

Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile

Significados da derivada nos livros didáticos dos cursos de Engenharia Comercial no Chile

Maritza Katherine **Galindo Illanes***

 ORCID iD 0000-0003-1394-2075

Adriana **Breda****

 ORCID iD 0000-0002-7764-0511

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto universitarios propuestos para la formación de ingenieros comerciales en Chile. Para ello, por medio de la noción de configuración epistémica del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos, se analizaron cualitativamente trece libros de textos utilizados para la enseñanza de la derivada en diferentes universidades chilenas. Los resultados apuntan: a) un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos, b) poca presencia de algunos teoremas importantes relacionados a la derivada y c) falta de una representatividad de las definiciones de la derivada. Se concluye que el estudio realizado proporciona resultados novedosos con relación a algunas características del significado de la derivada presentes en los libros de texto para las carreras de Ingeniería Comercial en Chile.

Palabras clave: Significado de la derivada. Ingeniería Comercial. Libros de texto. Enfoque Ontosemiótico.

Resumo

O objetivo deste trabalho é analisar os significados pretendidos da derivada nos livros didáticos universitários propostos para a formação de engenheiros comerciais no Chile. Para isso, através da noção de configuração epistêmica da Abordagem Ontossemiótica do Conhecimento e Instrução Matemática, treze livros didáticos utilizados para o ensino da derivada em diferentes universidades chilenas foram analisados qualitativamente. Os resultados apontam: a) uma ênfase no significado parcial da derivada como limite do quociente de incrementos e linguagem simbólica predominante nos argumentos, b) pouca presença de alguns teoremas importantes relacionados à derivada e c) falta de representatividade das definições da derivada. Conclui-se que o estudo realizado fornece resultados inéditos em relação a algumas características do significado da derivada presente nos livros didáticos para carreiras de Engenharia Comercial no Chile.

Palavras-chave: Significado da derivada. Engenharia Comercial. Livros de texto. Abordagem Ontossemiótica.

* Doctora (c) en Didáctica de las Ciencias, las Lenguas, las Artes y las Humanidades por la Universitat de Barcelona (UB). Docente en la Universidad San Sebastián (USS), Concepción, Chile. E-mail: maritza.galindo@uss.cl.

** Doctora en Educación en Ciencias y Matemáticas por la Pontificia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS). Docente e Investigadora en la Universidad de Barcelona (UB), Barcelona, España. E-mail: adriana.breda@ub.edu.

1 Introducción

La Comisión Nacional de Acreditación de Chile (CNA) define la carrera de Ingeniería Comercial como una profesión universitaria orientada hacia la aplicación de un conjunto de competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) que se generan a partir del estudio de las ciencias de la administración y de la economía, apoyadas por las tecnologías de la información, los métodos cuantitativos, otras ciencias sociales y las disciplinas que les sean conexas. En los criterios de evaluación contemplados en esta estructura curricular, se requiere que los programas integren actividades teóricas y prácticas, que las asignaturas permitan la adquisición de habilidades y capacidades inherentes a un ingeniero comercial, tales como:

- ✓ Comunicación: capacidad para comunicarse, de manera efectiva, a través del lenguaje oral y escrito, y del lenguaje técnico y computacional necesario para el ejercicio de la profesión.
- ✓ Pensamiento crítico: capacidad para utilizar el conocimiento, la experiencia y el razonamiento para emitir juicios fundados.
- ✓ Solución de problemas: capacidad para identificar y definir problemas, planificar estrategias y enfrentarlos.
- ✓ Interacción social: capacidad para formar parte de equipos de trabajo y participar en proyectos grupales.
- ✓ Autoaprendizaje e iniciativa personal: inquietud y búsqueda permanente de nuevos conocimientos y capacidad de aplicarlos y perfeccionar sus conocimientos anteriores.
- ✓ Formación y consistencia ética: capacidad para asumir principios éticos y normas de convivencia.
- ✓ Pensamiento globalizado: capacidad para comprender los aspectos interdependientes del mundo globalizado.
- ✓ Formación cívica: capacidad para integrarse a la comunidad y participar responsablemente en la vida ciudadana.
- ✓ Apertura hacia la diversidad cultural: capacidad de apreciar, respetar y valorar diversas manifestaciones culturales y los contextos de donde provienen.

Finalmente, en lo actitudinal, debe motivar el desarrollo de actitudes de: respeto por los aspectos éticos, legales y contractuales relacionados con el ejercicio de su profesión, autoaprendizaje y promoción del aprendizaje organizacional y apertura a la diversidad cultural, la internacionalización y la globalización (BOHLE; ROJAS, 2007; COMISIÓN NACIONAL DE ACREDITACIÓN, 2011). Esto conlleva al desafío de articular las ciencias básicas y las

ciencias de la ingeniería, favoreciendo el desarrollo de las competencias profesionales y la formación matemática del ingeniero (ALVARADO MARTÍNEZ; GALINDO ILLANES; RETAMAL PÉREZ, 2018).

Las matemáticas, entendidas como una ciencia básica, son fundamentales para un ingeniero. En particular, las diversas aplicaciones de la derivada la ha convertido en uno de los objetos matemáticos fundamentales presentes en los procesos formativos de las distintas ingenierías, lo que ha generado diversos estudios con relación a la complejidad de sus significados, sus múltiples representaciones, los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes de ingeniería, la idoneidad del significado de la derivada en los distintos currículos y los significados parciales en los textos universitarios de enseñanza para las ingenierías (LARIOS; JIMÉNEZ, 2022; LARIOS; MURILLO; REYES, 2021; PINO-FAN; GODINO; FONT, 2016; RODRÍGUEZ-NIETO; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ; FONT, 2022). La articulación de los componentes en los que estalla esta complejidad está presente en casi todos los marcos teóricos emergentes en el área de la Educación Matemática. Trabajar los distintos significados de un objeto matemático es un aspecto propuesto por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (GODINO; BATANERO; FONT, 2007, 2019), lo cual se plantea analizar la complejidad de los objetos matemáticos por medio de sus pluri significaciones (significados parciales).

Algunos estudios apuntan la importancia del estudio de la derivada en las carreras de Ingeniería Comercial, por un lado, porque sus diferentes modos de representación son uno de los más utilizados en microeconomía, una vez que se debe establecer una relación de comprensión entre los conceptos económicos y matemáticos (BALLARD; JOHNSON, 2004; BUTLER; FINEGAN; SIEGFRIED, 1994; GARCÍA; AZCÁRATE; MORENO, 2006; HEY, 2005) y, por otro lado, por las dificultades en la interpretación de situaciones económicas debido a la débil comprensión de los significados matemáticos que las organizan (ARIZA-COBOS; LINARES-CISCAR, 2009).

Con fines de profundizar la comprensión de los futuros ingenieros acerca del objeto matemático derivada, en el contexto chileno, se han realizado algunos estudios que revelaron que ellos presentan dificultades en: el concepto de función y la concepción euclidiana de la recta tangente; la construcción del significado de recta tangente como límite de rectas secantes; la interpretación de la función derivada y su representación geométrica; realizar operaciones para calcular la pendiente de una recta y; operar con funciones (GALINDO ILLANES *et al.*, 2022; GALINDO ILLANES; BREDÁ, 2020).

Esos resultados conllevaron a estudiar, con mayor profundidad, el tratamiento de la derivada en los programas de las asignaturas de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile, que revelaron que, si bien la mayor parte de las propuestas curriculares presentan similitudes en la organización de contenidos y en los elementos lingüísticos utilizados para la construcción del objeto derivada, se observan diferencias importantes en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y en los campos de problemas abordados (GALINDO ILLANES; BREDÁ, 2022).

El resultado encontrado en los análisis de los programas de asignatura de diversas universidades del país, nos ha desafiado a estudiar, con profundidad, los libros de texto considerados en dichos programas, una vez que es uno de los recursos que más influye en la construcción del significado de un objeto matemático, dado que los profesores los utilizan para organizar e implementar las lecciones de las clases y, como consecuencia, son parte del proceso enseñanza y aprendizaje de los estudiantes (LARIOS; JIMÉNEZ, 2022; PINO-FAN *et al.*, 2013). Este tipo de análisis es un aspecto altamente considerado en el EOS, una vez que varios estudios se han dedicado a analizar los significados pretendidos de diferentes objetos matemáticos en los libros de texto de diferentes países, entre otros (BURGOS *et al.*, 2020; CASTRO; MARTÍNEZ-ESCOBAR; PINO-FAN, 2017; GARCÍA-GARCÍA *et al.*, 2021; MONJE; SECKEL; BREDÁ, 2018; PALLAUTA *et al.*, 2022; PINO-FAN; PARRA-URREA; CASTRO-GORDILLO, 2019).

En esta línea, este trabajo hace parte de una investigación más amplia y pretende responder a la siguiente pregunta: ¿cómo se organizan los significados de la derivada en los libros de texto propuestos en los programas de asignatura de los cursos de Ingeniería Comercial? En ese sentido, el objetivo de este trabajo es analizar los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto universitarios propuestos para la formación de ingenieros comerciales en Chile.

2 Marco teórico

Los desarrollos teóricos propuestos por el EOS, explicados recientemente por Godino, Batanero y Font (2019), tienen como objetivo dar respuesta a algunos problemas generados en el campo de la Educación Matemática. En el EOS, se asume que la actividad matemática es una actividad humana centrada en la resolución de problemas, que acontece en un tiempo-espacio determinado, a través de una secuencia de prácticas que, a menudo, se consideran procesos (de significación, conjeturar, argumentar etc.). Para ello, el EOS propone las nociones de situación-

problema de práctica matemática (secuencia de prácticas) que ocurren durante la resolución de estas situaciones-problema. Tales secuencias tienen lugar en el tiempo y se suelen considerar, en muchos casos, como procesos. En particular, el uso y/o la emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos), se producen a través de los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (creación de algoritmos y rutinas) y argumentación.

En el EOS, la noción de juego de lenguaje ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan las maneras de estar y de existir de los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos intervienen en las prácticas matemáticas y emergen de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan y se agrupan en las distintas dualidades (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013).

✓Extensivo-intensivo: los objetos matemáticos pueden estar participando como particulares, o bien, como generales y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser particulares a generales o viceversa.

✓Expresión-contenido: los objetos matemáticos pueden estar participando como representaciones, o bien, como objetos representados y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser representaciones a ser objetos representados o viceversa.

✓Personal-institucional: los objetos matemáticos pueden estar participando como objetos personales, o bien, como objetos institucionales y, según el juego de lenguaje, pueden pasar de ser personales a ser institucionales. La dialéctica personal-institucional es esencial en los procesos de instrucción, ya que en ellos se pretende que los alumnos se apropien de los objetos institucionales (aprendan).

✓Ostensivo-no ostensivo: estos dos modos de estar de los objetos matemáticos en la práctica matemática se han de tomar como algo que se puede mostrar a otro directamente versus algo que no se puede mostrar directamente, solamente por medio de otro algo, que sí, se puede mostrar directamente. Los ostensivos matemáticos presentan una característica que es propia de las cosas del mundo real, que es la existencia real en el tiempo y en el espacio, mientras que, a los objetos no ostensivos, no se les atribuye este tipo de existencia, pues usualmente se considera que tienen una existencia ideal.

✓Unitario-sistémico: cuando una entidad matemática es considerada como un objeto, se está adoptando una perspectiva unitaria sobre el mismo. Ahora bien, hay momentos en que interesa adoptar una perspectiva sistémica sobre dicho objeto, por ejemplo, considerando las

partes que lo componen. En esta dualidad, los objetos matemáticos pueden estar participando como objetos unitarios, o bien, como un sistema.

Por otra parte, las dualidades, antes descritas, dan lugar a los siguientes procesos: institucionalización – personalización, generalización – particularización, análisis/descomposición – síntesis/reificación, materialización/concreción – idealización/abstracción, expresión/representación – significación.

El EOS también asume el principio de que el conocimiento de un objeto, por parte de un sujeto (ya sea individuo o institución), es el conjunto de funciones semióticas que este sujeto puede establecer en las que el objeto interviene como expresión o contenido. Además, la correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde tal objeto interviene se interpreta como el *significado de ese objeto* (institucional o personal). Por ejemplo, cuando un sujeto realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se llama una configuración de objetos primarios (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013). Para delimitar los significados de un objeto matemático, el EOS propone la herramienta denominada *análisis de sistemas de prácticas* (personales e institucionales) y las configuraciones ontosemióticas involucradas en ellas (GODINO, 2014; GODINO; BATANERO, 1994).

En Font, Godino y Gallardo (2013) se explica que la noción de complejidad del objeto matemático y la de articulación de los componentes de dicha complejidad juegan un papel esencial. Entender la complejidad, en términos de una pluralidad de significados, es resultado de la visión pragmatista sobre el significado que se asume en el EOS. Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante (o no). Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y, por tanto, definir) de manera diferente, utilizar nuevas representaciones etc. De esta manera, con el paso del tiempo, aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios: 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes;

4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias; y 9) derivada como límite.

En Pino-Fan *et al.* (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Programa de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel). La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan, Godino y Font (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2015). En este estudio, procuramos identificar los significados pretendidos de la derivada en los libros de textos presentes en los programas de estudios de Ingeniería Comercial en Chile.

3 Metodología

En este apartado se explica el contexto del estudio, los instrumentos de colecta de datos y el análisis de estos.

3.1 Contexto del estudio e instrumentos de colecta de datos

Para la elección de los libros texto, en un primer momento se envió un correo de invitación a treinta universidades chilenas que imparten la carrera de Ingeniería Comercial, de las cuales ocho (cinco privadas y tres públicas), de manera anónima, aceptaron ser parte del estudio compartiendo los programas de las asignaturas que incluyen como objeto de enseñanza la derivada. En un segundo momento, se hizo un análisis de los programas de las asignaturas (GALINDO ILLANES; BREDÁ, 2022) y uno de los aspectos considerados fue la identificación de los libros de texto contemplados en dichos programas.

3.2 Análisis de la derivada en libros de texto de Ingeniería Comercial

El análisis cualitativo de tipo descriptivo se basó en la muestra de textos tomada de las bibliografías obligatorias y complementarias presentes en los programas de las asignaturas, por lo que es variada y adecuada para la enseñanza de ingenieros comerciales, lo que permite contar

con un amplio espectro del significado de la derivada. Los libros seleccionados se clasifican en textos de matemática aplicada a economía y negocios, y textos clásicos de matemática. El análisis de los distintos elementos de significado de la derivada se llevó a cabo con trece textos, seis de matemática aplicada a economía y negocios, y siete clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías. A continuación, el Cuadro 1 presenta los libros de textos contemplados en los análisis.

Texto N° (Tn)	Título	Autores	Editorial	Edición	Año
T1	Matemáticas aplicadas a la administración y la economía.	J. Arya, R. Lardner.	México: Pearson Educación	5ª	2009
T2	Matemáticas para Administración y Economía.	E. Haeussler, R. Paul, R. Wood.	México: Pearson Educación	12ª	2008
T3	Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales.	L. Hoffmann, G. Bradley, K. Rosen.	McGraw-Hill	8ª	2006
T4	Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales.	F. Budnick.	Ed. México: McGraw-Hill	4ª	2007
T5	Matemáticas para administración y economía.	S. T. Tan.	México: Thomson	3ª	2005
T6	Teoría y problemas de cálculo para administración, economía y ciencias sociales.	E. Dowling.	Santafé de Bogotá: McGraw-Hill Interamericana.	1ª	1992
T7	Cálculo Una variable	G. Thomas, M. Weir, J. Hass, C. Heil	Pearson Educación	13ª	2015
T8	Calculo diferencial e integral.	E. Purcell, S. Rigdon, D. Varberg.	Pearson Educación	9ª	2007
T9	Cálculo Tomo 1	R. Larson, B. Edwards.	Ed. México: McGraw-Hill.	10ª	2016
T10	Cálculo Trascendentes Tempranas	J. Stewart.	Cengage Learning Editores.	8ª	2018
T11	El cálculo	L. Leithold	Oxford University Press	7ª	1998
T12	Cálculo diferencial	F. Ortiz	Grupo Editorial Patria	1ª	2014
T13	Cálculo diferencial e integral	A. Aguilar, F. Valapai, H. Gallegos, M. Cerón, R. Reyes.	Pearson Educación, México.	1ª	2010

Cuadro 1 - Libros de textos presentes en los programas de estudio de Ingeniería Comercial
Fuente: elaboración de los autores

Para el análisis de los libros de texto, se han seleccionado, en cada libro, los capítulos que tratan la derivada, con el fin de identificar la organización de los contenidos y la noción de configuración epistémica, que nos ha permitido analizar y describir los objetos primarios (significados parciales, procedimientos, proposiciones, representaciones y campos de problemas) que intervienen en las prácticas matemáticas sobre la derivada propuestas en los

libros de textos (FONT; GODINO; GALLARDO, 2013; GODINO; BATANERO; FONT, 2019). A continuación, por motivos de espacio, ejemplificamos cómo se ha realizado el análisis del libro de texto T1.

T1 - Matemáticas aplicadas a la administración y la economía

El texto contempla cuatro capítulos para el estudio de la derivada. A modo general, se observa que, para establecer definiciones y propiedades, el texto considera problemas introductorios aplicados (economía, física etc.), luego presenta ejercicios resueltos, en los cuales se ejemplifica el uso de definiciones y proposiciones introducidas, en menor medida, se presenta la demostración de algunos teoremas de la derivada. Finalmente, cada capítulo termina con una propuesta de tareas aplicadas y no aplicadas, para reforzar los conocimientos adquiridos por el lector.

Con respecto a los procedimientos y sus elementos lingüísticos, consisten en el cálculo del incremento de funciones reales y económicas, cálculo de velocidades promedio, cálculo de límites, cálculo de derivadas utilizando incrementos y reglas de derivación, cálculo de tangentes utilizando límite de incrementos y derivada en un punto, cálculo de marginales utilizando límite de incrementos y reglas de derivadas, cálculo de derivadas de segundo orden utilizando reglas de derivadas, derivadas de funciones compuestas, cálculo de monotonía de funciones reales y económicas, aplicaciones de optimización y gráfica de curvas a funciones reales y económicas, utilizando lenguaje verbal, simbólico, gráfico y tabular.

El ejercicio de análisis realizado en el libro de texto T1, fue replicado a los trece libros de texto y, a medida que se realizaron los análisis, se identificaron 29 definiciones de la derivada, que se agrupan y describen como indica el Cuadro 2.

D	Descripción
D1	Límite de una función real
D2	Funciones reales continuas y discontinuas
D3	Razón de cambio o tasa de cambio promedio e instantánea
D4	Velocidad (promedio, instantánea, de reacción) y aceleración
D5	Derivada como razón de cambio (aplicación física)
D6	Derivada como límite de incrementos
D7	La derivada en un punto como la pendiente de una curva (interpretación geométrica de la derivada)
D8	Derivación de una función en un punto y derivación en un intervalo
D9	Diferenciación
D10	Función implícita y su derivada

D11	Análisis marginal como razón de cambio (costo marginal, ingreso marginal, utilidad marginal, productividad marginal y rendimiento, tendencias marginales a ahorrar y consumir)
D12	Elasticidad del precio de la demanda o Elasticidad de la demanda
D13	Aproximación lineal (linealización)
D14	Error (relativo, porcentual, propagado)
D15	Valor crítico y punto crítico
D16	Función creciente y decreciente (monotonía de una función real y económica)
D17	Máximos y mínimos relativos
D18	Máximos y mínimos absolutos (en todo \mathbb{R} y en intervalo cerrado)
D19	Derivadas de orden superior (segunda, tercera y n-ésimo orden)
D20	Punto de inflexión
D21	Concavidad (de la curva)
D22	Funciones (logarítmica, exponenciales naturales, hiperbólicas, objetivo)
D23	Movimiento armónico simple y rectilíneo
D24	Definiciones en áreas distintas a la física y economía (densidad lineal, corriente I, concentración, compresibilidad, ley del flujo laminar, gradiente de velocidad)
D25	Función potencia, de costo total, periódica, de demanda
D26	Radio de curvatura y círculo de una curvatura
D27	Recta normal, recta tangente, recta secante y pendiente de una recta tangente
D28	Antiderivada, antidiferenciación, integral indefinida
D29	Ecuación diferencial

Cuadro 2 - Identificación y descripción de las definiciones (D) en los textos analizados.
Fuente: elaboración de los autores

Los textos consideran teoremas, propiedades, corolarios y reglas de la derivada, se identificaron diecisiete, que se agrupan y describen como indica el Cuadro 3.

TP	Descripción
TP1	Teorema de límites y sus propiedades
TP2	Teorema de continuidad de funciones reales
TP3	Regla de asíntotas
TP4	Teorema del valor medio
TP5	Teorema de Rolle
TP6	Teorema del valor intermedio
TP7	Teorema de Fermat
TP8	Diferenciabilidad implica continuidad
TP9	Reglas de derivadas (Suma, Producto, Cociente, Constante por función, Potencia, Cte, Exponencial, Logaritmos)
TP10	Regla de la Cadena (Regla de la cadena, regla de la cadena para funciones exponenciales, regla de la cadena para funciones logarítmicas)
TP11	Teoremas de derivadas de funciones trigonométricas
TP12	Teorema de la primera derivada para valores extremos locales, relativos y absolutos

TP13	Criterios para funciones crecientes o decrecientes
TP14	Teorema de la segunda derivada para extremos locales o absolutos
TP15	Teorema de Concavidad (Prueba de concavidad, criterios de concavidad)
TP16	Regla de <i>L'Hôpital</i>
TP17	Regla de antiderivadas (Integral Indefinidas)

Cuadro 3 - Identificación y descripción de los teoremas y proposiciones (TP) de la derivada en los textos analizados
Fuente: elaboración de los autores

Con respecto a los campos de problemas presentes en los textos, en primer lugar, se analizó la presencia de los campos de problemas del estudio histórico realizado por Pino-Fan *et al.* (2013), los que se resumen en: A) campos de problemas sobre tangentes, B) campos de problema sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio (se refiere específicamente al *cociente* entre dos cantidades de magnitud), C) campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación (se refiere al cociente entre dos números, sin hacer referencia a cantidades de magnitud, se le conoce comúnmente como límite del cociente incremental), D) campos de problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones etc., y E) campos de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación.

A medida que se realizó el análisis de los campos de problemas en los textos, se identificaron 21 subcategorías de ellos, que se agrupan y describen como indica el Cuadro 4, esto permitió realizar una caracterización detallada de los textos.

CP	ID	Descripción
A	A1	Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la concepción cartesiana (aproximación por rectas secantes)
	A2	Cálculo de la pendiente de recta tangente a una curva en un punto, utilizando el triángulo de Leibniz
	A3	Cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando derivada.
	A4	Cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva para obtener una razón de cambio instantánea
B	B1	Cálculo de tasas instantáneas de cambio marginal (costo marginal, ingreso marginal, utilidad marginal, productividad marginal, rendimiento marginal, tasa de impuesto marginal y propensión marginal al ahorro y al consumo)
	B2	Crecimiento poblacional.
	B3	Cálculo de la rapidez instantánea.
	B4	Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones económicas (tasa porcentual del cambio de ingreso en función del cambio porcentual de las unidades o del precio, tasa de cambio porcentual de la cantidad en función del cambio porcentual en el precio (elasticidad de la demanda)
	B5	Razones de cambio aplicadas a otras áreas del conocimiento
C	C1	Razones de cambio (o tasas de cambio) instantáneas de variación de funciones reales

	C2	Razones de cambio (o tasas de cambio) relativas y porcentuales para funciones reales
D	D1	Análisis del gráfico de funciones(monotonía) reales y de áreas del conocimiento diferentes a la económica.
	D2	Análisis del gráfico de funciones económicas (monotonía).
	D3	Cálculo de máximos y mínimos locales en problemas aplicados de economía utilizando criterio de la primera o segunda derivada para extremos relativos.
	D4	Cálculo de máximos y mínimos locales en funciones reales y de áreas del conocimiento diferentes a la económica, utilizando criterio de la primera o segunda derivada para extremos relativos.
	D5	Extremos absolutos en un intervalo cerrado.
	D6	Análisis de concavidad de funciones reales y económicas.
E	E1	Cálculo de derivadas de orden superior.
	E2	Cálculo de derivadas implícitas.
	E3	Método de newton para aproximación de raíces de polinomios
	E4	<i>L'Hôpital</i>

Cuadro 4 - Campos de problemas (CP), Identificador (ID) y descripción del campo de problema
Fuente: elaboración de los autores

A continuación, por límite de espacio, se presenta, con detalle, el campo de problema (CP) A y sus respectivas subcategorías.

A - Campos de problemas sobre tangentes

Para el análisis de la presencia de este campo de problemas es esencial prestar atención a la construcción que consideran los textos del concepto de recta tangente a una curva. Resulta de interés identificar si el tipo de actividades, ejercicios y/o ejemplos presentes en los textos, permiten ampliar la concepción euclidiana de la recta tangente a la cartesiana y a la Leibniziana, la tematización del esquema de recta tangente mediante el uso consciente de sus propiedades y la posterior desencapsulación (ORTS-MUÑOZ; LLINARES-CISCAR; BOIGUES-PLANES, 2016), teniendo en cuenta los métodos infinitesimales, ya que el cálculo lleva a los estudiantes a los niveles más altos de generalidad de la tangente (SANTI, 2011). A continuación, se consideran ejemplos de las cuatro subcategorías de este campo de problemas, ya que para comprender la interpretación geométrica de la derivada es primordial el concepto de recta tangente (GALINDO ILLANES; BREDA, 2020, 2022).

A1 - Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la concepción cartesiana (aproximación por rectas secantes)

Este tipo de ejercicio se utiliza, comúnmente, para construir la definición algebraica de la derivada en un punto a través de su interpretación geométrica, para ello se considera la concepción cartesiana de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto como el límite de pendientes de rectas secantes, su desarrollo es comúnmente tabular (cálculo de pendientes de rectas secantes próximas) con apoyo gráfico. A continuación, la Figura 1 presenta

un ejemplo:

La unidad de destello (flash) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga de un condensador y su liberación repentina cuando el flash se activa. Los datos de la tabla describen la carga Q restante en el condensador (medida en microcoulombs) en el tiempo t (medida en segundos después de que el flash se dispara). Utilice los datos para dibujar la función y calcule la pendiente de la recta tangente en el punto $t = 0.04$. [Nota: la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica (medida en micro amperes) que fluye desde el condensador a la lámpara de flash.]

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

Figura 1 - Ejemplo de A1 presente en T10

Fuente: (STEWART, 2018, p. 78)

Otro desarrollo típico de este campo de problemas, presente en los textos, es determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, utilizando su definición algebraica (cálculo de límite), para luego transitar a la definición de la derivada de una función en un punto. A continuación (Figura 2) se presenta un ejemplo clásico, cuya solución propuesta en el texto, utiliza la definición algebraica de pendiente de recta tangente $m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$.

Por ejemplo, considere la curva $y = f(x) = x^2$ y la pendiente de algunas rectas secantes PQ , donde $P = (1,1)$.

Para el punto $Q = (2.5, 6.25)$, la pendiente de PQ (vea figura 11.6) es ...

Ejemplo 1. Determinación de la pendiente de la recta tangente.

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto $(1,1)$

Figura 2 - Ejemplo de A1 presente en T2

Fuente: (HAEUSSLER; PAUL; WOOD, 2008, p. 482-483)

A2 - Cálculo de la pendiente de recta tangente a una curva en un punto, utilizando el triángulo de Leibniz.

Este tipo de ejercicios proporciona el gráfico de la curva, comúnmente, la gráfica de la curva está sobre una cuadrícula y, para determinar una aproximación de la pendiente de la recta tangente en un punto, se utiliza regla. Este tipo de actividad permite identificar gráficamente una recta tangente a una curva en un punto y utiliza el triángulo diferencial de Leibniz para determinar una aproximación de la pendiente. A continuación, la Figura 3 presenta los ejemplos:

En los ejercicios del 1 a 4, use la cuadrícula y una regla para hacer una estimación aproximada de la pendiente de la curva (en unidades de y por unidades de x) en los puntos P_1 y P_2 .

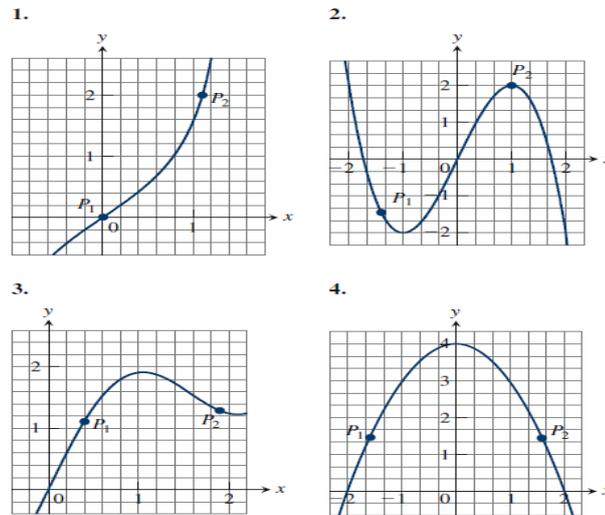


Figura 3 - Ejemplo de A2 presente en T7

Fuente: (THOMAS *et al.*, 2015, p. 108)

A3 - Cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto, utilizando la derivada.

Este tipo de ejercicios permite consolidar la interpretación geométrica de la función derivada, a través de la tematización de la recta tangente a una curva. Además, conocer como proceso, que la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto corresponde a la función derivada de la curva evaluada en el punto de tangencia. En los siguientes ejemplos, para construir la ecuación de la recta tangente se requiere determinar previamente la derivada en el punto de tangencia. En ambos ejemplos, primero se determina la función derivada, en el primero de ellos (Figura 4), se utiliza la definición algebraica de derivada, y en el segundo (Figura 5) las reglas de derivación, luego en ambos ejemplos se evalúa la función derivada en el punto de interés. A continuación, la Figura 4 y Figura 5 presentan los ejemplos:

Primero calcule la derivada de $f(x) = x^3$, y luego utilícela para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto donde $x = -1$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en este punto?

Figura 4 - Ejemplo de A3 presente en T3

Fuente: (HOFFMANN; BRADLEY; ROSEN, 2006, p. 101)

(53-57) Determine la ecuación de la línea tangente a la gráfica de las funciones siguientes en los puntos indicados

53. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ en $(1,2)$

54. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ en $(-1,2)$

Figura 5 - Ejemplo de A3 presente en T1

Fuente: (ARYA; LARDNER, 2004, p. 472).

A4 - Cálculo de la pendiente de una recta tangente a una curva para obtener una razón de

cambio instantánea.

Este tipo de ejercicios permite la tematización de la recta tangente a una curva como la razón de cambio instantánea, posteriormente se transita a la interpretación geométrica de la derivada. Es común observar, en los textos, que este tipo de ejercicios considera situaciones aplicadas. A continuación, la Figura 6 y Figura 7 presentan los ejemplos:

(a) Una partícula empieza moviéndose a la derecha a lo largo de una recta horizontal; la gráfica de su función posición se muestra enseguida. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?

(b) Trace una gráfica de la función velocidad.

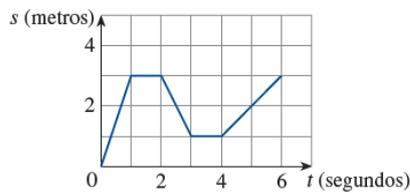


Figura 6 - Ejemplo de A4 presente en T10
Fuente: (STEWART, 2018, p.148)

Ejemplo 2.1.1 En la gráfica que aparece en la figura 2.2 se indica la relación entre el porcentaje de desempleo U y el porcentaje correspondiente a la inflación I . Utilice la gráfica para estimar la razón a la que cambia I con respecto U cuando el nivel de desempleo es 3%, y luego cuando éste es 10%.

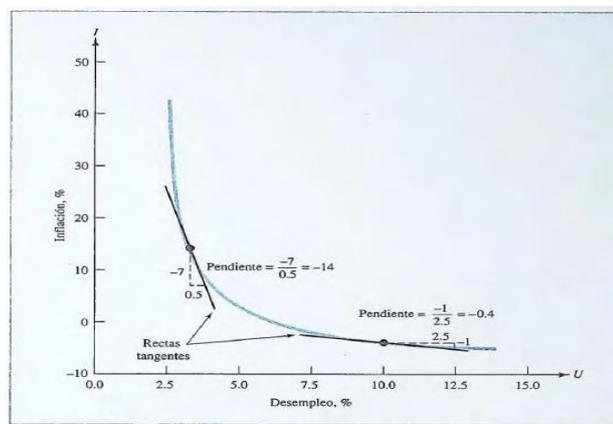


FIGURA 2.2 Inflación como una función del desempleo.

Solución. De la figura anterior se estima que la pendiente de la recta tangente en el punto (3,14), correspondiente a $U = 3$, es aproximadamente -14.....

Figura 7 - Ejemplo de A2 presente en T3
Fuente: (HOFFMANN; BRADLEY; ROSEN, 2006, p. 96-97)

A continuación, con el fin de caracterizar el significado pretendido de la derivada, se presentan los resultados en torno al análisis de los libros de texto propuestos en los programas de estudios de ingeniería comercial en Chile.

4 Resultados

El análisis de los significados de la derivada pretendidos en los trece textos indica que, tanto en los textos de matemática aplicada a economía y negocios, como en los clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, se organizan los contenidos de manera similar para la construcción del objeto derivada, se observa un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos, aunque, en algunas situaciones, apoyados por el lenguaje gráfico. Sin embargo, se observan diferencias en los textos de matemática aplicada a economía y negocios (T1, T2, T3, T4, T5 y T6), y los clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías (T7, T8, T9, T10, T11, T12 y T13), éstas se observan en la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y, mayormente, en los campos de problemas (CP) abordados.

Con relación al CP sobre tangentes, se observa que todos los textos consideran el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto utilizando derivada. Con respecto a los textos de matemática aplicada a economía y negocios, T1, T2, T3, T5 y T6 construyen la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto, utilizando la aproximación por rectas secantes, y T3, T5 y T6 utilizan el triángulo de Leibniz. Además, T1, T2, T3, T4 y T5 consideran el cálculo de pendientes de rectas tangentes para determinar razones de cambio instantáneas. Con respecto a los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, T7, T8, T9, T10, T11 y T12 construyen la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto utilizando la aproximación por rectas secantes y T7, T8, T9 y T10 utilizan el triángulo de Leibniz y consideran problemas que involucran el cálculo de pendientes de rectas tangentes para determinar razones de cambio instantáneas.

Sobre los CP sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio, los textos de matemática aplicada a economía y negocios consideran el cálculo de tasas instantáneas de cambio marginal, tasas de cambio relativas y porcentuales, cálculo de rapidez instantánea, problemas de crecimiento poblacional y T1, T2, T3, T4 y T5 razones de cambio aplicadas a otras áreas del conocimiento diferentes a las antes mencionadas. Con respecto a los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, todos consideran el cálculo de razones de cambio aplicadas a otras áreas del conocimiento. Exceptuando T13, todos los textos consideran problemas de cálculo de rapidez instantánea y problemas de crecimiento poblacional. Finalmente, se observa que sólo un texto (T7) considera problemas de tasa de cambio relativas y porcentuales para funciones económicas, a diferencia de los textos de matemática aplicada a economía y negocios.

En cuanto a los CP sobre tasas instantáneas de variación, se observó que todos los textos de matemática aplicada a economía y negocios consideran razones de cambio instantáneas de

variación de funciones reales y, excepto T1 y T6, todos profundizan en problemas de tasas de cambio relativas y porcentuales de funciones reales. Con respecto a los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, T8, T9, T10 y T11 consideran razones de cambio instantáneas de variación de funciones reales, y ninguno de ellos profundiza en problemas de tasas de cambio relativas y porcentuales de funciones reales, a diferencia de la mayor parte de los textos de matemática aplicada a economía y negocios.

Para los campos de problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones etc., se identificó que todos los textos consideran el análisis de monotonía y el cálculo de máximos y mínimos locales de funciones reales y de problemas aplicados en áreas del conocimiento diferentes a la económica, utilizando los criterios de primera o segunda derivada para extremos relativos. Además, los textos de matemática aplicada a economía y negocios consideran el análisis de monotonía y el cálculo de máximos y mínimos locales en problemas aplicados a la economía, utilizando los criterios de primera o segunda derivada para extremos relativos, y el análisis de concavidades de funciones reales y económicas. Finalmente, excepto T6, todos consideran el cálculo de extremos absolutos en un intervalo cerrado. Con respecto a los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, sólo T12 no considera el cálculo de máximos y mínimos locales en problemas aplicados a la economía, utilizando los criterios de primera o segunda derivada para extremos relativos, T7, T8, T9, T10 y T11 agregan el análisis de concavidades de funciones reales y económicas y el cálculo de extremos absolutos en un intervalo cerrado. Finalmente, sólo T7 y T9 consideran el análisis de la monotonía de funciones económicas, a diferencia de todos los textos de matemática aplicada a economía y negocios.

En cuanto a los CP sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación, se infiere que todos los textos consideran el cálculo de derivadas de orden superior utilizando las reglas de la derivada. Además, los textos de matemática aplicada a economía y negocios T1, T2, T3 y T6 consideran el cálculo de derivadas implícitas. Sin embargo, sólo T2 considera como aplicación de derivadas el método de Newton para aproximación de raíces de polinomios y la regla de *L'Hôpital*. Con respecto a los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías, todos consideran el cálculo de derivadas implícitas, sólo T12 no considera la regla de *L'Hôpital*, y T12 y T13 no consideran el método de Newton para para aproximación de raíces de un polinomio.

A continuación, se presenta el Cuadro 5 que indica con una X la presencia de los campos de problemas en los trece libros analizados.

CP	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13
A	Campos de problemas sobre tangentes												
A1	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	
A2			x		x	x	x	x	x	x			
A3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A4	x	x	x	x	x		x	x	x	x			
B	Campos de problema sobre cálculo de tasas instantáneas de cambio												
B1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x
B2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
B3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
B4	x	x	x	x	x	x	x						
B5	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x
C	Campos de problemas sobre tasas instantáneas de variación												
C1	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x		
C2		x	x	x	x								
D	Campos de problemas sobre aplicación de la derivada para el cálculo de máximos y mínimos, análisis de gráficas de funciones, etc.												
D1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
D2	x	x	x	x	x	x	x		x				
D3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x
D4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
D5	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x		
D6	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		
E	Campos de problemas sobre cálculo de derivadas a partir de reglas y teoremas de derivación												
E1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
E2	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x	x
E3		x					x	x	x	x	x		
E4		x					x	x	x	x	x		x

Cuadro 5 - Presencia de los campos de problemas en los trece textos analizados

Fuente: elaboración de los autores

Con relación a los campos de problemas, todos los textos de matemática aplicada a economía y negocios incluyen campos de problemas que consideran el cálculo de la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto utilizando derivada, cálculo de tasas instantáneas de cambio, marginal, poblacional, relativas y porcentuales, para funciones reales y aplicadas a la economía y negocios. Además, el análisis de la monotonía, la concavidad y de los extremos relativos de funciones reales y aplicadas a la económica, utilizando para ello los criterios de primera y segunda derivada. Todos los textos clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías incluyen campos de problemas que consideran el cálculo de la ecuación de la recta tangente a

una curva en un punto utilizando derivada, cálculo de tasas instantáneas de cambio de funciones aplicadas a otras áreas del conocimiento diferentes a la económica, el análisis de la monotonía y de los extremos relativos de funciones reales y aplicadas a otras áreas del conocimiento diferentes a la económica. Además, consideran el cálculo de derivadas de orden superior y de funciones implícitas utilizando las reglas y teoremas de derivación.

Finalmente, debemos mencionar que las principales diferencias entre los textos de matemática aplicada a economía y negocios y los textos clásicos de enseñanza para las ingenierías se generan en las subcategorías de los campos de problemas B4, C2, D2, E2, E3 y E4. Además, en los textos clásicos, se observan muy disminuidos el número de actividades y ejercicios aplicados al área de economía y negocios, se aprecia el énfasis en el significado parcial de la *derivada como límite* (límite del cociente de incrementos).

A continuación, se presenta el Cuadro 6 que indica con una X la presencia de las definiciones (D) en los trece libros de textos (T) analizados.

D	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13
D1	x	x	x	x	x	x			x	x	x		
D2	x			x	x	x				x			
D3	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x		
D4	x	x					x	x	x	x	x	x	
D5		x											
D6	x	x		x	x		x	x	x	x	x	x	
D7				x		x				x	x		
D8										x			x
D9		x	x	x	x	x	x		x	x	x		
D10	x		x			x	x	x		x	x		x
D11	x	x	x	x	x	x	x			x	x		
D12	x	x		x									
D13							x	x	x	x	x		
D14	x								x				
D15	x	x		x	x	x	x		x		x		
D16	x	x	x	x				x	x		x		x
D17	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x		
D18	x	x		x	x	x			x		x		x
D19	x		x	x	x	x				x			x
D20	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		
D21	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x		x
D22				x		x		x		x		x	
D23							x				x		

5 Conclusiones

Este trabajo buscó analizar los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto universitarios propuestos para la formación de ingenieros comerciales en Chile. Como resultado del análisis de los trece libros textos contemplados en este estudio, se observó de los Cuadros 6 y 7 que, en la mayor parte de ellos, hay un énfasis en el significado parcial de la derivada como el límite del cociente de incrementos y un predominante lenguaje simbólico en los argumentos. Sin embargo, se han observado diferencias en los textos de matemática aplicada a economía y los clásicos de enseñanza del cálculo para ingenierías. Por un lado, una diferencia es que, en estos últimos, se observan la preponderancia de la derivada interpretada como una razón de cambio y, por otro lado, la otra diferencia se observa en los campos de problemas contemplados y sus respectivas subcategorías.

De las 25 definiciones de la derivada encontradas, poco menos de la mitad de los libros de texto consideran 50% de ellas, lo que indica que no hay una incorporación de las definiciones de la derivada de manera holística. En cuanto a la presencia de teoremas y proposiciones en los textos analizados, se observa poca presencia del Teorema del valor intermedio, Teorema de Fermat, Diferenciabilidad implica continuidad, Regla de *L'Hôpital* y Regla de antiderivadas (Integral Indefinidas).

Se concluye que el estudio realizado proporciona resultados novedosos con relación a algunas características del significado de la derivada presentes en los libros de texto, complementando, de esa forma, los análisis del significado de la derivada en los programas de asignatura de los programas de estudio de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile (GALINDO ILLANES; BREDA, 2022).

Por un lado, una contribución teórica relevante del estudio realizado, aparte de dar un panorama de los significados pretendidos de la derivada en los libros de texto analizados, corroborando con otras investigaciones que utilizaran las herramientas del EOS para ello (BURGOS *et al.*, 2020; CASTRO; MARTÍNEZ-ESCOBAR; PINO-FAN, 2017; GARCÍA-GARCÍA *et al.*, 2021; MONJE; SECKEL; BREDA, 2018; PALLAUTA *et al.*, 2022; PINO-FAN; PARRA-URREA; CASTRO-GORDILLO, 2019), es la generación de las subcategorías de los campos de problema identificados, ampliando, en alguna medida, el estudio realizado en Pino-Fan *et al.* (2013). Por otro lado, el análisis del objeto primario de la argumentación que hacen los libros de texto sobre la derivada en las actividades propuestas, es un aspecto a contemplar en investigaciones futuras.

Partiendo del supuesto que el objeto matemático derivada se encuadra en una disciplina caracterizada cómo una ciencia básica, las matemáticas, y que una de las competencias que debe desarrollar el futuro ingeniero, en su proceso formativo, es la de articular las ciencias básicas y las ciencias de la ingeniería (COMISIÓN NACIONAL DE ACREDITACIÓN, 2011), la contribución práctica de la investigación que se presenta es, a partir de los resultados encontrados, diseñar e implementar un ciclo formativo para futuros Ingenieros Comerciales en Chile, teniendo en cuenta la complejidad del significado de la derivada, contemplando la mayor variabilidad de campos de problema y sus respectivas subcategorías, las definiciones, teoremas y proposiciones de forma representativa. Además de integrar actividades teóricas y prácticas, que permitan la adquisición de las habilidades de comunicación, pensamiento crítico, solución de problemas, interacción social y autoaprendizaje e iniciativa personal.

Este panorama motiva la indagación en cuestiones en torno a la idoneidad epistémica del significado pretendido de la derivada para la formación de futuros ingenieros comerciales. El aspecto valorativo de la idoneidad epistémica de la derivada en el ciclo formativo que se pretende implementar es otra línea futura de investigación que se pretende realizar (BREDA; FONT; PINO-FAN, 2018; BREDA; PINO-FAN; FONT, 2017).

Agradecimientos

Este trabajo se desarrolló en el marco de proyectos de investigación en formación docente: PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa" y Competencias y conocimientos del docente de primaria y secundaria para la enseñanza de las matemáticas en modalidad híbrida (SENACYT/FIED21-002).

Referencias

ALVARADO MARTÍNEZ, H. A.; GALINDO ILLANES, M. K.; RETAMAL PÉREZ, M. L. Evaluación del aprendizaje de la estadística orientada a proyectos en estudiantes de ingeniería. **Educación Matemática**, Guadalajara, v. 30, n. 3, p. 151–183, 2018.

ARYA, J.; LARDNER, R. **Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía**. Ciudad de México: Pearson Educación, 2004.

ARIZA-COBOS, Á.; LINARES-CISCAR, S. Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de Bachillerato y Universidad. **Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas**, Buenos Aires, v. 27, n. 1, p. 127-136, 2009.

BALLARD, C. L.; JOHNSON, M. F. Basic math skills and performance in an introductory economics class. **The Journal of Economic Education**, Filadelfia, v. 35, n. 1, p. 3-23, 2004.

BOHLE, S. L.; ROJAS, L. P. Análisis exploratorio de los planes de estudio de Ingeniería Comercial en Chile. **Pensamiento & Gestión**, Barranquilla, [s.v.], n. 23, p. 58-71, 2007.

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 255–278, abr., 2018.

BREDA, A.; PINO-FAN, L. R.; FONT, V. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 13, n. 6, p. 1893–1918, 2017.

BURGOS, M. *et al.* Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 66, p. 40-68, abr. 2020.

BUTLER, J. S.; FINEGAN, T. A.; SIEGFRIED, J. J. Does more calculus improve student learning in intermediate micro and macro-economic theory? **The American Economic Review**, Pittsburgh, v. 84, n. 2, p. 206-210, 1994.

CASTRO, W. F.; MARTÍNEZ-ESCOBAR, J. D.; PINO-FAN, L. R. Niveles de Algebrización de la Actividad Matemática Escolar: Análisis de Libros de Texto y Dificultades de los Estudiantes. **Journal of Research in Mathematics Education**, Reston, v. 6, n. 2, p. 191, jun. 2017.

COMISIÓN NACIONAL DE ACREDITACIÓN. **Criterios de evaluación carrera de ingeniería comercial**. Santiago: Acreditadora de Chile, 2011. Disponible en: http://www.acreditadoradechile.cl/wp-content/uploads/2011/11/Ingenieria_Comercial.pdf, 2011. Acceso en: 19 dic. 2022.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 82, n. 1, p. 97-124, 2013.

GALINDO ILLANES, M. K. *et al.* Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 18, n. 7, p. em2130, 2022.

GALINDO ILLANES, M. K.; BREDA, A. **Interpretación geométrica de la derivada en estudiantes de ingeniería comercial**. Actas del V Encuentro Internacional en Educación Matemática. **Anais...**Barranquilla: Universidad del Atlántico, 2020.

GALINDO ILLANES, M. K.; BREDA, A. **El tratamiento de la derivada en el plan de estudios de Ingeniería Comercial en Chile**. Investigación en Educación Matemática XXV. **Anais...** Santiago de Compostela: SEIEM, 2022.

GARCÍA-GARCÍA, J. I. *et al.* Las medidas de tendencia central en libros de texto de séptimo básico de Chile. **Conrado**, Cienfuegos, v. 17, n. 81, p. 261-268, 2021.

GARCÍA, L.; AZCÁRATE, C.; MORENO, M. Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, Ciudad de México, v. 9, n. 1, p. 85-116, 2006.

GODINO, J. D. **Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática:**

motivación, supuestos y herramientas teóricas. Granada: Universidad de Granada, 2014. Disponible en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf>. Acceso en: 23 jul. 2022

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM - International Journal on Mathematics Education**, Berlín, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. **For the Learning of Mathematics**, Edmonton, v. 39, n. 1, p. 37-42, 2019.

HEY, J. D. I teach economics, not algebra and calculus. **The Journal of Economic Education**, Filadelfia, v. 36, n. 3, p. 292-304, 2005.

HAEUSSLER, E. F.; PAUL, R. S.; WOOD, R. J. Matemáticas para administración y economía. 12^a Edición. Ciudad de México: Pearson Educación, 2008.

HOFFMANN, L.; BRADLEY, G.; ROSEN, K. **Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales**. 8. ed. Ciudad de México: McGraw-Hill, 2006.

LARIOS, V.; JIMÉNEZ, A. Significados parciales de la derivada en libros universitarios en la formación de ingenieros. **Praxis & Saber**, Tunja, v. 13, n. 33, p. e12274-e12274, 2022.

LARIOS, V.; MURILLO, R. E. P.; REYES, H. M. Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Madrid, v. 20, n. 20, p. 105-124, oct. 2021.

LARSON, R.; EDWARDS, B. **Cálculo Tomo 1**. 10. ed. México: McGraw-Hill, 2016.

MONJE, Y.; SECKEL, M. J.; BREDÁ, A. Tratamiento de la inecuación en el curriculum y textos escolares chilenos. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 480-502, ago., 2018.

ORTS-MUÑOZ, A.; LLINARES-CISCAR, S.; BOIGUES-PLANES, F. J. Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta tangente. **Avances de investigación en educación matemática**, Madrid, [s.v.], n. 10, p. 111-134, 2016.

PALLAUTA, J. D. *et al.* Significado de la tabla estadística en libros de texto españoles de educación secundaria. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 71, p. 1803-1824, dic., 2022.

PINO-FAN, L. R. *et al.* Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. **Paradigma**, Maracay, v. 34, n. 2, p. 129-150, 2013.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático sobre la Derivada. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 141-178, 2011.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, D. J.; FONT, V. Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 60-89, abr., 2015.

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D.; FONT, V. Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Netherlands, v. 21, n. 1, p. 63-94, may 2016.

PINO-FAN, L. R.; PARRA-URREA, Y. E.; CASTRO-GORDILLO, W. F. Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. **Magis**, Revista Internacional de Investigación en Educación, Bogotá, v. 11, n. 23, p. 201-220, 2019.

PURCELL, E.; RIGDON, S.; VARBERG, D. **Cálculo diferencial e integral**. 9. ed. São Paulo: Pearson Brasil, 2007.

RODRÍGUEZ-NIETO, C.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F.; FONT, V. Nueva mirada para analizar las conexiones desde dos lentes teóricas: la teoría ampliada de las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico. En: LUGO-ARMENTA, J. G. *et al.* (eds.). **Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**: investigaciones y desarrollos en América Latina. Osorno: Universidad de Lagos, 2022. p. 193-219 (Vol. 1).

SANTI, G. Objectification and semiotic function. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 77, n. 2, p. 285-311, feb. 2011.

STEWART, J. **Cálculo Trascendentes Tempranas**. 8. ed. Ciudad de México: Cengage Learning Editores, 2018.

THOMAS, G. *et al.* **Cálculo Una Variable**. 13. ed. Ciudad de México: Pearson Educación, 2015.

**Submetido em 26 de Julho de 2022.
Aprovado em 26 de Setembro de 2022.**