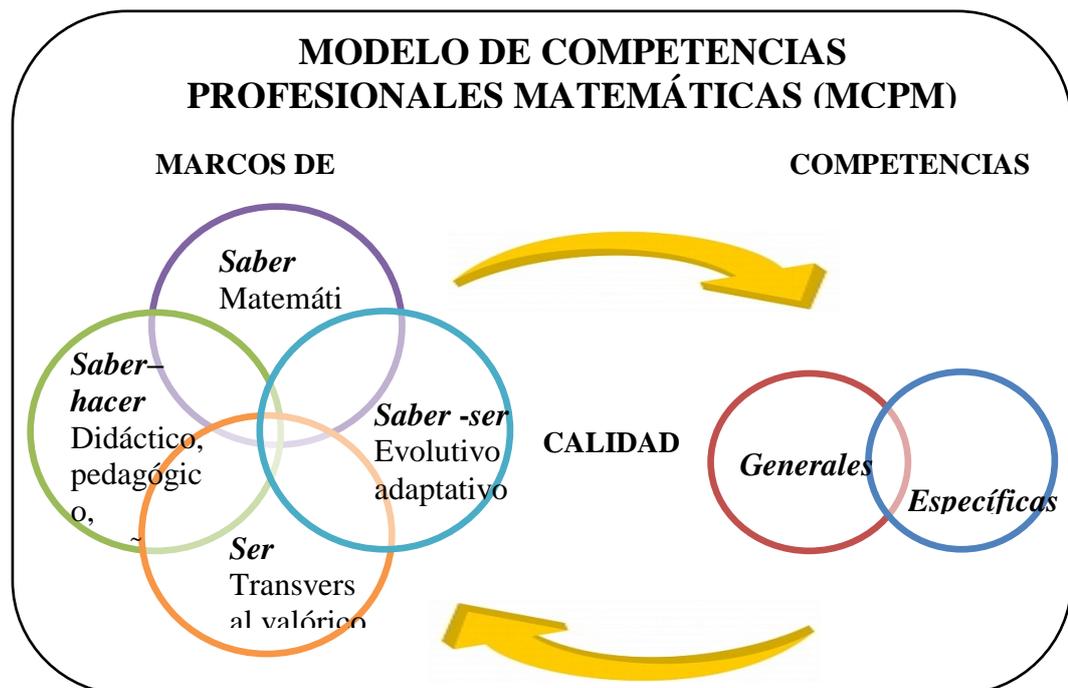


Figura 1- Modelo de Competencias Profesionales de Matemática MCPM
Fuente: Desarrollado por los autores

En este modelo se define la competencia del profesor de matemáticas, como la habilidad adquirida efectiva y eficientemente al ejecutar el acto de enseñar matemáticas, relacionada con la calidad, en el sentido de hacer la tarea educativa de formación y hacerla bien.

De acuerdo al modelo, se plantean competencias generales y especializadas, marcos de contextos de competencias, y dimensiones cualitativas en relación a la concepción de calidad. La competencia está asociada a marcos de contextos de competencias del profesor de matemáticas, constituidos por objetos tanto de contenido matemático como didáctico, transversal y evolutivo, que el profesor coloca en juego en su accionar en aula. Estos marcos

están conformados por: *saber* el contenido de matemática; *saber-hacer* lo didáctico, lo pedagógico, la enseñanza-aprendizaje y la evaluación; el *ser* transversal de lo valórico y el *saber-ser* evolutivo de lo adaptativo, relacionado con lo proyectivo, cultural y contextual.

Los marcos, a su vez, están caracterizados por dimensiones en torno a la calidad del desempeño profesional, los cuales se asocian con dimensiones de relevancia, eficiencia, efectividad, eficacia, procesos y recursos. La conexión entre los marcos de contextos, las competencias tanto generales como especializadas en torno a la calidad y sus dimensiones, y las formas en que ellos se conectan y se representan, permiten realizar acciones educativas al profesor de matemáticas donde éste demuestra su competencia (DÍAZ; POBLETE, 2007a, 2009a, 2009b).

Son ejemplos de competencias generales y especializadas las siguientes:

Competencias generales

Capacidad para desarrollar una formación ética en el estudiante; capacidad de trabajo colaborativo y en equipo en el quehacer profesional; habilidad para aplicar conocimientos disciplinarios; capacidad para lograr una adaptación, actualización y una proyección como profesor de matemática.

Competencias especializadas

Habilidad para planificar acciones didácticas en matemáticas; capacidad para utilizar diversas estrategias de enseñanza; habilidad para favorecer el aprendizaje por resolución de problemas en matemática; habilidad para exponer ideas matemáticas; capacidad para utilizar formas actualizadas en evaluación.

Una competencia importante, en este estudio, fue la habilidad para favorecer el aprendizaje por resolución de problemas en matemática, en el entendido en que esta competencia es también una metodología de trabajo que tiene repercusiones sobre el modo de trabajar con los estudiantes.

2.2 Resolución de problemas

En Estados Unidos, durante casi toda su historia, cada uno de los estados ha tenido su propio sistema educativo y es el responsable de establecer los estándares estatales. Es así como en 1989, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) produjo el Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (NCTM, 2000). El volumen destinado a los profesores, tuvo un énfasis significativo en la resolución de problemas, el

razonamiento, la comunicación con las matemáticas, y las conexiones dentro y fuera de las matemáticas.

En la actualidad, se han construido un conjunto de Estándares Comunes para las Matemáticas, conocidos como *Common Core State Standards* (CCSSI, 2010; CCSSM, 2014) y se han constituido en documentos de referencia que han tenido gran influencia tanto en el currículo de Estados Unidos como en el de muchos otros países, como Chile y España. De acuerdo a estos estándares, el énfasis significativo de las prácticas matemáticas implica que las personas que son matemáticamente competentes tienen sentido de los problemas y perseveran en su solución, razonan abstracta y cuantitativamente y modelan con las matemáticas, entre otros.

De la revisión de la literatura, Halmos (1980) llamó a la resolución de problemas, el *corazón de las matemáticas*. En términos más generales, existe una visión de las matemáticas como la *ciencia de patrones* (STEEN, 1988). Este amplio encuadre incluye tanto el planteamiento de problemas como la resolución de ellos, y una cierta forma de empirismo, que se hizo explícita con el trabajo de Polya (1954) en su obra *In Doing Mathematics* que explora el razonamiento plausible y los patrones de su inferencia (SCHOENFELD, 2013).

Existe una afirmación generalizada respecto a que las matemáticas escolares sirven a los estudiantes para pasar pruebas y exámenes específicos en lugar de alimentar una comprensión conceptual de las matemáticas (OFSTED, 2012). Como consecuencia, muchos países están priorizando el desarrollo de la resolución de problemas en los programas de matemáticas y pedagogía (NGA; CCSSO, 2010; OCDE, 2009; QCA, 2008; ROCARD, 2007; SOH, 2008), lo que según Gusmão et al. (2014) se verifica en las recientes propuestas de reformas curriculares que asumen que la resolución de problemas es la actividad fundamental en la construcción del conocimiento matemático de los alumnos.

En Chile, resolver problemas es considerado tanto un medio como un fin para lograr una buena educación matemática (MINEDUC, 2013). Castro (2008) y Santos (2007) reconocen que los intentos de enseñar a los estudiantes estrategias de resolución de problemas generales no han tenido éxito y es importante destacar la falta de atención en los libros de texto para el aprendizaje heurístico de estrategias para resolver problemas (SCHOENFELD, 2008; PINO; BLANCO, 2008).

Se explicita en el Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS (2003) la exigencia de resolver problemas enmarcados en contextos matemáticos o de la vida real de los que es muy poco probable que los alumnos hayan encontrado ítems similares (DÍAZ; POBLETE, 2013).

Por otra parte, los resultados en PISA (OCDE, 2003, 2007, 2009) han puesto de relieve la importancia de la resolución de problemas matemáticos en la educación obligatoria. Los problemas se utilizan con frecuencia en matemáticas para presentar y transmitir nuevas nociones y habilidades. Por lo tanto, los maestros transforman y adaptan los problemas a nivel de sus alumnos (KUZNIAK; PARZYSZ; VIVIER, 2013). Para Blanco, Guerrero y Caballero (2013), los maestros de primaria consideran la resolución de problemas en matemáticas como un proceso memorístico y mecánico, con pocos recursos para representar y analizar problemas, sin buscar estrategias o métodos alternativos para su solución, y sin hacer uso de las diferentes pautas y consejos que pueden ser administrados para ayudarle a llegar a una solución (BLANCO, 2004; CÓRCOLES; VALLS, 2006) lo que genera una visión de sí mismos como incompetentes resolutores de problemas (NCTM, 2003).

Las creencias que más influyen en la motivación y el rendimiento en matemáticas son la percepción de los estudiantes acerca de sí mismos en relación con las matemáticas (KLOOSTERMAN, 2002; SKAALVIK; SKAALVIK, 2011; HERNÁNDEZ; PALAREA; SOCAS, 2001; BLANCO et al., 2010) teniendo en cuenta que, generalmente, no se consideran capaces y calificados como resolutores de problemas, la mayoría de ellos se consideran a sí mismos incompetentes en la resolución de problemas.

Sajadi, Amiripour y Rostamy-Malkhalifeh (2013) postulan que el lenguaje y la visión son necesarios para la solución exitosa de los ejercicios de matemáticas. Parvanehnezhad y Clarkson (2008) describen las estrategias como el conocimiento del contenido matemático que los alumnos deben traer con ellos a una tarea matemática, junto con la capacidad de interpretar y comprender la jerga y la semántica con el fin de comprender y resolver con éxito un problema de matemática. Montague (2006) y Mayer (2003) reconocen la representación y ejecución del problema para tener éxito, unido a ciertas estrategias de autorregulación.

Schoenfeld (2013) reconoce que su trabajo, presentado en *Mathematics Problem Solving* MPS, tenía limitaciones teóricas significativas. Según el autor, su análisis de la solución de todos los problemas se desarrollaron en el laboratorio donde una o dos personas se sentaron a trabajar en los problemas que él había elegido, lo cual representó limitaciones muy importantes en su resolución, y, por lo tanto, en los análisis. Un cuarto de siglo más tarde de la propuesta de Schoenfeld, el principal desafío con respecto a la resolución de problemas es proporcionar una explicación teórica que caracterice, línea por línea, cada decisión tomada por el resolutor (tratando de alcanzar uno o más objetivos complejos) en actividades intensivas en conocimiento, altamente sociales, orientadas a objetivos para ayudar a los

estudiantes a aprender matemáticas. El logro de estos objetivos exige una gran cantidad de conocimientos y estrategia (SCHOENFELD, 2010).

2.3 Tipos de competencias matemáticas

Para efectos de esta investigación, se implementó el tratamiento didáctico de los contenidos matemáticos y la evaluación de los aprendizajes en base a la clasificación de tipos de competencias en matemáticas (DÍAZ; POBLETE, 2004, 2009a, 2009b) las que se definen a continuación.

Competencia Tipo 1 de *Conocimiento y Desarrollo de Procedimientos Matemáticos*, que incluye comprender y manejar la extensión de los conceptos matemáticos y la argumentación matemática. Básicamente, consiste en problemas con cálculos y definiciones del tipo más común que aparecen en las evaluaciones convencionales de las matemáticas.

Competencia Tipo 2 de *Resolución de Problemas Rutinarios*, incluye plantear, formular y resolver tipos de problemas rutinarios de contexto real, realista, fantasista y puramente matemáticos, que requieren el establecimiento de conexiones para su resolución.

Competencia Tipo 3 de *Planteamiento y Resolución de Problemas No Rutinarios*, incluye la decodificación de las distintas formas de presentar las situaciones matemáticas, traduciendo el lenguaje natural al simbólico/formal, es decir, consiste en el pensamiento matemático que incluye la capacidad de generalización.

La problemática que se plantea en esta investigación está formulada en los siguientes términos: las condiciones identificadas en Chile que hacen repensar los modos de formar a los nuevos profesores, dicen relación con una visión crítica de la calidad de los programas de formación docente. En la actualidad ha mejorado su formación, sin embargo los resultados distan de ser los esperados y las investigaciones actuales convergen en señalar que las escuelas, en Chile, no son efectivas en el logro de sus objetivos en general y en matemática en particular (AGUIRRE; CASTRO; CARREÑO, 2009; RACZYNSKI; MUÑOZ, 2004; CASASSUS, 2003; ESPINOZA; BARBÉ; GALVEZ, 2011), entonces cabe preguntarse ¿cómo mejorar las competencias profesionales de los profesores que enseñan matemáticas en la enseñanza primaria?.

2.4 Objetivos

- El objetivo general de esta investigación fue desarrollar e implementar una metodología de trabajo docente en base al Modelo de Competencias Profesionales en Matemática (MCPM), basado en una didáctica que asocia el saber matemático-pedagógico y la práctica de aula de los profesores que enseñan matemática.

Y los objetivos específicos:

- Desarrollar e implementar una capacitación docente a profesores de matemáticas de NB5 (séptimo año de enseñanza básica o primaria).
- Diseñar un proceso de estudio en base al Modelo de Competencias Profesionales en Matemática (MCPM) y actualizar los saberes matemáticos y didácticos de los profesores de matemáticas de NB5.
- Potenciar la habilidad para favorecer el aprendizaje por resolución de problemas en matemática.

3 Metodología

La metodología de trabajo que se utilizó en esta investigación se construyó bajo dos grandes pilares como son, por una parte, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999), dado que se centra en el sujeto haciendo matemáticas y tiene en cuenta los diferentes contextos, que dan lugar a la manipulación de objetos matemáticos, lugares llamados por Gascón (1998) instituciones, y por otro, el Enfoque por Competencias como un concepto científico elaborado por una ciencia social como es la Didáctica de la Matemática, cuyo objetivo es el desarrollo personal integral orientado hacia el ejercicio profesional, social y cívico, sustentado en un aprendizaje permanente a lo largo de toda la vida (GASCÓN, 2011).

Se diseñó un tipo de capacitación en matemática basado en un Modelo de Competencias Profesionales Matemáticas (MCPM) que contempla una didáctica con énfasis en el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas y dirigida al mejoramiento de las prácticas de enseñanza.

Por la naturaleza del proyecto, donde interesa el proceso y el producto, se utilizó una metodología de trabajo cuantitativo-descriptivo y cualitativo-interpretativo y se desarrolló durante el periodo escolar 2012. A través de este artículo, por razones de espacio y cantidad de información, se presentan, sucintamente, el desarrollo y resultados obtenidos con los profesores en esta investigación.

Se consideró como población a los profesores pertenecientes a las escuelas básicas urbanas con dependencia municipal estatal de la región de Los Lagos del sur de Chile. Para seleccionar la muestra de carácter intencionada, se consideró como unidad la escuela y los análisis correspondieron a la competencia del profesor. Para efectos de este proyecto se trabajó con 47 profesores de 36 escuelas, los que involucraron a 1.780 alumnos para el nivel de séptimo año de primaria, específicamente NB5. Cabe hacer notar que todos los profesores que impartían las clases de matemática, en este nivel de enseñanza, carecían de especialización en matemáticas.

Para realizar esta investigación, se diseñó un curso de capacitación de un año lectivo, con una estrategia didáctica específica que contempló, por una parte, trabajar la totalidad del programa curricular NB5 en educación matemática, y por otra, la dinámica del aula en las escuelas, en relación a considerar metodológicamente dos momentos. El primero de ellos, correspondiente al momento de la interacción didáctica que se centró en las acciones de los profesores en el curso de capacitación, y se realizó de manera sistemática con clases presenciales durante cuatro horas, un día a la semana, y contempló el desarrollo de contenidos matemáticos del currículum oficial, previamente elaborados en base a ejercicios, situaciones problemas basadas en tipos de problemas y en tipos de competencias matemáticas.

El segundo momento, correspondió a la transposición didáctica (CHEVALLARD, 1986) en aula por parte de los profesores, de las actividades desarrolladas en el proyecto. Esta acción se complementó con una asesoría a los profesores en las escuelas en donde ellos trabajaban regularmente. Las asesorías o acompañamientos eran realizados una vez a la semana por profesionales de matemática preparados en el proyecto para tal fin, con formación de pedagogía secundaria y magister en matemática. La finalidad de las asesorías era, por una parte, tener un acercamiento a los profesores de aula con un efectivo apoyo a la enseñanza de la matemática, y por otra, un seguimiento de la transferencia de las acciones didácticas a los alumnos. Además de apoyar el trabajo del profesor en cada escuela durante todo el proyecto, los asesores emitían, periódicamente, informes sobre el estado de avance del profesor en cada centro escolar.

Atendiendo a los objetivos, se privilegiaron las acciones centradas en los profesores, originando discusiones al interior de grupos de trabajos y proporcionando oportunidades que permitieran la interacción activa entre ellos. La enseñanza a los profesores se implementó, teniendo en consideración una perspectiva constructivista de aprendizaje y fue apoyada por materiales instruccionales, creados por ellos y aplicados al aula en sus escuelas. Se construyeron guías de trabajo, material didáctico y evaluaciones formativas para los alumnos

de las escuelas involucradas en el proyecto. Se distribuyeron al azar entre los profesores diferentes actividades, de tal modo que cada grupo creó sus actividades y su evaluación, las cuales eran expuestas al final de la clase, con apoyo de medios audiovisuales. Esta modalidad de trabajo se mantuvo durante toda la ejecución del proyecto y estas acciones fueron registradas en su totalidad. A continuación se presenta un ejemplo de ello en la figura 2.



Figura 2- Exposición y trabajo grupal de los profesores
Fuente: desarrollado por los autores

El trabajo semanal en equipo y el dominio de habilidades en la interacción con el grupo de iguales sirvieron para intercambiar y confrontar ideas, y por ende generar nuevo conocimiento. Se construyó y validó mediante juicio de expertos, un cuestionario para medir las competencias profesionales de los profesores que enseñaban matemáticas, en base al MCPM, el que fue aplicado en calidad de pre-test y post-test. El cuestionario consta de ocho ítems y comprende el conocimiento de los conceptos o preconcepciones que maneja el profesor, en función de la disciplina que imparte, específicamente el conocimiento del significado matemático de todas las unidades en estudio, el saber didáctico de estos contenidos, el saber-hacer didáctico-metodológico y evaluativo de los mismos. También comprende la relación con el ser como profesor, asociando los objetivos transversales propuestos en la reforma educacional con la enseñanza de la matemática y se asocian preguntas con el saber-ser del profesor en su labor educativa y su proyección futura.

Del mismo modo se elaboró, validó por contenido y aplicó una prueba de competencia matemática. Esta prueba incluyó todas las unidades propuestas en el currículo oficial: polígonos, circunferencia, áreas y perímetros, relaciones proporcionales, números y ecuaciones, potencias y volumen. Estas cinco unidades fueron tratadas en su totalidad durante la capacitación y de acuerdo a los objetivos del proyecto, la resolución de problemas fue incluida en forma transversal durante toda la ejecución del mismo.

Al finalizar cada una de las cinco unidades didácticas correspondientes al programa de estudio, se realizaban evaluaciones sumativas a los profesores, las que eran construidas incluyendo siempre las unidades anteriores. Posteriormente a estas evaluaciones, se realizaba

un proceso de *feedback* a los profesores, con el fin de cautelar la efectiva actualización y la transferencia didáctica de los saberes matemáticos a sus estudiantes.

La naturaleza del proyecto de investigación y desarrollo, y los objetivos del mismo, nos llevó a utilizar una combinación de métodos cualitativos y cuantitativos para relacionar, comparar y contrastar los diferentes tipos de resultados que se estaban obteniendo. Todas las sesiones de trabajo presencial semanales y de acompañamiento al aula eran registradas en forma escrita y en video grabado, con la subsiguiente transcripción y análisis.

4 Análisis de la información y resultados

4.1 De los instrumentos

Respecto a la prueba de competencia matemática, la confiabilidad basada en la homogeneidad, se estimó con el coeficiente Alfa de Cronbach y resultaron significativas para los profesores: pre y post test fueron 0,83 y 0,88 respectivamente; los análisis estadísticos de estudio de normalidad de Kolmogorov-Smirnov mostraron al nivel de significación del 5%, que el supuesto de normalidad de los puntajes del pre-test y post-test se verifica para los profesores. A un nivel del 5 %, los resultados de la prueba de T-Student permiten concluir que existen diferencias estadísticamente significativas ($p < 0,05$) entre los puntajes promedios del pre-test y pos-test.

4.2 De los niveles de logro

A continuación, la Figura 3 da cuenta del nivel de logro de competencias matemáticas, alcanzado por los profesores en ambas mediciones correspondientes al inicio y término de la capacitación.

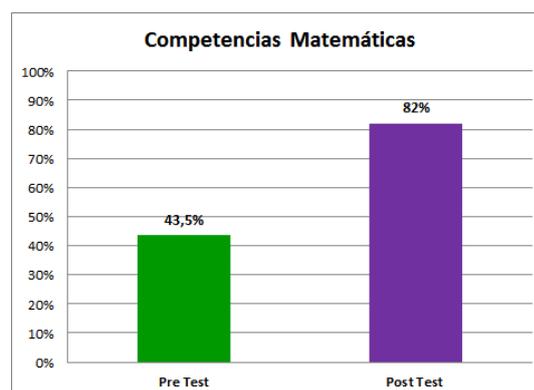


Figura 3- Nivel de logro en prueba de competencias matemáticas

De acuerdo a la Figura 3, el nivel de logro alcanzado por los profesores en la prueba de competencias matemáticas, fluctuó entre 43,5% en la aplicación inicial y 82% en la final. Resultados que, dada la naturaleza del instrumento evaluativo y su extensión, se consideran adecuados. Las mayores dificultades de los profesores en el pre test, se centraron en la resolución de problemas, en general, y en el eje de geometría, en particular. Entrevistados, manifestaron estar habituados a enseñar la geometría a partir del conocimiento de las fórmulas y con resolución de ejercicios y desvinculado con la realidad. A continuación, en la figura 4 se presenta un ejemplo de respuesta en el post test.

7

El fractal "copo de nieve" de Von Koch, tiene como objeto de partida un triángulo equilátero, y su proceso consiste en añadir en el centro de cada uno de sus lados un nuevo triángulo equilátero hacia fuera, tres veces más pequeño que el original, y así sucesivamente.

Si el estado inicial es un triángulo equilátero de lado (L) = 1 y perímetro (P) = 3

Estado Inicial	1ª etapa $L_1 = 1/3$ $P_1 = 3 \cdot 4 \cdot (1/3)$	2ª etapa $L_2 = (1/3)^2$ $P_2 = 3 \cdot 4^2 \cdot (1/3)^2$	3ª etapa $L_3 = (1/3)^3$ $P_3 = 3 \cdot 4^3 \cdot (1/3)^3$
----------------	----------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------

a) ¿Cuánto mide el lado y el perímetro en la 6ª etapa?

b) ¿Cuál es la fórmula para L y P en la etapa n-ésima?

Handwritten calculations on the left side of the page:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{81} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{243} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{729}$$

Handwritten calculations on the right side of the page:

$$P_6 = 3 \cdot 4^6 \cdot (1/3)^6$$

$$L_6 = 1,3 \cdot 1,3 \cdot 1,3 \cdot 1,3 \cdot 1,3 \cdot 1,3$$

$$P_6 = 12 \cdot 288 \cdot \frac{1}{729}$$

$$P_6 = \frac{12 \cdot 288}{729} = \frac{4096}{243}$$

Handwritten calculations at the bottom:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$16 \cdot 4$$

$$64 \cdot 4$$

$$256 \cdot 4$$

$$1024 \cdot 4$$

$$4096$$

Respuesta:

a) el lado 4,827
el perímetro 4096 cm.

b) $L_{10} = (1,3)^{10}$
 $P_{10} = 3 \cdot 4^{10} \cdot (1/3)^{10}$

Figura 4- Respuesta de profesor en el post test de competencias matemáticas
Fuente: Desarrollado por los autores

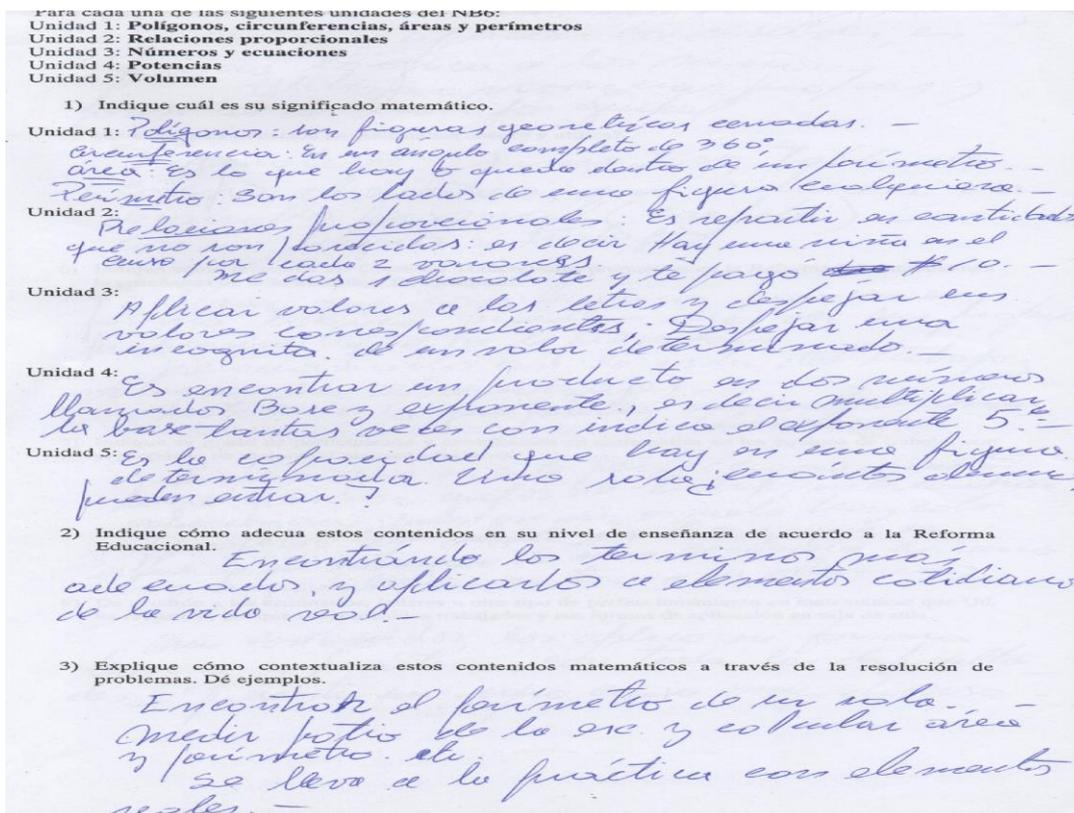
Concluida la capacitación, se contrastaron los resultados encontrados entre el pre test y post test de competencias profesionales, cuyas respuestas de los profesores, sirvieron de indicadores de las organizaciones matemáticas que se estudian en la enseñanza primaria, además de poner de manifiesto la existencia y la naturaleza de determinados obstáculos

epistemológicos y didácticos que dificultan el desarrollo del proceso de enseñanza de la matemática. Por otra parte, analizadas las observaciones de clases y de acuerdo a los tipos de competencias pretendidas, se verificó un mejoramiento cuantitativo y cualitativo de las competencias de los profesores. Las diferencias encontradas dan cuenta, mayoritariamente, del mejoramiento de tres competencias especializadas: capacidad para utilizar diversas estrategias de enseñanza, habilidad para favorecer el aprendizaje por resolución de problemas en matemática y capacidad para utilizar formas actualizadas en evaluación.

Con respecto a la resolución de problemas, los profesores evidenciaron la habilidad, llevando al aula situaciones cotidianas que suponían desafíos matemáticos atractivos y utilizando variados recursos y materiales didácticos que fueron manipulados por los estudiantes en los centros escolares y que les permitió construir su razonamiento matemático a medida que iban abordando los contenidos matemáticos. Por otra parte, se evidenció la capacidad para utilizar formas actualizadas en evaluación a través de las distintas y constantes evaluaciones que construyeron y aplicaron en su centro escolar, y que se constituyeron en una vía de retroalimentación del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, pues mediante ella compararon los resultados del trabajo como educadores con los objetivos propuestos, lo cual les permitió determinar la eficiencia del proceso y, consecuentemente, reorientar su trabajo sobre los objetivos o sobre parte de ellos, con todos o con algunos alumnos, al mismo tiempo que pudieron comprobar si los métodos empleados fueron efectivos o no.

En lo relativo a las competencias generales, se constató un incremento importante en la habilidad para aplicar conocimientos disciplinarios, relativas al saber hacer didáctico de lo pedagógico y del saber hacer de la enseñanza-aprendizaje. Esto ayudó a darle sentido de pertinencia al aprendizaje de la disciplina a través del contenido escolar, facilitando el proceso de desmontaje de concepciones previas o concepciones alternativas que se evidenciaron en el pre test. Se evidenció la capacidad de trabajo colaborativo y en equipo en el quehacer profesional, que les permitió la reflexión conjunta, la discusión, la identificación de problemas, la experimentación de alternativas de solución, y la evaluación de las mismas.

A continuación, se presenta un ejemplo de respuesta en el pre test de competencias profesionales.



Unidad 1: Polígonos: son figuras geométricas cerradas. - Circunferencia: es un ángulo completo de 360° , área: es lo que hay o queda dentro de un perímetro. - Perímetro: son los lados de una figura cualquiera. -

Unidad 2:
 Relaciones proporcionales: es repartir en cantidades que no son conocidas: es decir hay una niña en el curso por cada 2 varones me das 1 chocolate y te pago \$10. -

Unidad 3:
 Aplicar valores a las letras y despejar sus valores correspondientes; despejar una incógnita de un valor determinado.

Unidad 4:
 Es encontrar un producto en dos números llamados Base y exponente, es decir multiplicar la base tantas veces como indica el exponente 5^6 . -

Unidad 5:
 Es la capacidad que hay en una figura determinada. Una sola ¿cuántas demás pueden entrar?

2) Encontrando los términos más adecuados y aplicarlos a elementos cotidianos de la vida real.

3) Encontrar el perímetro de una sala., medir patio de la esc y calcular área y perímetro etc.
 Se lleva a la práctica con elementos reales.

Figura 5- Protocolo escrito de un profesor en el pre test de competencias profesionales

Fuente: Desarrollado por los autores

A través de las exposiciones de los profesores y los registros de observaciones de clases, se pudo constatar que la mayoría de ellos logró comprender que el fundamento de las Matemáticas en Educación Primaria es eminentemente experiencial y los contenidos de aprendizaje los abordaron a partir de la manipulación de materiales para la generación de ideas matemáticas, tales como propiedades, relaciones, conceptos, procedimientos. Utilizaron, como elementos motivadores para la adquisición del conocimiento matemático y el desarrollo del pensamiento lógico, los desafíos matemáticos y la pregunta – entendida como ejemplo y contraejemplo – logrando con ello favorecer en los estudiantes la investigación y la expresión

oral de sus razonamientos con un lenguaje matemático correcto, que, por su precisión y terminología, tiene que ser diferente a su lenguaje habitual.

5 Interpretación de resultados y conclusiones

El presente trabajo ha utilizado un modelo de capacitación que da cuenta de sus logros, que se enfoca en la práctica, y que ha dado lugar a que el discurso teórico se implemente en la sala de clases. Los resultados obtenidos cubrieron varios métodos y estrategias, que fueron usadas anteriormente en proyectos similares, pero en otro nivel de estudio y que también tuvieron éxito, tales como la continua retroalimentación, el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas, el cubrir los dominios del apoyo pedagógico y la organización de la clase (DÍAZ; POBLETE, 2007, 2009a, 2009b).

La forma intensiva y presencial de capacitación permitió cumplir con las expectativas para facilitar tanto el trabajo colaborativo como el aprendizaje constructivista. En base a la TAD, se puso en juego la intención educadora a través de una metodología que permitió la comprensión del saber matemático, de allí la necesidad de determinar la propuesta educativa desde lo curricular. Del mismo modo, las actividades que se propusieron sirvieron para aclarar lo que ya había sido aprendido y para promover el uso y la integración de los conocimientos que, a su vez, fueron traspasados al aula. Cabe destacar que, de acuerdo a esta teoría, las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico o saber hacer formado por los tipos de actividades (tareas) y las técnicas y un bloque teórico o saber formado por el discurso tecnológico-teórico que justifica la práctica.

Por otra parte, la implementación de una metodología basada en la resolución de tipos de problemas, ejercicios y tipos de competencias matemáticas, aseguraron un incremento importante en la competencia profesional de los profesores pertenecientes a escuelas que concentran una mayor población vulnerable. La meta cognición jugó un papel importante en la resolución de cada problema en matemática, de tal modo que el éxito, en general, se debió a la organización de las operaciones matemáticas, además de la elección del método más eficaz para analizar, comprender el punto del problema y controlar las operaciones realizadas. Sin embargo, no es suficiente saber qué hacer. Es necesario conocer cuando aplicar estrategias similares.

Progresar desde unas organizaciones matemáticas puntuales, característica en la actualidad de la enseñanza primaria, hacia organizaciones matemáticas locales, relativamente completas en el sentido en que se abarcaron tipos de tareas más integradas, con uso de

diferentes técnicas y potenciando la habilidad de resolución de problemas ayudó, sin duda, a actualizar saberes matemáticos y didácticos y por ende, mejorar las competencias de los profesores de matemática, con la utilización de un Modelo de Competencias Profesionales en Matemática (MCPM).

Una de las implicaciones políticas de los resultados de este proyecto de investigación y desarrollo podría ser que las capacitaciones en matemáticas deben ser intensivas, presenciales y con acompañamiento al aula. Debemos reconocer que este tipo de perfeccionamiento es más oneroso, pero nos atrevemos a garantizar que tendrá muchos mejores créditos en cuanto al aprendizaje de los estudiantes y la instalación de competencias docentes.

Referencias

- ABRANTES, P. Mathematical competence for all: options, implications and obstacles. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 47, n. 2, p. 125-143, jul. 2001.
- AGUIRRE, M.; CASTRO, M.; CARREÑO, A. Factores que inciden en el rendimiento escolar en Chile. **Estudios de Economía Regional**, Talca, CEOC: Universidad de Talca, 2009.
- AVALOS, B. El desarrollo profesional continuo de los docentes: lo que nos dice la experiencia internacional y de la región latinoamericana. **Pensamiento Educativo**, Santiago, v. 41, n. 2, p. 77-99, 2007.
- AYLWIN, P.; PEÑA, P. La certificación de los conocimientos disciplinarios y pedagógicos de los egresados de las carreras de pedagogía: elementos para su contextualización. **Pensamiento Educativo**, Santiago, v. 41, n. 2, p. 13-35, 2007.
- BLANCO, L. J. Problem solving and the initial practical and theoretical education of teachers in Spain. **Mathematics Teacher Education and Development**, Melbourne, v. 6, p. 37-48, 2004.
- BLANCO, L. J.; GUERRERO, E.; CABALLERO, A.; BRÍGIDO, M.; MELLADO, V. The affective dimension of learning and teaching mathematics and science. In: CALTONE, M. P. (Ed.), **Handbook of Lifelong Learning Developments**. EE.UU: Nova Science Publishers Hardcover, 2010. p. 265-287.
- BLANCO, L. J.; GUERRERO, E.; CABALLERO, A. Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. **The Mathematics Enthusiast**, Berkeley, v. 10, n. 1-2, p. 335-364, 2013.
- CASASSUS, J. **La Escuela y la (des)igualdad**. Santiago: Chile, LOM, 2003.
- CASTRO, E. Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. In: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 12., 2008, Badajoz. **Actas...** Badajoz: España, 2008. p. 113-140.
- CLIMENT, N.; ROMERO-CORTÉS, J. M.; CARRILLO, J.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C.; CONTRERAS, L. ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula?. **Revista Latinoamericana en Matemática Educativa**, México, v. 16, n. 1, p.13-36, 2013.

CÓRCOLES, A. C.; VALLS, J. Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. **Zetetiké**, Campinas, v. 14, n. 25, p. 7-28, 2006.

CORICA, A. R.; MARÍN, E. A. Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría. **Números**, La Laguna (Tenerife), v. 85, p. 91-114, 2014.

Common core state standards initiative-ccssi. 2010. Available at: <http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math_Standards.pdf>. Accessed on: 3 jan. 2014.

Common core state standards initiative- CCSSI. **Common Core State Standards Initiative**. 2014. Available at: <http://www.corestandards.org/wpcontent/uploads/Math_Standards.pdf>. Accessed on: 5 apr. 2014.

CHEVALLARD, Y. La Transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. **Revue Francaise de Pédagogie**, Paris, v. 76, n. 1, p. 89-91, 1986.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder**. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 2009a. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_1_EE_2009-2.pdf>. Accès en: 19 nov. 2012.

CHEVALLARD, Y. **La notion de PER: problèmes et avancées**. 2009b. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER__problemes_et_avancees.pdf>. Accès en: 22 nov. 2012.

DARLING-HAMMOND, L. Constructing Twenty-first Century Teacher Education. **Journal of Teacher Education**, Pennsylvania, USA, v. 57, n. 3, p. 300-314, may./june. 2006.

DARLING-HAMMOND, L.; CHING, R.; JOHNSON, C. M. Teacher preparation and teacher learning: a changing policy landscape. In: SYKES, G.; SCHNEIDER, B.; PLANK, D. (Ed.) **Handbook of Education Policy Research**, New York, AERA, 2009.

DÍAZ, V.; POBLETE, A. **Evaluación longitudinal de aprendizajes matemáticos, objetivos transversales e indicadores de contexto**. Investigación de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONICYT. Proyecto Fondecyt 1040035. Santiago: Chile, 2007a.

DÍAZ, V.; POBLETE, A. Competencias en profesores de matemática y estrategia didáctica en contextos de reforma educativa. **Números**, La Laguna (Tenerife), 2007b. Disponible en: <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/68/investigacion_01.pdf>. Acceso en: 20 dic. 2012.

DÍAZ, V.; POBLETE, A. Competencias y transposición didáctica: binomio para un efectivo perfeccionamiento en matemática. **Revista de Investigación y Postgrado**, Caracas, v. 24 n. 2, p. 77-107, 2009a.

DÍAZ, V.; POBLETE, A. Perfeccionamiento en matemática basado en competencias para docentes de escuelas básicas municipalizadas de la Región de Los Lagos y de Los Ríos. **Estudios Pedagógicos**, Valdivia, v. 35 n. 2, p. 13-34, 2009b.

DÍAZ, V.; POBLETE, A. Resolución de problemas en matemática y su integración con la enseñanza de valores éticos: el caso de Chile. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 45, p. 117-141, 2013.

- ESPINOZA, L.; BARBÉ, J.; GALVEZ, G. Limitaciones en el desarrollo de la actividad matemática en la escuela básica: el caso de la aritmética escolar. **Estudios Pedagógicos**, Valdivia, v. 37, n. 1, p.105-125, 2011.
- FONT, V. Processos mentals versus competència. **Biaix**, Barcelona, v. 18, p. 33-36, 2001.
- GASCÓN, J. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 18 (1), n. 52, p. 7-33, 1998.
- GASCÓN, J. ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 31, n. 1, p. 9-50, 2011.
- GODINO, J. D. Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen?. **UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, v. 29, p. 9-19, 2002.
- GONZÁLEZ, J.; WAGENAAR, R. G. **Tuning Educational Structures in Europe**. Final Report. Phase One. Bilbao: Universidad de Deusto, 2003.
- GUSMÃO, T. C.; CAJARAVILLE, J. A.; FONT, V.; GODINO, J. El Caso Víctor: dificultades metacognitivas en la resolución de problema. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 255-275, abr. 2014
- HALMOS, P. The heart of mathematics. **American Mathematical Monthly**. v. 87, p. 519-524, 1980.
- HERNÁNDEZ, J.; PALAREA, M. M.; SOCAS, M. M. Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. El papel de los materiales didácticos. In: SOCAS, M.; CAMACHO, M.; MORALES, A. **Formación del profesorado e investigación en educación matemática III**. Tenerife. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna, 2001. p. 115-125.
- KLOOSTERMAN, P. Beliefs about Mathematics and Mathematics Learning in the Secondary School: Measurement and Implications for Motivation. In: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Ed.). **Beliefs: a Hidden Variable in Mathematics Education?** Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 2002. p. 247-270.
- KUZNIAK, A.; PARZYSZ, B.; VIVIER, L. Trajectory of a problem: a study in Teacher Training. **The Mathematics Enthusiast**, Berkeley, v. 10, n. 1-2, p. 407-440, 2013.
- LAVE, J.; WENGER, E. **Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation**. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- MAYER, R. E. Mathematical problem solving, In: ROYER, J. M. (Ed.), **Mathematical Cognition**. Greenwich: Info Age Publishing, p. 69-92. 2003.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL - MEN. **Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas**. Bogotá: Colombia, 2006.
- MINEDUC. Ministerio de Educación. **Fundamentos Bases Curriculares 2013. Matemática**. Santiago: Ministerio de Educación, 2013.
- MONTAGUE, M. Math problem solving for middle school students with disabilities, Research report of the Access Centre: **Improving outcomes for All Students K-8**. 2006. Available at: <<http://www.k8accesscenter.org/default.asp>>. Accessed on: 26 oct. 2012.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principios y Estándares para la Educación Matemática**. España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Standards Secondary Mathematics Teachers**. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

NATIONAL GOVERNORS ASSOCIATION - NGA.; CCSSO. **Common Core State Standards for Mathematics**. Washington: National Governors Association and Council of Chief State School Officers, 2010.

NISS, M. **Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project**. Roskilde: Roskilde University, 2002.

ORGANIZATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OCDE. **Marcos teóricos de PISA 2003**. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. Paris: OCDE, 2003.

ORGANIZATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OCDE. **La Definición y Selección de Competencias Claves. Resumen ejecutivo**. Paris: OCDE, 2005. Disponible en: <www.deseco.admin.ch>. Acceso en: 12 oct. 2012.

ORGANIZATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OCDE. **PISA 2006: Science competencies for tomorrow's world**. v. 1, Paris: OCDE, 2007.

ORGANIZATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OCDE. **PISA 2009 Results: Learning Trends: Changes in Student Performance Since 2000**. v. 5, Paris: OCDE, 2009.

OFFICE FOR STANDARDS IN EDUCATION - OFSTED. **Mathematics: Made to Measure**. London: Ofsted, 2012.

PARVANEHNEZHAD, Z.; CLARKSON, P. C. Iranian bilingual students' use of language switching when solving mathematical problems. **Mathematics Education Research Journal**, Canberra, v. 20 n. 1, p. 51-80, apr. 2008.

PERRENOUD, P. **Construire des compétentes des l'école**. Ginebra: ESF, 1998.

PERRENOUD, P. **Diez nuevas competencias para enseñar. Invitación al viaje**. Barcelona: Graó, 2004.

PINO, J.; BLANCO, L.J. Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. **Publicaciones**, Melilla, v. 38, p. 63-88, 2008.

POBLETE, A.; DÍAZ, V. **Evaluación de las competencias profesionales del profesor de matemáticas en el marco de la reforma educacional**. Investigación de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONICYT. Proyecto Fondecyt 1010980. Santiago: Chile, 2004.

QUALIFICATIONS AND CURRICULUM AUTHORITY - QCA. **National Curriculum for England 2008**. London: The Stationery Office, 2008.

RACZYNSKI, D.; MUÑOZ, G. **Factores que desafían los buenos resultados educativos de escuelas en sectores de pobreza en Chile**. Informe Final de Consultoría para el Ministerio de Educación, Asesorías para el Desarrollo. Santiago: Chile, 2004.

RICO, L.; LUPIÁÑEZ, J. L. **Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular**. Madrid: Alianza Editorial, 2008.

ROCARD, M. **Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe**. Brussels: **European Commission** (Technical Report No. EUR22845), 2007. Available at: <http://ec.europa.eu/research/scienc society/document_library/pdf_06/report-rocardon-science_education_en.pdf>. Accessed on: 15 jan. 2013

RYCHEN, D. S.; SALGANIK, L. H. (Ed.) **Las competencias clave para el bienestar personal, social y económico**. Aljibe, Málaga: Archidona, 2006.

SAJADI, M.; AMIRIPOUR, P.; ROSTAMY-MALKHALIFEH, M. The Examining Mathematical Word Problems Solving Ability under Efficient Representation Aspect. **Mathematics Education Trends and Research**, 2013 , p. 1-11. Available at: < <http:// dx.doi.org/10.5899/2013/metr-00007>>. Accessed on: 22 jan. 2013.

SANTOS, M. **La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos**. México: Trillas, 2007.

STEEN, L. A. The science of patterns. **Science**, v. 240, p. 611-616, 1988.

SCHOENFELD, A. H. Problem Solving in The United States, 1970-2008: Research and Theory, Practice and Politics. In: TÖRNER, G.; SCHOENFELD, A. H.; REISS, K. (Ed.), Problem solving around the world – Summing up the state of the art. Hamburg: Special issue of the **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik** Issue 1, 2008. 537-551.

SCHOENFELD, A. H. **How we think: A theory of human decision-making with educational applications**. New York: Routledge, 2010.

SCHOENFELD, A. Reflections on Problem Solving Theory and Practice. **The Mathematics Enthusiast**. Berkeley, v. 10, n. 1-2, p. 9-34, 2013.

SKAALVIK, E. M.; SKAALVIK, S. Self-concept and self-efficacy in Mathematics: relation with Mathematics motivation and achievement. In: RUSSO, B. L. (Ed.). **Encyclopedia of Teaching and Teacher Research**. New York: Nova Science Publishers, 2011, p. 67-90.

SOH, C. K. An overview of mathematics education in Singapore. In: USISKIN, Z.; WILLMORE, E. (Ed.). **Mathematics Curriculum in Pacific Rim Countries**. Mississippi: Information Age Publishing, 2008. p. 23-36.

SOLAR, H.; ESPINOZA, L.; ROJAS, F.; ORTIZ, A.; GONZÁLEZ, E.; ULLOA, R. **Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM)**. Proyecto FONIDE N° 511091. Santiago: Chile, 2011.

UNESCO. **Informe Regional sobre la Educación para todos en América Latina y el Caribe**. 2012. Disponible en: < <http://www.orealc.unesco.org>>. Acceso en: 20 abr. 2013.

UNESCO-CEPAL. **Situación Educativa de América Latina y el Caribe. Hacia una Educación para Todos 2015**. 2013. Disponible en: <<http://www.orealc.unesco.org>>. Acceso en: 16 abr. 2014.

**Submetido em Outubro de 2014.
Aprovado em Abril de 2015.**