

A Aprendizagem dos Números Racionais com Compreensão Envolvendo um Processo de Modelação Emergente

Learning Rational Numbers with Understanding through an Emergent Modeling Process

Helena Gil Guerreiro*

Maria de Lurdes Serrazina**

Resumo

O estudo que se apresenta neste artigo foca-se no papel que as representações assumem à medida que são usadas e transformadas como modelos de situações contextualizadas e vão evoluindo para modelos de raciocínio, por alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico (dos 8 aos 10 anos). Remete para uma aprendizagem dos números racionais com compreensão, enquadrada numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. É apresentada uma trajetória de aprendizagem que privilegia inicialmente a compreensão da percentagem e são analisadas quatro tarefas de uma experiência de ensino, que segue os procedimentos metodológicos de uma Investigação Baseada em Design. Os dados foram recolhidos através da observação participante, apoiada num diário de bordo, gravações áudio e vídeo das aulas e produções dos alunos. A análise evidencia que a construção comparticipada de modelos a partir de representações, inicialmente associadas à percentagem, fortalece a interpretação de relações e facilita a compreensão de conceitos relativos aos números racionais.

Palavras-chave: Números Racionais. Sentido de Número. Representações. Modelação Emergente.

Abstract

The study presented in this paper focus on the role that representations assume as they are taken as models of a contextualized situation and reconstructed as models for reasoning, by primary school students (aged 8 to 10 years old). It regards rational numbers learning with an understanding framed by the development of a number sense perspective. Considering a learning trajectory that emphasizes initially the understanding of percentage, we analyzed four tasks of a teaching experiment that was developed, following the methodological procedures of a Design Based Research. Data were collected through participant observation, supported in a logbook, audio and video recorded lessons and students' productions at the classroom. The analysis highlights that the social construction of models from representations, initially associated with percentage, strengthens the interpretation of relations and facilitates the understanding of concepts related to rational numbers.

Keywords: Rational Numbers. Number Sense. Representations. Emergent Modeling.

* Doutoranda em Educação Matemática no Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. Professora no Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire, Pontinha, Lisboa, Portugal. Membro colaborador da Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Alameda da Universidade 1649-013 Lisboa, Portugal. *E-mail:* hg@campus.ul.pt.

** Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Londres (UK). Professora Coordenadora Aposentada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal. Membro integrado da Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação (UIDEF), do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal. Endereço para correspondência: Campus de Benfica do IPL, 1549-003, Lisboa, Portugal. *E-mail:* lurdess@eselx.ipl.pt.

1 Introdução

Os números racionais¹ constituem um dos temas matemáticos mais complexos e mais importantes com que os alunos se deparam ao longo do ensino básico (BEHR; LESH; POST; SILVER, 1983). A investigação em torno da aprendizagem destes números aponta que os alunos revelam dificuldade na compreensão da rede de conceitos que o estudo destes números envolve (BEHR et al., 1983; LAMON, 2006; MONTEIRO; PINTO, 2005; VAMVAKOUSSI; DOOREN; VERSCHAFFEL, 2012), o que torna este tópico desafiante do ponto de vista do desenvolvimento curricular.

Neste estudo, pretendemos analisar um percurso que se foca na compreensão dos conceitos em detrimento da tendência de sobrevalorizar um ensino centrado na mecanização de procedimentos e regras (FOSNOT; DOLK, 2002; MOSS; CASE, 1999). Este percurso segue uma trajetória de aprendizagem, inspirada em Moss e Case (1999), considerada pouco comum no 1.º ciclo do Ensino Básico, em que é inicialmente privilegiado um trabalho com a percentagem, num significado de medida. O processo de representação reveste-se de especial importância neste estudo, uma vez que a utilização por parte dos alunos de variados tipos de representação e a flexibilidade com que os usam é um aspeto determinante para alcançar um conhecimento mais profundo na aprendizagem da Matemática (PONTE; SERRAZINA, 2000; TRIPATHI, 2008).

A investigação em curso, em que se baseia este artigo, tem como objetivo perceber como se pode construir uma aprendizagem com compreensão dos números racionais. Neste artigo, pretendemos compreender o papel que as representações assumem à medida que são usadas e transformadas como modelos de situações contextualizadas, por alunos do 1.º ciclo, e vão evoluindo para modelos de raciocínio. Focamos o olhar em quatro tarefas de uma experiência de ensino numa trajetória de aprendizagem, alicerçada no desenvolvimento do sentido de número, que privilegia inicialmente a percentagem, tirando partido das representações icônicas e dos contextos realistas que lhe estão associados.

2 A aprendizagem dos números racionais com compreensão

O desenvolvimento do sentido de número racional. Uma aprendizagem efetiva da matemática envolve compreensão conceptual, isto é, de acordo com o NCTM (2014) “a

¹ O termo números racionais, usado neste texto, diz respeito ao conjunto dos números racionais não negativos.

compreensão e articulação de conceitos, operações e relações” (p. 7), que permite a construção de um repertório de estratégias e representações negociadas, bem como chegar à fluência na realização de procedimentos na resolução de problemas. Esta compreensão conceptual está estreitamente relacionada com o sentido de número, na medida em que este diz respeito ao conhecimento geral acerca dos números e das operações, bem como a capacidade e propensão para usar esse conhecimento de forma flexível na construção de raciocínios matemáticos e no desenvolvimento de estratégias (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Sem que haja uma definição única para sentido de número, que apresente objetivamente todas as suas características, podemos afirmar que é um constructo com uma natureza intuitiva, que cada um desenvolve gradualmente como resultado de explorar os números, visualizá-los em vários contextos e de os relacionar, estabelecendo conexões com os conhecimentos que já possui (HOWDEN, 1989; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992).

Espera-se assim que “o currículo de Matemática tenha em conta esta perspectiva de pensar os números e operações em termos de sentido de número” (BROCARDO; SERRAZINA, 2008, p. 101), inicialmente com os números inteiros, mas também depois, com os números racionais. Segundo alguns autores, o estudo dos números racionais tem associada uma mudança conceptual e importa ter presente que as experiências que os alunos vivenciaram anteriormente podem condicionar essa aprendizagem, limitando ou favorecendo essa mudança. (VAMVAKOUSSI et al., 2012). A complexidade do trabalho com este conjunto numérico deve-se ainda à multiplicidade de interpretações que os números racionais podem convocar em cada situação, os chamados subconstructos, como parte-todo, operador, quociente, medida e razão (BEHR et al., 1983; NCTM, 2010). Estes subconstructos apoiam-se em relações e significados, que variam de acordo com os contextos, sendo o seu sentido determinado em função da unidade definida, componentes fundamentais do sentido de número.

O papel da percentagem. Alguns estudos (HUNTER; ANTHONY, 2003; MOSS; CASE, 1999) evidenciam que os alunos podem desenvolver uma efetiva compreensão dos números racionais quando a sua aprendizagem envolve o estudo da percentagem, nas primeiras etapas do trabalho com este conjunto numérico. Esta abordagem permite valorizar as estratégias de resoluções espontâneas dos alunos, maximizando os conhecimentos intuitivos em relação à proporção e aos números inteiros de 1 a 100. A percentagem está presente na linguagem do quotidiano, estando a sua utilização generalizada aos mais diversos contextos da sociedade. A sua ligação aos contextos do dia a dia, familiares aos alunos é uma das razões que Moss e Case (1999) apontam para a sua introdução nesta fase da escolaridade.

A simplicidade da sua representação faz com que seja de utilização corrente, mas é também esta simplicidade que a torna, segundo Parker e Leinhardt (1995), um conceito de aprendizagem complexa. Deste modo, numa introdução à noção de percentagem no 1.º ciclo do Ensino Básico há aspetos que devem ser tidos em conta, a começar pela própria palavra, percentagem, um conceito social com diversas interpretações. Um exemplo disso é o facto da linguagem que normalmente surge associada à percentagem ser aparentemente aditiva. Expressões como *custa menos 20%* escondem a sua natureza multiplicativa. Parker e Leinhardt (1995) referem ser importante ter em conta, mesmo numa fase inicial de trabalho, que a percentagem “é uma linguagem de proporção privilegiada que simplifica e condensa descrições de comparações multiplicativas” (p. 472). Os mesmos autores referem que para evitar que se torne ambíguo, o trabalho com a percentagem não pode remeter-se apenas para o significado parte-todo, uma vez que esta é um constructo com propriedades de número, de parte-todo e de razão. Importa assim perceber a relação que traduz entre quantidades e as comparações proporcionais que oferece, muitas vezes escondidas atrás da notação, mas que a torna uma ideia potente² para uma aprendizagem dos números racionais com compreensão, no 1º ciclo do Ensino Básico.

Múltiplas representações na construção de modelos. As representações assumem um papel primordial na compreensão conceptual (NCTM, 2014). A multiplicidade de representações é justificada pela ideia de que “diferentes representações matemáticas de um conceito destacam diferentes aspetos da sua estrutura, que se complementam no sentido da compreensão desse mesmo conceito” (TRIPATHI, 2008, p. 438). Por esta razão, os alunos precisam desenvolver um bom “repertório de representações” (PONTE; SERRAZINA, 2000, p. 45), representações, ativas, icônicas, simbólicas (BRUNER, 1962), e linguagem oral e escrita (PONTE; SERRAZINA, 2000), mais ou menos convencionais, com as quais “se sintam confiantes a trabalhar” (p. 45). Contudo, Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) salientam que nem todos os alunos estão aptos ao mesmo tempo para trabalhar com a mesma representação, o que reforça a necessidade de se discutirem diversos processos de exploração de uma mesma tarefa, de modo que os alunos possam, progressivamente, ir associando os novos conhecimentos a representações diversificadas.

A corrente de investigação holandesa (GALEN; FEIJS; FIGUEIREDO; GRAVEMEIJER; HERPEN; KEIJZER, 2008; GRAVEMEIJER, 2005) fala em modelos e associa o processo de modelação à atividade que os alunos desenvolvem quando usam e

² Entende-se por potente o ser adequada, eficaz e acessível.

transformam representações para chegar à solução de um problema. Esta atividade implica uma evolução do próprio modelo, como afirmam Galen et al. (2008) “de modelos de situações concretas para modelos de pensamento” (p. 18), num processo com uma dupla implicação, que se traduz na ideia de modelação emergente (GRAVEMEIJER, 2005). Este processo considera por um lado “o processo através do qual o modelo emerge” (p. 3) e por outro, “o processo através do qual os modelos fazem emergir um conhecimento matemático mais formal” (p. 3). Progressivamente, o modelo vai deixando a função de representar um problema contextualizado (*modelo de*) para se ir assumindo como a base do raciocínio matemático (*modelo para*). Um modelo é assim interpretado como uma construção gradual que resulta da atividade do aluno sobre uma representação, apoiando a construção de relações e constituindo a base do seu raciocínio matemático.

Apoiado em representações e tendo em vista a modelação de situações associadas à noção de percentagem, Moss e Case (1999) constroem um modelo conceptual, que remete para o uso de recipientes e imagens, a que se vão associando procedimentos de cálculo, que se constroem com sentido. Do mesmo modo, Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) apresenta o modelo da barra, como um modelo para pensar. Esta barra é convocada na passagem da utilização de representações ativas, tiras de papel associadas a um dado contexto, para uma outra representação, icônica não implicada diretamente num contexto. Brocardo (2010), convocando o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), sugere o recurso a contextos que envolvam o uso da barra retangular e da reta numérica, considerando que estas representações se podem constituir como modelos, uma vez que permitem interpretar relações complexas, nomeadamente de proporcionalidade, com significado. Assim, as tarefas e os contextos devem ser pensados, como refere Wood (1999), de modo a proporcionarem momentos em que se espera que os alunos “participem, examinem, critiquem, e validem o seu conhecimento matemático através de um discurso pensado” (p. 188), isto é, possam, progressivamente, ir desenvolvendo também a sua capacidade de raciocínio. Segundo a autora, a apresentação de argumentos, com justificação e validação no grupo, são precursores de um raciocínio mais formal, que se pretende que os alunos venham a desenvolver ao longo da sua escolaridade.

A inter-relação entre estes elementos teóricos permite-nos considerar que a aprendizagem dos números racionais com compreensão pode desenvolver-se alicerçada numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Para tal, são convocadas múltiplas representações no processo emergente de construção de modelos para raciocinar matematicamente. A percentagem, pela sua ligação aos contextos do dia a dia e pelas relações

que oferece, faz sentido como representação a privilegiar, numa trajetória de aprendizagem que se desenvolve através de uma aprendizagem participada, apoiada nos conhecimentos prévios dos números que os alunos já possuem, mas desencadeando a necessária mudança conceptual.

3 Metodologia

O estudo que apresentamos neste artigo enquadra-se numa investigação mais alargada, de paradigma interpretativo, que se desenvolve segundo uma abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). A modalidade de investigação escolhida é a Investigação Baseada em Design (ANDERSON; SHATTUCK, 2012; COBB; JACKSON; DUNLAP, 2016; PONTE; CARVALHO; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2016) e apoia-se na construção e implementação de uma experiência de ensino na sala de aula. O carácter cíclico cumulativo e de intervenção de uma investigação desta natureza envolve interpretações da atividade matemática dos alunos e do ambiente de aprendizagem da sala de aula, no sentido da construção de uma teoria local de aprendizagem (GRAVEMEIJER; COBB, 2006).

Conjetura e princípios do design da experiência de ensino. A experiência de ensino implementada é orientada por uma conjetura (CONFREY; LACHANCE, 2000) e apresenta uma dimensão de conteúdo matemático e outra de conteúdo pedagógico. A primeira dimensão incorpora alguns princípios de *design* relacionados com conteúdos e processos matemáticos que se pretende que os alunos aprendam e a segunda dimensão tem por base princípios de *design* que dizem respeito aos meios através dos quais se pretende que os alunos aprendam. De uma forma sucinta, traduzimos a conjetura no seguinte enunciado: *No tópico dos números racionais, um trabalho apoiado numa sequência de tarefas, que privilegia a percentagem e a subsequente inter-relação com as outras representações (decimal e fração), gera aprendizagens neste conjunto numérico, à medida que os alunos participam na atividade social da sala de aula e constroem significados partilhados, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.*

No que diz respeito à dimensão específica do conteúdo matemático, podemos identificar cinco princípios que a sustentam: 1) desenvolver o sentido de número, na construção de relações e conceitos relativos aos números racionais; 2) privilegiar inicialmente

a percentagem, a que se segue o numeral decimal³ e posteriormente a fração, numa articulação entrecruzada entre estas representações; 3) apoiar as estratégias de cálculo na estrutura conceitual dos números inteiros; 4) suportar a construção de modelos nas representações ativas, icônicas, simbólicas e na linguagem oral e escrita, partindo dos conhecimentos intuitivos e informais dos alunos; 5) privilegiar tarefas que envolvam os significados de medida e razão, tendo em vista o desenvolvimento de relações multiplicativas e de capacidades associadas a um raciocínio proporcional. Relativamente à dimensão do conteúdo pedagógico, os princípios associados são cinco e destacam a importância de: 1) escolher contextos significativos e relacionados com as vivências dos alunos; 2) construir tarefas tendo em vista a construção de modelos pelos alunos; 3) implementar as tarefas de acordo com uma abordagem exploratória, valorizando as discussões coletivas; 4) promover a aprendizagem participada, por meio da interação e da negociação de significados e 5) privilegiar a compreensão dos conceitos em detrimento da mecanização de regras e procedimentos.

A trajetória de aprendizagem. A implementação da experiência de ensino acontece numa mesma turma em que a professora titular é também investigadora (primeira autora), ao longo de vinte aulas nos 3.º e 4.º anos, nos anos letivos de 2012/2013 e 2013/2014. A turma, com vinte alunos no 3.º ano e vinte e dois no 4.º, com idades entre os 8 e os 10 anos, provenientes de um meio socioeconómico médio-baixo, integra uma escola pública da Grande Lisboa, em Portugal. Ao longo do seu percurso no 1.º ciclo esteve em vigor o anterior Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), sendo o aproveitamento dos alunos globalmente satisfatório. Os números racionais começaram a ser trabalhados nos dois primeiros anos, tal como sugeria o mesmo Programa (ME, 2007), “com uma abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fração nos casos mais simples” (p. 15).

³ Neste texto designamos por *numeral decimal* a representação de números racionais não negativos, através do sistema decimal, utilizando vírgula.

Nos 3.º e 4.º anos, o seu estudo é aprofundado, seguindo uma trajetória de aprendizagem, que é hipotética, como explica Simon (2005), dado que reúne um conjunto de pressupostos sobre o processo de aprendizagem dos alunos e que têm por base os princípios de *design* anteriormente apresentados. Esta trajetória traduz um percurso do ponto de vista do conteúdo matemático, que pode dividir-se, de forma esquemática (Figura 1), em três etapas, como sugere o estudo de Moss e Case (1999). Embora se apresentem de forma sequenciada, para facilitar a leitura, não pretendem sugerir uma trajetória de aprendizagem linear. A primeira etapa remete para o início do desenvolvimento da compreensão da noção de percentagem. Segue-se-lhe a introdução da representação decimal, fazendo as centésimas decorrer da percentagem, e por último, o trabalho com as frações, como extensão da representação decimal, interrelacionando as diferentes representações entre si.

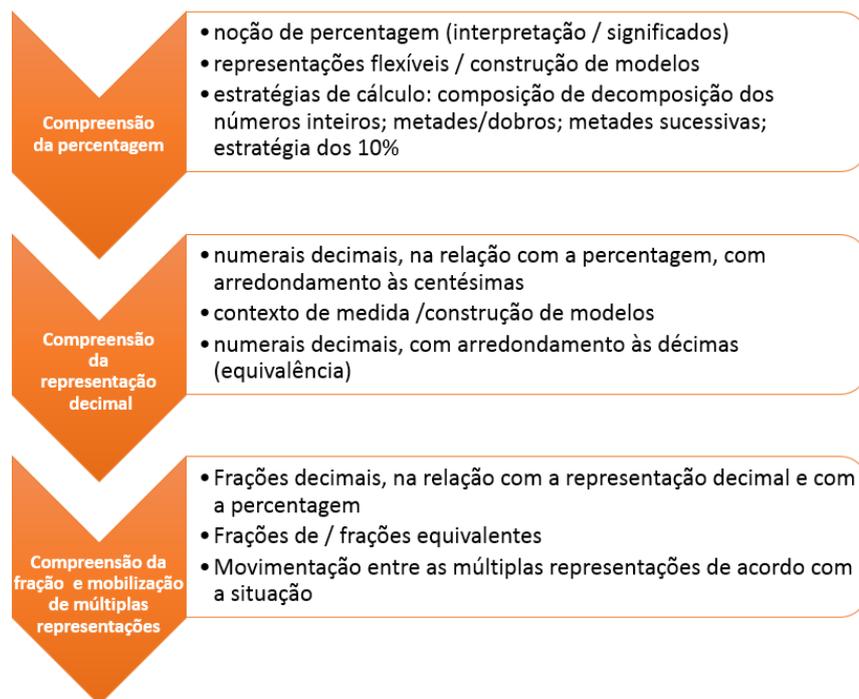


Figura 1 – Esquema da trajetória de aprendizagem do conteúdo matemático.
Fonte: Esquema criado pelas autoras, 2013.

A recolha de dados decorreu no ambiente natural de aprendizagem, a sala de aula. Para acautelar uma excessiva implicação da primeira autora e obter uma descrição o mais fiel e completa possível dos episódios, procuramos uma variedade de procedimentos de recolha de dados (CONFREY; LACHANCE, 2000). Obteve-se o consentimento informado e voluntário dos participantes e foi garantido o anonimato e confidencialidade dos dados (AERA, 2011). Os dados resultam dos registros da observação participante, apoiados pelas gravações de

áudio e vídeo das aulas, do diário de bordo da professora/investigadora, e das produções escritas dos alunos.

O processo de análise, tratando-se de uma investigação baseada em *design*, desenvolveu-se em dois momentos, e envolveu uma análise contínua e reflexiva durante todo o processo investigativo (GRAVEMEIJER; COBB, 2006). Ao longo da preparação e implementação da experiência de ensino na sala de aula decorreu uma análise preliminar, cronológica, que permitiu a emergência de categorias a partir dos dados. Posteriormente à recolha de dados, deu-se início a uma análise retrospectiva, ainda em curso, que implicou voltar a olhar todo o conjunto de dados e dividi-lo em categorias, desta vez baseadas em tipologias predeterminadas geradas a partir do quadro teórico. O cruzamento resultante destas duas dimensões de análise de conteúdo permite explicitar e justificar a interpretação da aprendizagem dos alunos, traduzindo-se em refinamentos da conjectura, no sentido da construção gradual e emergente de uma teoria de aprendizagem local. A análise de dados que trazemos a este artigo remete para quatro tarefas da experiência de ensino, que decorreram na 1.^a e 2.^a etapas da trajetória de aprendizagem, e envolve o estudo da relação entre três categorias: estratégias que suportam o raciocínio; significados do número e relações numéricas e representações na construção de modelos. Embora não sendo consecutivas, as tarefas são apresentadas pela ordem que foram propostas aos alunos.

4 Episódios da experiência de ensino

Tarefa 1. A Tarefa 1 integra a primeira etapa da trajetória de aprendizagem, que diz respeito à Compreensão da Percentagem (Figura 1), e pretende estabelecer conexões entre a percepção natural que os alunos revelam relativamente à proporcionalidade e a sua intuição em relação às percentagens. Esta tarefa envolve a exploração da dinâmica de uma bateria de telemóvel. A imagem dada (Figura 2) pretende apoiar a realização da tarefa enquanto representação icônica.

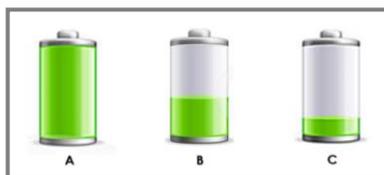


Figura 2 – Imagem do enunciado da Tarefa 1.
Fonte: Tarefa referente à pesquisa, 2013.

Na segunda parte da tarefa é pedido que os alunos identifiquem que percentagem está representada na imagem da bateria C. Alguns alunos sugerem que estão representados 20%, outros 25%. Para justificar a sua opinião, um grupo de alunos que considera representados 25% usa como estratégia o cálculo das metades sucessivas, apoiando-se na representação icônica, como explicita Dina, na discussão em coletivo.

Dina – Eu vi 100 e fiz metade de 100, que deu 50 e depois parecia outra vez metade.
(Fonte: Gravação de vídeo da pesquisa, 2013)

Nesta situação a aluna considera suficiente a resposta com um valor aproximado. No entanto, quando está a comunicar a estratégia do seu grupo à turma, usando como suporte o Quadro Interativo Multimédia (QIM) (Figura 3), a devolução evidencia que embora possa ser uma estratégia multiplicativa potente, não se revela eficaz nesta situação. Quando a aluna marca metade de 50%, obtém uma porção que é maior que zona sombreada na bateria C, chegando assim a um impasse.

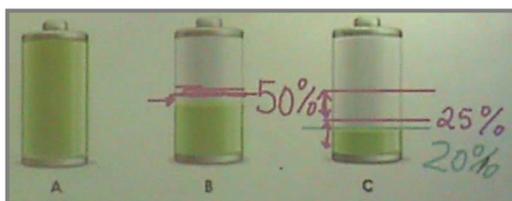


Figura 3 – Registros no QIM no momento de discussão em coletivo da Tarefa 1.
Fonte: Produção da turma referente à pesquisa, 2013.

É a apresentação de uma estratégia alternativa, pelos colegas de outros grupos, que contribui para a construção conjunta de uma solução comum.

Simão – Isso não está a 25 por cento.
Professora – 25 por cento seria a metade da metade. Então quanto é que será que é?
Alunos – 20 por cento.
(Fonte: Gravação de vídeo referente à pesquisa, 2013)

É então sugerido que a zona sombreada seja considerada como parte a iterar, considerando como resultante da divisão do todo em cinco partes iguais.

Professora – Porquê? Marco.
Marco – Porque cabe 5 vezes.
Professora – [considera a medida da parte representada e repete na imagem]
Dinis – Assim já vais no 80 por cento...
Professora – Acham que cada uma destas partes representa 20 por cento?
Alunos – Sim.
Professora – Assim, quanto me falta para ter a bateria cheia? Ana.
Ana – Faltam 80 por cento.
(Fonte: Gravação de vídeo referente à pesquisa, 2013)

O registro da tarefa, na figura 4, permite ilustrar esta estratégia usada pelo grupo de Ana, que passa por verificar quantas vezes a zona sombreada cabe na unidade e chegando à conclusão de cada parte corresponde a 20%.

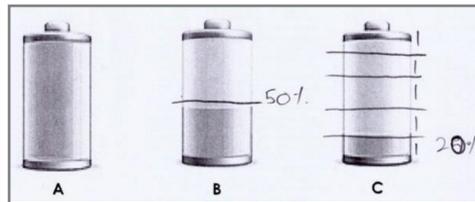


Figura 4 – Registro do grupo de Ana na resolução da Tarefa 1.
Fonte: Produção dos alunos referente à pesquisa, 2013.

Este procedimento traduz uma estratégia multiplicativa, com recurso à divisão. O significado de medida permite-lhes comparar a quantidade considerada em relação ao tamanho da unidade, que seria representada por uma bateria completamente carregada. Os alunos conseguem modelar a situação a partir da representação icônica da bateria, evidenciando a relação entre as duas distâncias, na qual vão incorporando elementos de representação simbólica. A construção de um modelo como estratégia de cálculo, a partir de uma representação com elementos contextuais, acontece em articulação com a experiência do dia a dia, apelando ao sentido de proporcionalidade dos alunos para estimar uma percentagem representada.

Tarefa 2. A Tarefa 2 (Figura 5) também enquadrada na etapa de Compreensão da Percentagem (Figura 1), pretende permitir que a barra de estado, enquanto representação familiar do quotidiano, se venha a constituir como modelo de uma situação real, a gravação de um programa. Esta tarefa convoca ainda o uso de uma outra representação, uma tabela de razão.

Observa a barra. O que está gravado demorou 20 minutos.
Quanto tempo demora a gravar todo o programa? Explica como pensaste.

50%



Completa a tabela e descobre quantos minutos demorou a gravação de cada percentagem do programa.

Percentagem	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Tempo (min)		8			20	24			36	

Figura 5 – Enunciado da Tarefa 2.
Fonte: Tarefa referente à pesquisa, 2013.

Os alunos interpretam a barra de estado com uma simplicidade natural, pois diariamente se deparam com esta representação no Magalhães⁴, quando descarregam programas ou jogos. Nesta tarefa os alunos são mobilizados a estabelecer relações e calcular percentagens de referência. A situação implica que os alunos determinem a parte de um programa gravado, a velocidade constante, sabendo a percentagem e o todo. Contudo, a

⁴ Computador portátil pessoal distribuído aos alunos, até 2011, ao abrigo da Iniciativa Governamental “e-Escolinha”.

interpretação da situação vai além de um significado parte-todo, permitindo uma interpretação, ainda que intuitiva, do significado de razão. Nela estão implicadas quantidades de grandezas de natureza diferente: tempo e quantidade de programa gravado em percentagem, sendo necessário que estabeleçam uma relação de comparação. Embora esteja subjacente uma estrutura multiplicativa, alguns grupos de alunos, nas explicações que apresentam em linguagem escrita, verbalizam a relação de proporcionalidade recorrendo a um sentido aditivo, como é o caso da justificação apresentada no registro de Hélio, que podemos ler na figura 6.

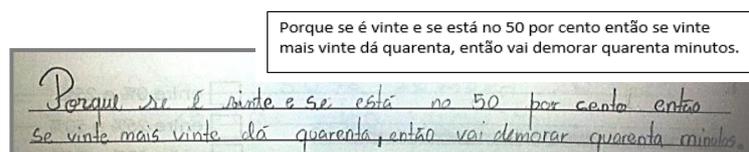


Figura 6 – Justificação Hélio à 1ª pergunta da Tarefa 2.

Fonte: Produção da turma referente à pesquisa, 2013.

Outros alunos conseguem traduzir em linguagem natural uma relação de natureza multiplicativa, que estabelecem apoiada na estratégia das metades/dobros, comparando dois conjuntos de números e mantendo a razão constante, como evidencia o testemunho de Mafalda (Figura 7).

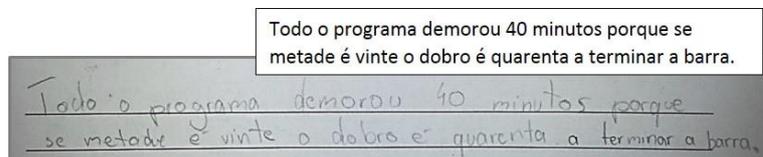


Figura 7 – Justificação de Mafalda à 1ª questão da Tarefa 2.

Fonte: Produção da turma referente à pesquisa, 2013.

Ao justificar, Mafalda parece interpretar a proporção simples entre os quatro valores das quantidades referentes às grandezas envolvidas, apresentando o argumento de que a relação que o tempo que demora a gravar metade do programa corresponde ao tempo que demora a gravar todo o programa, como 50% corresponde a 100%.

Na segunda parte desta tarefa é apresentada uma tabela de razão (Figura 8). Esta representação é escolhida no sentido de tornar explícitas relações de comparação em termos multiplicativos e facilitar o cálculo do tempo de diferentes percentagens do programa gravado.

Percentagem	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Tempo (min)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Figura 8 – Registro do grupo de Clara à 2ª questão da Tarefa 2.

Fonte: Produção da turma referente à pesquisa, 2013.

A tarefa revelou-se desafiante para a turma. O primeiro fato descoberto é a relação com os múltiplos de quatro, uma regularidade sugerida pela tabela. Dinis, por exemplo, verifica que na tabela os minutos vão aumentando “de quatro em quatro” e assim consegue descobrir todas as percentagens relativas à quantidade de programa gravado, recorrendo ao sentido aditivo da multiplicação, sem que explicita a relação entre as duas grandezas:

Dinis – Antes de preencher a tabela eu olhei para os números para ver se os números me davam uma pista e a verdade é que os números me deram uma pista. O 20 e o 24 deram-me uma pista.

Professora – Como assim?

Dinis – Eu vi que o vinte [apontando para 50%] passou para este [apontando para 60%] fazendo mais quatro. . . . É sempre de quatro em quatro.

(Fonte: Gravação de vídeo referente à pesquisa, 2013)

Nesta fase de construção de conceitos, outros alunos, tal como Dinis, também compreendem a existência de uma regularidade, mas não a descobrem a partir da estratégia dos 10%, como seria expectável. Analisam a grandeza tempo, identificando um padrão crescente nos minutos, sem a relacionar com a quantidade de programa gravado. Outros avançam um pouco mais, como o caso de Bruna:

Bruna – Eu fiz assim. Vi que duas vezes 10 não dava quarenta, fiz três vezes dez e também não dava quarenta e vi que quatro vezes dez dava, descobri que era o quatro.

(Fonte: Gravação de vídeo referente à pesquisa, 2013)

Esta aluna percebe a relação entre os dois conjuntos de números e avança na descoberta recorrendo a uma estratégia de tentativa-erro, a fim de encontrar o 10%, tendo presente que para tal, teria que encontrar o número que multiplicado por dez daria 40, que corresponde aos 100%. A apresentação de várias estratégias na discussão coletiva permite que o grupo avance, acontecendo a reformulação de raciocínios, de acordo com o que cada um consegue interpretar nesse momento:

Heitor – O processo era sempre de quatro em quatro minutos.

Simão – 10 por cento são 4, é sempre vezes 4.

Mafalda – O processo todo demorava dez vezes quatro minutos.

Professora – Todo o processo de gravação do programa demorava dez vezes quatro minutos.

Hélio – Podíamos também olhar para 36 minutos e ver qual era o número que dava 40.

(Fonte: Gravação de vídeo referente à pesquisa, 2013)

Neste diálogo, a descoberta das relações numéricas parece apoiada nos conhecimentos que os alunos já têm relativamente às regularidades da tabuada. Podemos ainda constatar que todos os alunos percebem que o número de minutos vai aumentando proporcionalmente em relação à percentagem de programa gravado. Há alunos ainda presos a estruturas aditivas e outros que, gradualmente, de acordo com cada situação, conseguem ir comparando e

compreendendo a noção de porcentagem como parte de um todo que corresponde a 100, recorrendo a estratégias multiplicativas. Enquanto representações privilegiadas nesta tarefa, quer a barra de estado, quer a tabela de razão vão sendo apropriadas como modelos da situação e como estratégias de cálculo, em que apoiam a construção do seu raciocínio. Ambas encorajam a construção de estratégias que se apoiam em relações numéricas e que modelam uma situação real, permitindo evidenciar o seu caráter proporcional. Os alunos efetuam cálculos com os números que lhes permitem perceber que a relação, isto é, a razão, se mantém.

Tarefa 3. A Tarefa 3 surge na sequência de um trabalho de projeto de um grupo de alunos, em Estudo do Meio, sobre *bulldogs* franceses. Do ponto de vista do conteúdo matemático, insere-se na etapa correspondente ao desenvolvimento da Compreensão da Porcentagem (Figura 1), tal como as anteriores. Procura relacionar a massa com a porcentagem relativa à quantidade de ração no saco, numa interpretação da porcentagem como um esquema de comparações, que remetem para a construção, numa etapa inicial, do significado de razão, apelando à intuição relativa à proporção. A imagem dada apresenta uma representação icônica do saco de ração apoiada por duas retas numéricas, representando duas escalas, visível na figura 9, em que o topo do saco representa o saco cheio, com 20 kg de ração, correspondendo essa indicação a 100%. A presença destas duas escalas permite estabelecer relações de comparação, fazendo variar a massa de ração de um saco em função da quantidade de ração que o saco leva, no sentido de induzir a construção de sentido no uso da reta numérica dupla.

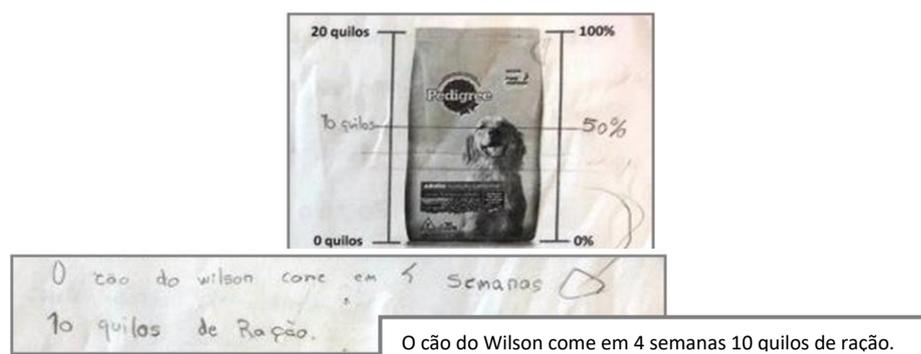


Figura 9 – Registro do grupo de Carolina na resolução da Tarefa 3.

Fonte: Produção da turma referente à pesquisa, 2013.

Todos os grupos calculam os 50% como metade da massa de ração em quilogramas, como sugerido, sem dificuldade. Alguns grupos de alunos usam a representação icônica dada diretamente, como é exemplo a resolução da figura 9, do grupo de Carolina. Outros grupos convocam a imagem de apoio dada, mas reconstróem-na, modelando a situação para apoiar a

construção de relações. Da imagem da figura 10, do grupo de Mafalda, destaca-se a relação entre quantidades, suportada pelas duas retas, que o grupo usa para construir o seu raciocínio. Em cada alínea da tarefa, o grupo recorre à reconceptualização da unidade.

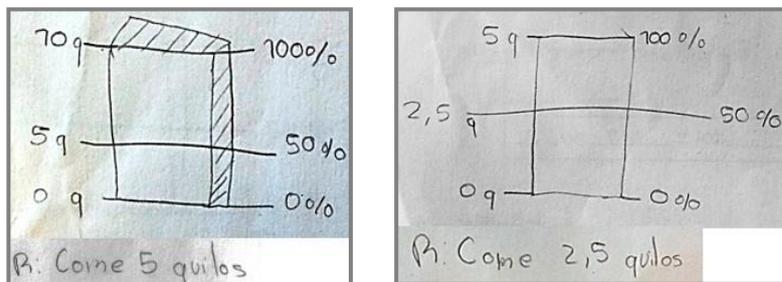


Figura 10 – Registro do grupo de Mafalda na resolução a Tarefa 3 (1.2. e 1.3.).
Fonte: Produção da turma referente à pesquisa, 2013.

Na segunda alínea da tarefa percebe-se que o saco fica apenas com 10 quilogramas. Esses 10 quilogramas passam então a ser considerados como o todo, que identificam como 100% e se 10 quilogramas dão para quatro semanas, acham 50% para determinar a quantidade para duas semanas. E repetem o procedimento para calcular a ração que consome numa semana. Os alunos deste grupo usam a estratégia das metades, mas mobilizam a relação que a percentagem oferece para interpretar a unidade, percebendo que há uma relação entre quantidades que se mantém constante e que as duas vão variando em conjunto. Esta situação envolve uma construção inicial e intuitiva do significado de razão dos números racionais.

Ainda num outro grupo, depois de calculada a percentagem correspondente a 50% e a 25%, os alunos optam por modelar a situação através de uma tabela de razão (Figura 11), que lhes permite interpretar também a relação em função do tempo.

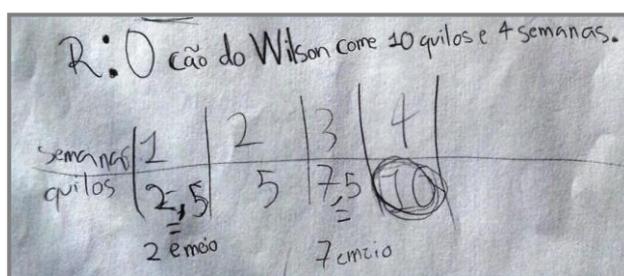


Figura 11 – Registro do grupo de Ana na resolução a Tarefa 3.
Fonte: Produção da turma referente à pesquisa, 2013.

Os alunos convocam uma tabela de razão espontaneamente, atribuindo-lhe significado no contexto da tarefa apresentada. Nesta situação a construção da tabela assume-se como um modelo para raciocinar, tendo sido mobilizado de situações anteriores para suportar um cálculo generalizável, neste caso num novo problema. Note-se que quer as retas numéricas verticais, quer a tabela de razão, são representações que os alunos reconstróem como modelos da situação, em que emergem elementos simbólicos. Ambas permitem que os alunos

estabeleçam relações entre quantidades de grandezas diferentes, comparando-as, permitindo construir significados e evidenciando os cálculos e vão sendo apropriadas como modelos para raciocinar. O numeral decimal surge nesta tarefa de forma natural, sendo por vezes apoiado pelo registro por palavras, como é possível ver na figura 11. Uma vez que a representação decimal não fora trabalhada do ponto de vista formal, há alunos que dominam a sua notação e outros que não, e importa que seja entendida e o seu significado posto em comum, no momento de comunicação à turma.

Tarefa 4. A última tarefa que apresentamos remete já para a segunda etapa da trajetória de aprendizagem (Figura 1), a de Compreensão da Representação Decimal. Esta é uma das tarefas de introdução formal da representação decimal dos números racionais. A articulação com o conhecimento construído relativo à percentagem, como se defende na conjectura do *design*, permite estabelecer conexões entre as duas formas de representação e os modelos a elas associados. A sequência desenvolve-se num contexto real, associado à medição de objetos da sala de aula, que os alunos realizam, recorrendo ao significado de medida dos números racionais. A representação privilegiada é a reta dupla. Os alunos usam conhecimentos prévios relativos aos números naturais para estabelecer relações entre o número e o seu posicionamento em relação a outros números, considerando como unidade de referência 100 centímetros. No sentido da precisão, alguns grupos procuram registar primeiro números de referência. Na figura 12, percebemos que são marcados o 10% e o 20% na reta como forma de facilitar a localização de outros números, neste caso o 9, o 21 e o 27.

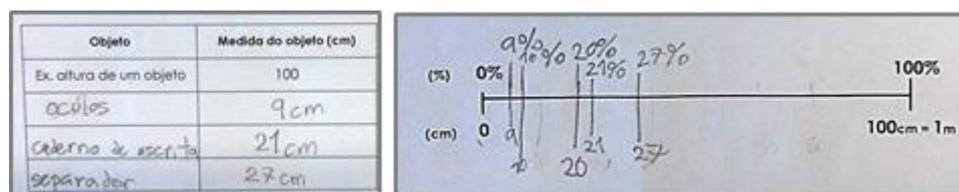


Figura 12 – Registro do grupo de Dina da Tarefa 4.
 Fonte: Produção da turma referente à pesquisa, 2013.

Considerando o fato matemático que integra o repertório partilhado da turma de que um metro é equivalente a cem centímetros, o desafio lançado à turma é de passar para uma reta numérica dupla em que se considera como unidade um metro. Na discussão em coletivo, o primeiro número a marcar é noventa e um centímetros, que corresponde à medida da largura da porta e que tinha sido apontado correspondente 91% da unidade anterior.

Professora – [...] O que representa agora o um?

Dinis – É um metro.

Professora – Vamos considerar que a unidade é um metro e não os cem centímetros. Então vamos agora representar na reta o noventa e um. Esta percentagem corresponde a que parte do metro?

Simão – Não chega a um metro.

(Fonte: Gravação de vídeo referente à pesquisa, 2013)

Nesta etapa é verbalizada uma forma de representar parte do metro, sem recorrer a um submúltiplo, através da interpretação do conceito de centésima, embora no contexto de uma grandeza.

Clara – Tens zero vírgula noventa e um metros.

Professora – Então esta é a sugestão da Clara [escreve na reta 0,91, como se pode ver na figura 13].

Clara – Porque não chega a um metro, portanto zero metros e depois escrevemos noventa e um centímetros.

(Fonte: Gravação de vídeo referente à pesquisa, 2013)

A representação decimal, familiar à maioria dos alunos através da experiência do quotidiano, é neste momento convocada para designar uma quantidade inferior a um. A compreensão da simbologia associada a esta representação apoia-se na tomada de consciência do valor de posição do número, que se constrói com sentido neste contexto de medição de grandezas.



Figura 13 – Captura de *écran* do QIM durante o momento de discussão da Tarefa 4.
Fonte: Produção da turma referente à pesquisa, 2013.

A reta numérica dupla permitiu suportar os raciocínios construídos (Figura 13), constituindo-se como modelo que espelha a estruturação do raciocínio com a grandeza considerada. Traduz uma relação de ordem, sendo que ao mesmo ponto da reta correspondem representações equivalentes, em percentagem e em numeral decimal. O papel da percentagem é aqui importante, pois permite identificar uma posição na reta, remetendo para um todo que corresponde a cem, numa estreita e favorável relação de sinonímia em relação às centésimas, e contribuir para a construção da noção de que qualquer percentagem se consegue transformar, facilmente, num numeral decimal.

5 Considerações finais

As tarefas apresentadas têm em comum o recurso a diferentes representações, ativas, icônicas, simbólicas, bem como a linguagem oral e escrita (PONTE; SERRAZINA, 2000), que são mobilizadas e apropriadas pelos alunos, que as transformam. O recurso a estas

representações parece ter apoiado a construção da aprendizagem dos conceitos associados à compreensão da percentagem, visando uma abordagem inicial, intuitiva e que se pretende adequada a alunos de 1.º ciclo. A imagem de uma bateria de telemóvel, um recipiente do dia a dia, uma barra de estado ou uma tabela de razão são usados pelos alunos e reconstruídos como modelos de situações contextualizadas, para representar conceitos ou relações, que lhes permitem ir atribuindo sentido à percentagem, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número. Estas representações têm por base a visualização, proporcionando a exploração de comparações, tornando visíveis os dois conjuntos de números, as duas quantidades que se comparam, numa construção intuitiva e informal do significado de razão. A imagem da bateria e a barra de estado sustentam a construção da reta dupla como modelo para raciocinar, como refere Gravemeijer (2005), e evidenciam, por exemplo, os quatro números que estão envolvidos numa dada situação, relacionando-os, no que mais tarde no seu processo de aprendizagem, os alunos vão formalizar como proporção.

Verifica-se nestes episódios que os alunos conseguem interpretar constructos do número racional menos habituais nesta etapa da escolaridade, como a medida e a razão, indo ao encontro das ideias de Parker e Leinhardt (1995) no que respeita à necessidade de envolver vários constructos num trabalho inicial com a percentagem, de notar que não se pretende encontrar a representação mais adequada, mas potenciar as vantagens que cada uma traz numa abordagem conjunta da noção de percentagem, contornando as suas limitações. Por outro lado, as representações escolhidas procuram potenciar o conhecimento matemático informal desenvolvido fora da escola.

Os resultados permitem ainda evidenciar que o trabalho com a percentagem pode ser desenvolvido afastado dos procedimentos de cálculo formais, como afirmam Moss e Case (1991), privilegiando-se o desenvolvimento de estratégias de cálculo que coordenam os conhecimentos intuitivos dos alunos com as estratégias que dominam, de manipulação dos números inteiros, como a da composição e decomposição dos números ou a das metades/dobros. A reta numérica dupla assume-se como modelo (e.g., na Tarefa 4) na medida em que fez emergir a representação decimal suportada na representação em percentagem, a partir dos conhecimentos que os alunos possuíam em relação aos números inteiros. Esta situação reforça que a presença de um natural raciocínio intuitivo resultante do trabalho com os números inteiros, como afirmam Vamvakoussi et al. (2012), não tem que ser necessariamente encarada como um aspeto negativo. A mudança conceptual que se constrói, no alargamento a este novo conjunto numérico, é desenvolvida através da negociação de

significados, em interação, permitindo uma coconstrução do que Wood (1999) identifica como sendo produtos sociais, associados a um novo conjunto numérico.

Nesta discussão, procura-se destacar momentos em que a construção da rede de relações e conceitos que a noção de percentagem envolve parece ser acessível, estimulante e potente na aprendizagem com compreensão dos números racionais, para alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico, através de um processo de modelação emergente. Apoiados em representações familiares e contextos realistas, os alunos são encorajados a um pensamento relacional, a partir dos modelos, que remete para um raciocínio multiplicativo (LAMON, 2006), enquanto vão estabelecendo relações de comparação, que integram o reportório partilhado pela turma. Esta abordagem permite que “os alunos possam ir fazendo as primeiras conversões entre diferentes sistemas de representação, de forma direta e intuitiva” (MOSS; CASE, 1999, p. 129), o que contribui para uma construção gradual de uma aprendizagem interrelacionada das diferentes representações simbólicas do número racional.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, no âmbito do Programa de Bolsas de Doutoramento.

Referências

ANDERSON, T.; SHATTUCK, J. Design-based research a decade of progress in education research?. **Educational Researcher**, Washington, v. 41, n. 1, p. 16-25, feb. 2012.

AERA. Code of ethics. **Educational Researcher**, Washington, v. 40, n. 3, p. 145-156, apr. 2011.

BEHR, M. et al. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Ed. Academic Press, 1983. p. 91-126.

BOAVIDA, A. M. et al. **A Experiência Matemática no Ensino Básico**. 1.ª. ed. Lisboa: ME/DGIDC, 2008. 135 p.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **A Investigação Qualitativa em Educação**. 1.ª. ed. Porto: Porto Editora, 1994. 335 p.

BROCARD, J. Trabalhar os números racionais numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. **Educação e Matemática**, Lisboa, v. 109, p. 15-23, set./out. 2010.

BROCARD, J.; SERRAZINA, L. O sentido de número no currículo de Matemática. In: BROCARD, J.; SERRAZINA, L.; ROCHA, I. (Org.). **O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática**. Lisboa: Ed. Escolar, 2008. p. 97-115.

- BRUNER, J. **The process of education**. 1.^a ed. Cambridge: Harvard University Press, 1976. 128 p.
- COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C. Design research: an analysis and critique. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Ed.). **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New York: Ed. Routledge, 2016. p. 481-503.
- COBB, P. et al. Participating in classroom mathematical practices. In: YACKEL, E.; GRAVEMEIJER, K.; SFARD, A. (Ed.). **A Journey in Mathematics Education Research: insights from the work of Paul Cobb**. New York: Ed. Springer, 2001. p. 117-163.
- CONFREY, J.; LACHANCE, A. Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In: KELLY, A.; LESH, R. (Ed.). **Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education**. Mahwah: Ed. Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 231-266.
- FOSNOT, C. T.; DOLK, M. **Young Mathematicians at Work: constructing fractions, decimals and percents**. 1.^a ed. Portsmouth: Heinemann, 2002. 171 p.
- GALEN, F. et al. **Fractions, percentages, decimals and proportions: a learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6**. 1.^a ed. Rotterdam: Sense, 2008. 163 p.
- GRAVEMEIJER, K. What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In: SANTOS, L.; CANAVARRO, A. P.; BROCARD, J. (Ed.). **Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas**. Lisboa: Ed. APM, 2005. p. 83-101.
- GRAVEMEIJER, K.; COBB, P. Design research from a learning design perspective. In: AKKER, J. et al. (Ed.). **Educational Design Research**. New York: Ed. Routledge, 2006. p 17-51.
- HOWDEN, H. Teaching number sense. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. 36, n. 6, p. 6-11, feb. 1989.
- HUNTER, R.; ANTHONY, G. Percentages: a foundation for supporting students' understanding of decimals. In: CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA, 26, 2003, Geelong. **Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Geelong: MERGA, 2003. p. 452-459.
- LAMON, S. J. **Teaching Fractions and Ratios for Understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. 2.^a ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2006. 237 p.
- MCINTOSH, A.; REYS, J.; REYS, E. A proposed framework for examining basic number sense. **For the Learning of Mathematics**, White Rock, v. 12, n. 3, p. 2-8 e 44, nov. 1992.
- MONTEIRO, C.; PINTO, H. A aprendizagem dos números racionais. **Quadrante**, Lisboa, v. 14, n. 1, p. 89-108, jan./jun. 2005.
- MOSS, J.; CASE, R. Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and an experimental curriculum. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 30, n. 2, p. 122-147, mar.1999.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Developing Essential Understanding of Rational Numbers for teaching mathematics in grades 3-5**. 2.^a ed. Reston: NCTM, 2010. 50 p.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles to Actions: ensuring mathematical success for all**. 1.^a ed. Reston: NCTM, 2014. 140 p.

PARKER, M.; LEINHARDT, G. Percent: a privileged proportion. **Review of Educational Research**, Pensilvânia, v. 65, n. 4, p. 421-481, winter. 1995.

PONTE, J. P. et al. Investigação baseada em *design* para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, Lisboa, vol. XXV, n. 2, p. 77-98, 2.º semestre. 2016.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática do 1.º ciclo**. 1.ª ed. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. 257 p.

PORTUGAL. Ministério da Educação. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC, 2007.

SIMON, M. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 26, n. 2, p. 114-145, march. 1995.

TRIPATHI, P. Developing mathematical understanding through multiple representations. **Mathematics Teaching in the Middle School**, Reston, v. 13, n. 8, p. 438-445, april. 2008.

VAMVAKOUSSI, X.; DOOREN, W. V.; VERSCHAFFEL, L. Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. **Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, v. 31, p. 344-355, march. 2012.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The Didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 54, n. 1, p. 9-35, nov. 2003.

WOOD, T. Creating a context for argument in mathematics class. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 30, n. 2, p. 171-191, march. 1999.

**Submetido em Junho de 2016.
Aprovado em Novembro de 2016.**