

EDI e TAD numa Praxeologia de Pesquisa para a Caracterização de um Sistema Micromundo

EDI and TAD in a Research Praxeology for the Characterization of a Microworld System

Patrícia Benevides de Oliveira*

 ORCID iD 0000-0001-7235-5175

Franck Bellemain**

 ORCID iD 0000-0001-5358-2057

Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo explicitar uma parte do percurso de modelização do Teorema Fundamental do Cálculo para a caracterização de um sistema micromundo, que foi concebido em nossa tese de doutorado (OLIVEIRA, 2022) como um suporte informático à atividade matemática no ambiente computacional. A Engenharia Didático-Informática (EDI) foi escolhida como aporte metodológico, com uma adaptação do modelo de processo, estruturada como uma praxeologia de pesquisa para descrever as etapas de investigação, e com a análise das dimensões didática, cognitiva, epistemológica e informática. Nesse processo, a modelização do teorema foi realizada com a conexão entre a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e a abordagem T4TEL para estudar o teorema fundamental por meio das praxeologias e poder caracterizar o micromundo. A análise das dimensões permitiu especificar um conjunto de requisitos e funcionalidades para descrever o micromundo. O sistema de variáveis que foi constituído para os geradores de tipos de tarefas evidenciou o papel da dimensão ostensiva no desenvolvimento das técnicas e permitiu conjecturar sobre a existência de outros objetos que podem ser mobilizados com a intermediação de um software e, conseqüentemente, para a produção de novas técnicas ou a resolução de novas tarefas.

Palavras-chave: *Software* educativo. Teorema Fundamental do Cálculo. T4TEL. Engenharia Didático-Informática. Teoria Antropológica do Didático.

Abstract

This research aims to explain a part of the modeling path of the Fundamental Theorem of Calculus for the characterization of a microworld system, which was conceived in our doctoral thesis (OLIVEIRA, 2022) as a computer support for mathematical activity in the computational environment. Didactic-Informatics Engineering (EDI) was chosen as a methodological contribution, with an adaptation of the process model, structured as a research praxeology to describe the investigation stages, and with the analysis of the didactic, cognitive, epistemological and informatics dimensions. In this process, the theorem modeling was carried out with the connection between the Anthropological Didactic Theory (ADT) and the T4TEL approach to study the fundamental theorem through praxeologies and be able to characterize the microworld. The analysis of dimensions allowed specifying a set of requirements and functionalities to describe the microworld. The system of variables that was created for the generators of types of tasks showed the role of the ostensible dimension in the development of techniques and allowed us to conjecture about the existence of other objects that can be mobilized with the intermediation of a software and, consequently, for the production new techniques or solving new tasks.

* Doutorado em Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Docente na Secretaria de Educação da Bahia (SEC-BA), Ibicarai, Bahia, Brasil. E-mail: pattybenevides@gmail.com.

** Pós-Doutorado em Institut Français de l'Éducation (IFÉ). Professor Adjunto da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, Pernambuco, Brasil. E-mail: f.bellemain@gmail.com.

Keywords: Educational software. Fundamental Theorem of Calculus. T4TEL. Didactic-Informatics Engineering. Anthropological Theory of Didactics.

1 Introdução

Nossa tese de doutorado (OLIVEIRA, 2022), da qual o estudo aqui apresentado é um recorte, teve como objetivo realizar uma modelização do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) para constituir a caracterização de um micromundo. O enfoque diz respeito à concepção de suporte informático à atividade matemática no ambiente computacional, sendo o micromundo uma proposta de suporte.

Consideramos que o processo de modelização do saber matemático para um sistema informático passa pela transformação desse saber a ser ensinado, através da noção de transposição didática (CHEVALLARD, 1991), e pela incorporação da dimensão informática, com a especificação e implementação desse saber, através da transposição informática (BALACHEFF; BELLEMAIN, 2007).

Nos trabalhos de pesquisa em desenvolvimento de *softwares* educativos, a Engenharia Didático-Informática (EDI) surgiu com o intuito de articular os vários domínios da Matemática, Informática, Didática e Psicologia cognitiva, integrando esses aspectos da transposição didática e informática. Contribui, portanto, em resolver as limitações da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) nas questões relativas à criação de softwares educativos para Matemática, bem como as limitações da Engenharia de Softwares no âmbito do ensino e da aprendizagem.

O micromundo é um produto da transposição didático-informática e condiz com a nossa ideia de aprendizagem baseada em ambiente computacional, que é o resultado da interação dos usuários com esses ambientes que levam conseqüentemente a construir diferentes resultados (BALACHEFF; BELLEMANIN, 2007). Portanto, a interação está no centro do design desses tipos de sistemas e, conseqüentemente, no centro da caracterização de conhecimento.

Neste artigo, por se tratar de um recorte da nossa tese (OLIVEIRA, 2022), explicitamos parte do percurso da modelização do TFC para a caracterização de um micromundo. Ele está organizado em cinco seções, sendo que esta é a primeira, de introdução. A segunda contempla a fundamentação teórico-metodológica e, a terceira, o percurso metodológico. A dinâmica operacional do que foi realizado é apresentada na quarta seção e, na quinta seção, as considerações finais.

2 Fundamentação teórico-metodológica

O trabalho de pesquisa em ambiente computacional de aprendizagem envolve tanto aspectos relativos ao uso, quanto ao desenvolvimento, necessitando de uma metodologia que leve em conta os fundamentos teóricos da Didática e da Informática. Pensando nisso, encontramos elementos na Engenharia Didático-Informática, na Teoria Antropológica do Didático e na abordagem T4TEL, que deram suporte à nossa pesquisa.

2.1 A Engenharia Didático-Informática (EDI)

Para a concepção de um micromundo, nos baseamos nos estudos de Tibúrcio (2016, 2020), que buscou articular as dimensões epistemológica, cognitiva e didática da Engenharia Didática e a dimensão informática da Engenharia de *Software* para embasar a Engenharia Didático-Informática. Nessa junção, enquanto o desenvolvimento dos produtos é realizado com as etapas da Engenharia de *Software*, que servem de fundamentação metodológica, as etapas da Engenharia Didática vão proporcionando reflexões sobre o ensino e a aprendizagem.

O conjunto de procedimentos que são realizados durante o desenvolvimento é denominado *modelo de processo* ou *ciclo de vida do software*. Na EDI, o modelo de processo tem como base as atividades elementares apontadas pela Engenharia de Software.

Para situar o lugar da EDI dentro deste trabalho, diremos que está voltada para a concepção de micromundos que abordam o Teorema Fundamental do Cálculo, mas no sentido de antecipar algumas situações didáticas e situações de uso através da modelização do conhecimento e da análise das dimensões.

No modelo de processo desenvolvido por Tibúrcio (2016; 2020), fizemos uma adaptação para desenvolver o percurso metodológico de nossa investigação, no qual apresentaremos na próxima seção. De forma resumida, a descrição dos procedimentos é dada por:

- Delimitação do campo – em que ocorre a definição dos saberes matemáticos ao serem abordados com o *software*, a escolha da equipe pluridisciplinar e as respectivas contribuições para a concepção e desenvolvimento do *software*.
- Análises preliminares – faz-se o levantamento de pesquisas em Educação Matemática sobre o saber considerado, com base nas dimensões epistemológica, didática, cognitiva e didática. As análises conduzirão ao fornecimento dos primeiros requisitos.
- Análise de requisitos – acontece o levantamento dos requisitos do *software* com base no apanhado teórico realizado.

- Prototipação e Análise *a priori* – são concebidas as situações de uso, os problemas que podem surgir, as previsões de respostas dos usuários e o desenvolvimento do protótipo.
- Fase experimental – ocorre a testagem do protótipo para verificar possíveis falhas e melhorias.
- Análise *a posteriori* e Validação – confronto entre o estudo teórico e a experimentação. Validar significa verificar a eficácia do *software*, considerando o que foi levantado nas fases anteriores, e se contribui para o ensino e a aprendizagem.

Neste texto, em virtude de ser um recorte, no qual objetivamos explicitar uma parte do percurso da modelização do TFC para a caracterização de um micromundo, nos debruçaremos apenas em alguns destes elementos do modelo de processo.

2.2 A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Esta tem origem na Teoria da Transposição Didática, a partir da ruptura epistemológica no estudo do *didático* ao se considerar as condições e restrições nos processos de transposição dos saberes.

Chevallard (1996) apresenta algumas noções fundamentais da TAD que se articulam, como a noção de *objeto*. Para ele, todas as coisas são objetos, inclusive as pessoas e qualquer entidade que seja material ou não. A noção de *relação* também é essencial, quando se analisa o sistema formado por objeto – pessoa – instituição, constituindo, assim, as relações pessoais e institucionais. A noção de *instituição* é considerada como um dispositivo social que permite e impõe a seus sujeitos, em suas posições, maneiras próprias de fazer e de pensar.

Através da relação entre estas noções, Chevallard (1996) vai caracterizar a estrutura base de um sistema didático onde se supõe que os envolvidos têm problemas a resolver. O saber é, então, colocado em jogo e deve ser reconstruído pelo aluno. A noção de relação com o objeto, definida por Chevallard (1996), diz respeito às práticas sociais que são realizadas na instituição. A TAD propõe um modelo geral de atividades humanas, e assim descreve o conhecimento matemático, que formula em termos de praxeologias.

Essa noção de praxeologia no contexto da Matemática, denominada praxeologia matemática ou Organização Matemática (OM), refere-se, portanto, à concepção de atividade matemática como um estudo de tipos de tarefas problemáticas.

O saber matemático aparece organizado em dois níveis citados por Chevallard (1996), a *praxis*, que se refere aos tipos de tarefas que são estudados e às técnicas utilizadas, e o *logos*, que inclui o discurso tecnológico, que é a justificativa da técnica, e a teoria que permite dar

sentido aos problemas, interpretar as técnicas e fundamentar as descrições tecnológicas. A união desses dois termos forma a noção de praxeologia e, os tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria, são as quatro categorias de elementos que compõem uma OM.

Chevallard descreve a primeira componente de uma praxeologia com a noção de tarefas, representada por T . A tarefa deve ser escrita por um verbo, por exemplo: *calcular* a integral $\int_0^1 x^2 dx$, *adicionar* dois números inteiros etc. Pode-se ter uma tarefa t que pertence a um tipo de tarefas T .

Uma praxeologia relativa a um tipo de tarefas T , especifica uma maneira de realizar as tarefas $t \in T$. Agora nos referimos à segunda componente, a técnica τ .

O tipo de tarefas T e a técnica τ relacionada à $t \in T$ constitui o bloco prático $[T / \tau]$, que é usualmente chamado de saber-fazer, pois para cada tipo de tarefas T existem certas maneiras de fazer tarefas desse tipo.

A terceira componente de uma praxeologia é a tecnologia θ , que é o discurso racional sobre a técnica e tem como objetivo justificar a técnica, certificando-se de que ela permite executar bem as tarefas do tipo T . Finalmente, a quarta componente é a teoria Θ , que é a justificativa da tecnologia.

O conjunto $[T, \tau, \theta, \Theta]$ constitui, assim, uma praxeologia *pontual*, relacionada a um único tipo de tarefas T . Essa praxeologia (ou organização praxeológica), ou qualquer parte dela, refere-se, comumente, ao saber.

A partir da análise praxeológica de livros de Cálculo, estudamos em nossa tese (OLIVEIRA, 2022) a relação institucional com o objeto Teorema Fundamental do Cálculo, buscando identificar a OM a ensinar. Assim, construímos uma OM de referência, com base em uma análise epistemológica, cognitiva, didática e informática. Para isso, achamos necessário especificar os tipos de objetos que compõem os diferentes elementos das organizações matemáticas.

A distinção entre os tipos de objetos que compõem os elementos das organizações matemáticas, ocasionada entre a natureza dos objetos e a sua função na atividade matemática, leva à seguinte classificação:

- Objetos ostensivos: são aqueles que são perceptíveis, portanto, são vistos, tocados, ouvidos etc. Podemos dizer que têm certa materialidade e, de forma geral, podem ser *manipulados*¹, como as escritas, os gráficos, os gestos, os discursos.
- Objetos não ostensivos: são objetos reconhecidos institucionalmente, mas não são

¹ No sentido que a sua representação pode ser manuseada, controlada, operada por um sujeito agente. Portanto, designa os vários usos que o sujeito pode realizar com o objeto.

perceptíveis, não estão visíveis, como por exemplo as ideias, os conceitos, os teoremas etc. Eles só podem ser evocados pela manipulação adequada de objetos ostensivos associados a eles.

A essa coexistência entre os objetos ostensivos e os não ostensivos, Bosch e Chevallard (1999) vão chamar de “dialética do ostensivo e do não ostensivo”: os objetos não ostensivos emergem da manipulação de objetos ostensivos, mas, ao mesmo tempo, tal manipulação é sempre guiada e controlada por objetos não ostensivos.

A manipulação dos objetos ostensivos também será ativada a partir da realização de atividades por meio do computador, incluindo o registro escrito, o registro gráfico e o registro gestual, gerando a criação de novos tipos de objetos ostensivos e de articulação entre os registros. Nesse sentido, a função atribuída a diferentes objetos ostensivos é fortemente influenciada pelo registro ao qual eles pertencem (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

A representação gráfica de um objeto matemático em um micromundo, por exemplo, vai permitir a ativação da manipulação de objetos ostensivos e não ostensivos associados que não seria possível de serem evocados a partir da representação gráfica no papel, sem falar da possível articulação entre os registros que o micromundo pode permitir.

2.3 T4TEL: uma abordagem de modelização do conhecimento

Escolhemos utilizar essa abordagem por convergir com a nossa pesquisa ao se interessar pela representação de modelos praxeológicos em ambientes computacionais. A estrutura T4TEL faz parte da TAD e foi desenvolvido por Hamid Chaachoua como uma formalização e extensão do modelo praxeológico. O termo T4 refere-se ao quarteto praxeológico (tipos de Tarefas, Técnica, Tecnologia, Teoria) e TEL significa *Technology Enhanced Learning* (Aprendizagem Aprimorada por Tecnologia).

No trabalho de modelização da atividade matemática com a T4TEL, a noção de tipos de tarefas, assim como na TAD, é considerada primária e essencial. O tipo de tarefas T agrupa as tarefas que podem ser realizadas pela mesma técnica τ , justificada por uma tecnologia θ e ela própria legitimada por uma determinada teoria Θ . A partir da descrição das praxeologias pontuais é necessário definir e estruturar as praxeologias por níveis: pontual, local e regional e, a partir daí, criar funções e processos didáticos capazes de fazer as implementações computacionais necessárias.

Além das noções de ‘tipos de tarefa’ e ‘tarefa’, em T4TEL utiliza a noção de gerador de tipo de tarefa para gerar tipos e subtipos de tarefa a partir de um sistema de variáveis. Assim, o

gerador de tipos de tarefas é definido por:

GT = [Verbo de ação, Complemento fixo; Sistema de variáveis], tal que:

- O par (verbo de ação, complemento fixo) é um tipo de tarefas, como definido anteriormente; e
- O sistema de variáveis é constituído por uma lista de variáveis com os valores que podem assumir.

Chaachoua (2018) destaca que um gerador de tipo de tarefas em T4TEL não é um tipo de tarefas, mas permite gerar, a partir de um sistema de variáveis, tipos e subtipos de tarefas de acordo com uma estrutura hierárquica. O nível mais genérico é definido sem nenhuma instanciação de variável, ou seja, é formado pelo verbo de ação e o complemento. As diferentes instanciações das variáveis permitem gerar tipos de tarefas mais específicos.

Todo o processo de modelização, fundamentado com essas bases teóricas, tem a finalidade de prever as situações de ensino que podem ser implementadas em um micromundo e, com isso, descrevermos esse ambiente. Para isso, o processo metodológico foi organizado através de etapas adaptadas do modelo de processo da Engenharia Didático-Informática, que contribuiu com essa análise e com o levantamento de requisitos referentes ao domínio do Teorema Fundamental do Cálculo, como apresentamos na próxima seção.

3 Percorso metodológico

Partindo do pressuposto que a noção de praxeologia pode ser utilizada para modelizar qualquer prática desenvolvida pelo homem, e não somente aquelas ligadas à produção e disseminação de conhecimento matemático, adotamos a posição dada por Artigue que é possível modelizar nossas práticas de pesquisa (ARTIGUE; BOSCH, 2014, p. 249). Nesse sentido, organizamos esta metodologia a partir de uma adaptação do modelo de processo da EDI, estruturada como uma *praxeologia de pesquisa*, como explicaremos adiante.

No âmbito da pesquisa, nos propomos a realizar uma modelização do TFC para constituir a caracterização de um micromundo. Assim, faz parte de nossa investigação compreender as praxeologias que envolvem as relações institucionais dos sujeitos (professores e alunos) com o saber (TFC) diante de situações envolvendo o micromundo.

Com essa expectativa, organizamos as etapas do percurso, adequando o modelo de processo da Engenharia Didático Informática, como mostra o Quadro 1. A integração entre a TAD e a EDI acontece durante essas etapas à medida que as tarefas de investigação e as técnicas utilizadas, fornecidas por estas abordagens, vão compondo as justificativas pelos resultados

obtidos. Com isso, dizemos que há uma dinâmica praxeológica no modelo de processo com o vínculo entre a parte prática e a parte teórica, no sentido de que uma influencia e ao mesmo tempo depende da outra.

As etapas de especificação, análises prévias e levantamento de requisitos, no Quadro 1, trazem alguns questionamentos para dar encaminhamento aos procedimentos. As demais etapas indicam os respectivos procedimentos que foram realizados. Tanto os questionamentos, quanto os procedimentos evidenciados neste quadro foram considerados como tipos de tarefas (ver exemplos nos Quadros 2, 3 e 4), que exigiram a escolha de determinadas técnicas, justificadas pelas abordagens teóricas que adotamos como referencial.

ETAPAS	DIMENSÕES			
	COGNITIVA	DIDÁTICA	EPISTEMOLÓGICA	INFORMÁTICA
ESPECIFICAÇÃO	- Quais são os saberes que se pretende abordar? - Quais são os problemas percebidos que o software poderá se apresentar como solução? - Considerando as relações entre os saberes delimitados, quais conceitos e definições devem estar presentes? - Qual será o diferencial da utilização do software visado comparado a um ambiente papel e lápis?			
ANÁLISES PRÉVIAS	- Existem indicações na literatura de como o estudante aprende?	- Qual é o estado atual do ensino do saber? Quais são as consequências desse ensino?	- Quais são os aspectos do saber que podem dificultar e/ou facilitar a aprendizagem?	- Quais são as contribuições tecnológicas que o software deve conter para auxiliar na compreensão e ensino do saber?
LEVANTAMENTO DE REQUISITOS	Documentar os requisitos considerando as dimensões e respondendo: Como o ensino e a aprendizagem podem ser favorecidos? Como a compreensão dos saberes é auxiliada com o uso do software? Quais recursos e situações o software propõe para ajudar o usuário a compreender o saber? Quais funcionalidades existem em produtos da área? Quais são os possíveis diferenciais do software visado? O que o software deverá fornecer de novo referente ao que já existe?			
CONCEPÇÃO E ANÁLISE A <i>PRIORI</i>	Análise da praxeologia apresentada nos livros didáticos.			
DESENVOLVIMENTO E EXPERIMENTAÇÃO	Criação do modelo praxeológico de referência ² com o gerador de tarefas.			
ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	Análise de micromundo para o ensino do TFC a partir do modelo praxeológico.			

Quadro 1 – Percurso metodológico

Fonte: A autora (2020), adaptado do modelo de processo de *software* de Tibúrcio (2016, 2020).

A partir da adoção desse modelo de processo e da abordagem praxeológica, em nossa tese (OLIVEIRA, 2022), descrevemos as etapas dessa dinâmica operacional.

² No processo de transposição didática, além dos aspectos cognitivos, é importante analisar quais as noções matemáticas devem ser ensinadas, o que implica na necessidade de um modelo epistemológico para descrever o saber matemático. Um modelo alternativo aos modelos dominantes nas instituições é construído pelo pesquisador como forma de questionar os modelos dominantes e utilizá-lo como sistema de referência para construir fenômenos didáticos. Nessa perspectiva, e com base na TAD, é que se constitui um modelo praxeológico de referência (MPR), podendo obter distintas praxeologias sobre o mesmo conteúdo matemático.

4 Dinâmica operacional

Neste trabalho, devido à limitação do espaço, foram explicitadas apenas as etapas de especificação, análises prévias das dimensões cognitiva e didática e, análise *a posteriori* e validação.

4.1 Etapa de especificação

As questões levantadas nesta etapa nos levaram a designar os seguintes tipos de tarefas e técnicas correspondentes (ver Quadro 2):

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICAS
Descrever sobre o objeto matemático e os conceitos relacionados.	Consultar documentos curriculares e livros didáticos.
Descrever os problemas que o software poderá resolver.	Pesquisar sobre os problemas relativos ao ensino e à aprendizagem do Cálculo e sobre a utilização de softwares nesse domínio.
Descrever as características que diferenciam o software em questão de outros.	Pesquisar sobre as tipologias de software educativo.

Quadro 2 – Etapa de Especificação

Fonte: A autora (2021).

Nesta parte, nos propusemos a fazer a delimitação do objeto matemático e contextualizar o micromundo nas situações envolvendo esse objeto, através das técnicas descritas no Quadro 2.

Como já evidenciado, o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) é o objeto matemático de nossa pesquisa, possuindo grande relevância para o Cálculo Diferencial e Integral pela relação existente entre os processos de integração e derivação. Esse teorema foi desenvolvido ao longo da história do Cálculo enquanto os matemáticos buscavam resolver dois problemas em particular, que hoje conhecemos como integração e derivação. O processo de integração já era conhecido pelos matemáticos gregos da antiguidade, onde se calculavam áreas e volumes usando um processo de aproximação que ficou conhecido como “método da exaustão”. Por outro lado, as ideias básicas do processo de derivação já apareciam no século XIV e está ligado ao problema de se determinar a reta tangente a uma curva em um ponto.

Diante da relação inversa que existe de um processo sobre o outro, os referidos problemas podem ser resolvidos juntos, e é aí que está a origem do Teorema Fundamental. No entanto, o que evidenciamos é que, no ensino, se dá pouca ênfase a essa relação, e os estudantes têm apresentado muitas dificuldades com os conceitos envolvidos, como função e taxa de variação. Nesse aspecto, os ambientes computacionais têm sido valiosos ao fornecer novas possibilidades de aprendizagem.

O aspecto visual foi enaltecido em todas as pesquisas que envolviam o teorema fundamental como um dos requisitos primordiais para a apreensão e mobilização dos conceitos. Alonso (2017) investigou esse aspecto e reconheceu a importância do uso de *softwares* para explorar a visualização e o dinamismo na representação dos objetos. Além do aspecto visual e da manipulação entre os objetos, Grande (2013) também destacou a importância da interação entre os alunos e o software para estabelecer a inter-relação entre os componentes intuitivo, algorítmico e formal, sendo que estes devem ser explorados na atividade matemática.

Buscamos conhecer os tipos de *software* educativo disponíveis para o ensino de Cálculo e, dadas as especificidades relativas à aprendizagem do objeto visado, consideramos que o micromundo permite abordar e resolver problemas de distintas classes, possibilitando a interação dinâmica entre os sujeitos e os objetos matemáticos por meio de suas ferramentas de construção, dinamismo, visualização e validação, aspectos preponderantes evidenciados pelos pesquisadores.

Com as pesquisas que analisamos, identificamos algumas potencialidades que o software oferece para a aprendizagem do TFC, dentre eles: representação e mudança de representação, construção de conceitos, construção de registros algébrico e gráfico, manipulação dinâmica e interativa e visualização.

Percebemos que essas características devem ser consideradas no desenvolvimento de micromundos, relacionando à possibilidade de promover a interação e possibilitar a construção de novos objetos. As análises relativas às dimensões da EDI, que serão discutidas a seguir, vão poder também contemplar outros aspectos.

4.2 Etapa de análises prévias

Nesta etapa, as questões abordadas no Quadro nos levaram a fazer um levantamento analítico da revisão de literatura para compreender os fenômenos relativos às dimensões epistemológica, didática, cognitiva e informática do Teorema Fundamental do Cálculo. Com isso, os primeiros requisitos de software e variáveis específicas do objeto matemático foram identificados.

O tipo de tarefas e a técnica aplicada nesta etapa estão no Quadro .

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICAS
Fazer um levantamento analítico com base nas dimensões da EDI	Fazer nova pesquisa na literatura sobre os objetos de pesquisa; Analisar os trabalhos escolhidos na revisão de literatura com base nas dimensões da EDI; Descrever os resultados em uma tabela.

Quadro 3 – Etapa de Análises Prévias

Fonte: A autora (2021).

Demos ênfase, neste trabalho, na discussão em torno das dimensões cognitiva e didática, realizada a partir da aplicação das técnicas evidenciadas no Quadro 3. Com isso, obtivemos uma compreensão do estado atual nessas dimensões, a fim de identificar requisitos para a caracterização de um micromundo.

Inicialmente, focamos em buscar responder à questão de pesquisa concernente à dimensão cognitiva: Existem indicações na literatura de como o estudante aprende? Deste modo, a nossa análise levou em conta as características cognitivas dos estudantes diante do ensino habitual (erros, dificuldades, concepções etc.).

Encontramos uma variedade maior de características relativas à dimensão cognitiva na pesquisa de Grande (2013). Ele apontou alguns aspectos que estão relacionados às dificuldades dos alunos, como:

- incompreensão da variação da área;
- incompreensão do significado da variável t ;
- não apresentam visão dinâmica na compreensão dos conceitos de acumulação e variação;
- dificuldades relacionadas à representação gráfica e continuidade de uma função;
- dificuldades relacionadas à variação entre duas grandezas;

Outros aspectos também foram identificados:

- a intuição geométrica favorece a compreensão das questões relacionadas ao TFC;
- a escassez de exploração de representação gráfica e diversificação de registros nos livros didáticos geram dificuldades de aprendizagem.

A pesquisa de Alonso (2017) também apontou o aspecto da intuição para a compreensão dos alunos, em atividades que explorem as características visuais e gráficas. Além disso, destacou que os alunos apresentam dificuldades em: relacionar as representações do mesmo objeto em diferentes registros, como a integral; e evocar conceitos formais relacionados ao TFC para solucionar problemas.

As pesquisas de Campos (2007) e Mateus (2006) analisaram livros didáticos e ambos apontaram que os livros apresentam escassez na coordenação dos registros de representação. Além disso, Mateus destacou, assim como Grande (2013), que a escassez de exploração gráfica e de diversificação de registros de representação nos livros geram dificuldades na aprendizagem. Outro aspecto evidenciado foi a dificuldade dos estudantes em associar o gráfico da primitiva de uma função com o gráfico da derivada.

Considerando os professores como sujeitos das instituições que reconhecem os

conceitos relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo, passamos a analisar os aspectos didáticos que vão influenciar na aprendizagem. Assim, buscamos compreender qual o estado atual do ensino do Teorema Fundamental do Cálculo e as consequências desse ensino. A partir dessa análise, destacamos algumas características relativas à dimensão didática.

Encontramos uma ampla variedade na caracterização didática, relacionada à forma de ensinar, os tipos de atividades, os conceitos matemáticos e as escolhas didáticas.

Os aspectos que se referiam à abordagem didática ou maneiras de ensinar os conceitos matemáticos foram os mais discutidos nas pesquisas analisadas, referindo-se principalmente a:

- Abordagem de ensino sem relacionar os conceitos de integração e derivação como operações inversas, levando à incompreensão do Teorema Fundamental (GRANDE, 2013).
- Nem todos os professores coordenam os registros de representação no ensino do TFC (PICONE, 2007).
- Os professores dão relevância ao uso de técnicas e à reprodução de situações de algoritmização do assunto (CAMPOS, 2007).
- A prática ou o ensino deveria iniciar com uma atividade/problema para abstrair conceitos e fazer generalizações, somente depois com as definições axiomáticas/formalização (PALARO, 2006; MATEUS, 2006).
- Importância de aliar o desenvolvimento de técnicas com a compreensão do significado, como juntar as ideias de integração e derivação para introduzir a noção de TFC (MATEUS, 2006).
- A articulação entre a derivada e a integral geralmente não está explícito no ensino (ARREDONDO; ARMENTA; MOLL, 2014).
- Limitações do ensino formalista do Cálculo e modelo mecanicista (ARREDONDO; ARMENTA; MOLL, 2014).
- Importância das perspectivas gráficas e geométricas para dar sentido aos processos de integração e derivação (ARREDONDO; ARMENTA; MOLL, 2014).
- Adoção do modelo construtivista, dando maior responsabilidade ao aluno (ARREDONDO; ARMENTA; MOLL, 2014).
- Utilizar gestos como ferramentas de comunicação para permitir formas alternativas de representar e organizar as informações (QUINTERO; SALINAS, 2015);
- A orientação investigativa à atividade realizada pelos estudantes é essencial para que o feedback dinâmico oferecido pelo software funcione (QUINTERO; SALINAS, 2015).

Em relação ao desenvolvimento das atividades, as pesquisas apontaram:

- Atividades com escassez da utilização do registro gráfico, levando à incompreensão do teorema (GRANDE, 2013).
- Explorar atividades que relacionem a variação e a acumulação (GRANDE, 2013).
- A importância da produção do significado das questões de aprendizagem (MATEUS, 2006).
- Explorar características visuais e gráficas nas atividades para desenvolver aspectos intuitivos dos conceitos (ALONSO, 2017).
- A produção multimodal de sinais ajuda a explicar a maneira pela qual os sistemas simbólicos são empregados para lidar com uma atividade matemática (QUINTERO; SALINAS, 2015).

A referência aos conceitos matemáticos apareceu muitas vezes nas indicações da abordagem didática, formas de ensinar ou escolhas didáticas, mas, de modo particular, as pesquisas apontaram:

- Relacionar e confrontar os componentes algorítmico, intuitivo e formal (GRANDE, 2013).
- O cálculo de integrais definidas através do cálculo de limites de somas, pode ser mais simples para se buscar antiderivadas (PALARO, 2006).
- A apresentação conceitual de limite no conceito de derivada leva a uma aquisição incompleta do significado do conceito de derivada (MATEUS, 2006).
- Importância das representações dinâmicas para uma melhor articulação entre as representações numérica, gráfica e analítica (ARREDONDO; ARMENTA; MOLL, 2014).

Os instrumentos ostensivos vão ser revelados também nas escolhas didáticas quanto à utilização dos recursos disponibilizados para o ensino, como o livro didático, os softwares etc. Nesse aspecto, identificamos as seguintes características nos trabalhos analisados:

- A escolha do livro didático pelo professor pode revelar as suas preocupações e escolhas metodológicas (PICONE, 2007).
- A abordagem dos livros didáticos se diferencia em relação à definição de integração, uns geometricamente, como sendo uma mediação de área (limite de um somatório), e outros algebricamente, como operação inversa de diferenciação (PALARO, 2006).
- Os livros não asseguram a realização plena da coordenação entre os registros de representação (MATEUS, 2006).

- As tarefas apresentadas nos livros valorizam mais a reprodução de técnicas (MATEUS, 2006).
- Importância dos recursos tecnológicos (ARREDONDO; ARMENTA; MOLL, 2014).

A utilização dos recursos didáticos põe em causa o papel das técnicas. Como afirma Lagrange (2000),

Tornou-se então evidente que as técnicas não podem existir isoladamente no ensino e na aprendizagem, e dessa observação surgiu a ideia da praxeologia. Um assunto matemático, uma obra, para usar as palavras de Chevallard (1999), existe em uma instituição como um todo coerente em vários níveis. O primeiro nível é o das tarefas. No segundo nível, o das teorizações, trata-se de questionar as técnicas sobre sua consistência e seu domínio de validade. Este é o nível onde surge uma determinada linguagem, onde emergem os conceitos. E numa situação escolar, as tarefas são problemas e as técnicas precisam ser construídas. Ir para um nível teórico requer um “trabalho técnico” que não é espontâneo nem natural (Gascón, 1998) (LAGRANGE, 2000, p. 15, tradução nossa)³.

Podemos concluir que o professor poderá utilizar o lápis e o papel, bem como o livro ou o *software* para organizar a atividade matemática. A aprendizagem de conceitos pelos alunos pressupõe que, qualquer que seja o recurso, eles desenvolvam técnicas de resolução como bases para desenvolver a compreensão. No entanto, como já destacamos, os softwares, e em particular o micromundo, podem permitir aos alunos desenvolver novas técnicas para resolver as questões propostas. Para isso, é preciso a elaboração de praxeologias que privilegiem esse trabalho.

4.3 Etapa de análise *a posteriori* e validação

Assim como está evidenciado no Quadro , esta etapa foi destinada a fazer a caracterização de um micromundo para o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo. Para isso, descrevemos as funcionalidades com os tipos de situações a serem implementadas no micromundo, aditada a uma análise descritiva com base no modelo praxeológico de referência.

TIPOS DE TAREFAS	TÉCNICAS
Fazer a caracterização de um micromundo para o ensino do TFC	Organizar uma tabela com as funcionalidades do micromundo em cada tipo de situação; Analisar o micromundo com base no modelo praxeológico

Quadro 4 – Etapa de Análise *A posteriori* e Validação

³ Texto original: “Il est apparu ainsi que des techniques ne peuvent exister de façon isolée dans l’enseignement et l’apprentissage, et de cette observation est née l’idée de praxéologie. Un sujet mathématique, une œuvre, pour reprendre les termes de Chevallard (1999) existe dans une institution comme ensemble cohérent sur plusieurs niveaux. Le premier niveau est celui des tâches. Au second niveau, les techniques sont les façons particulières, “adéquates”, d’accomplir ces tâches dans l’institution. Au troisième niveau, celui des théorisations, il s’agit d’interroger les techniques sur leur consistance et leur domaine de validité. C’est le niveau où un langage spécifique apparaît, où des concepts émergent. En situation scolaire, les tâches sont des problèmes, et les techniques sont à construire. Passer à un niveau théorique demande un “travail sur la technique” qui n’est ni spontané ni naturel (Gascón, 1998)”.

Fonte: A autora (2021).

Em nossa tese (OLIVEIRA, 2022), constituímos um modelo praxeológico para auxiliar na implementação da representação dos objetos em um ambiente computacional do tipo micromundo. Ou seja, ele serve para analisar e descrever os tipos de situações sobre o teorema fundamental que um micromundo poderá desenvolver.

Em particular, a análise privilegiou os objetos que podem ser representados na interface (objetos ostensivos), mas se referindo as funcionalidades conceituais, isto é, cada objeto é considerado como um possível instrumento da atividade matemática que permite desenvolver técnicas para realizar certas tarefas. Ou melhor, cada um tem sua participação numa praxeologia correspondente às tarefas modelizadas pelos geradores de tarefas GT_{der} e GT_{int} , definidos no Modelo Praxeológico de Referência (MPR), tais que:

$$GT_{der} = [Encontrar; derivada (taxa de variação); SV]$$
$$GT_{int} = [Encontrar; integral (área acumulada); SV]$$

O sistema de variáveis $(SV)^4$ que constituímos no MPR permitiu considerar distintas possibilidades de variação de situações ligadas ao teorema fundamental. Algumas situações são essenciais para o estudo da relação inversa entre os processos de integração e derivação. Em um quadro, que não apresentamos aqui em decorrência do espaço, organizamos as funcionalidades do micromundo relacionadas a essas situações prototípicas. Cada situação engloba tipos e subtipos de tarefas originárias de GT_{der} e GT_{int} que associam funcionalidades do micromundo ao tipo de registro ostensivo (V_{ost}), que constituem as técnicas para realizar as tarefas.

Também realizamos um mapeamento de *softwares* com o intuito de buscar identificar outras funcionalidades que poderiam ser contempladas no micromundo para o ensino do TFC. Não apresentamos aqui em decorrência do espaço, mas ressaltamos que as características dos softwares foram apontadas pelos autores como relevantes na resolução de problemas de derivação e integração.

Na caracterização que realizamos anteriormente, já havíamos apontados alguns desses aspectos evidenciados na análise dos *softwares*. Daí, fizemos uma categorização, analisamos⁵ e os relacionamos em um novo quadro, com as funcionalidades do Micromundo em cada tipo de situação.

No Quadro apresentamos um recorte do quadro original, evidenciando a situação S_I -

⁴ Definimos como variáveis principais, V_{ost} : Ostensivos, V_f : Função e V_{mod} : Situação da modelação, cada uma com valores associados a outras variáveis que, combinadas e instanciadas, geram as situações.

⁵ Utilizamos os critérios de pertinência, consistência e integralidade (TIBÚRCIO, 2020, p. 173) para especificar aqueles que pudessem atender aos tipos de situações relativas ao teorema fundamental.

Esboçar o gráfico da função. As funcionalidades do Micromundo para resolvê-la envolvem as variáveis V_{ost_num} : registro numérico, V_{ost_alg} : registro algébrico, V_{ost_geo} : registro geométrico, V_{ost_gr} : registro gráfico e V_{ost_fig} : registro figural. Ou seja, essa pluralidade de registros pode ser mobilizada e articulada durante a atividade matemática, ativando distintos objetos ostensivos associados aos requisitos do sistema.

FUNCIONALIDADES	REQUISITOS
<i>S₁ - Esboçar o gráfico da função</i>	
<p>V_{ost_num}</p> <ul style="list-style-type: none"> - Determinar o valor da integral em um dado intervalo - Determinar o valor da primeira derivada em determinado ponto - Determinar o valor da segunda derivada em determinado ponto - Determinar o valor da função em determinado ponto - Determinar as raízes da função - Determinar os pontos críticos dada a expressão da função - Determinar valores extremos máximo e mínimo da função - Determinar os pontos de inflexão - Determinar o coeficiente angular da tangente em determinado ponto 	<ul style="list-style-type: none"> • Comando <i>Integral</i> que recebe como parâmetros a função integranda e um valor do domínio • Comando <i>Primeira Derivada</i> que recebe como parâmetros a função e um valor do domínio • Comando <i>Segunda Derivada</i> que recebe como parâmetros a função e um valor do domínio • Comando <i>Valor da Função</i> que recebe como parâmetros a função e um valor do domínio • Comando <i>Raízes da Função</i> que recebe como parâmetro a função • Comando <i>Pontos críticos</i> que recebe como parâmetro a função • Comando <i>Valor máximo</i> que recebe como parâmetro a função • Comando <i>Valor mínimo</i> que recebe como parâmetro a função • Comando <i>Pontos de inflexão</i> que recebe como parâmetro a função • Comando <i>Coefficiente angular</i> que recebe como parâmetro a equação da reta tangente e um valor do domínio • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos
<p>V_{ost_alg}</p> <ul style="list-style-type: none"> - Inserir coordenadas de um ponto - Inserir expressão de uma curva - Calcular soma de áreas de regiões finitas - Calcular as raízes de uma função - Calcular a integral de uma função - Calcular a derivada de uma função integral - Calcular números críticos - Calcular extremos relativos - Determinar os pontos em que a concavidade é para cima e para baixo - Inserir texto - Inserir nova janela algébrica (associada a nova janela gráfica) - Determinar as assíntotas 	<ul style="list-style-type: none"> • Campo de entrada recebe como parâmetros as coordenadas do ponto • Campo de entrada recebe como parâmetro a função • Campo de entrada recebe como parâmetros as coordenadas do ponto • Coordenação entre os diferentes registros de representação • Mobilização e coordenação das representações do mesmo objeto • Abertura simultânea de janelas de visualização de mais de uma função • Visualização analítica das etapas de resolução • Feedback dos comandos sobre as ações e erros • Importação e exportação de dados para Excel e Word • Copiar resultados da saída • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Feedback de respostas de questões • Consulta de resolução de questões em banco de dados em qualquer representação • Importação de técnicas que permite a inserção de parâmetros
<p>V_{ost_geo}</p> <ul style="list-style-type: none"> - Inserir ponto - Inserir reta - Inserir polígono - Medir comprimento 	<ul style="list-style-type: none"> • Botão que permite inserir ponto com menu de opções (ponto solto, ponto vinculado à objeto, ponto de intersecção) • Botão que permite inserir reta com menu de opções (reta solta, reta perpendicular, reta paralela, reta tangente, assíntotas, eixo simétrico) • Botão que permite inserir polígono com menu de opções (polígono qualquer, polígono regular) • Marcar o comprimento sobre o gráfico e acionar o botão <i>medir</i> e o resultado aparecerá na tela • Esconder, mostrar, renomear, mudar de cor, apagar objetos

	<ul style="list-style-type: none"> • Feedback dos comandos sobre as ações e erros • Importação e exportação de dados para <i>Excel</i> e <i>Word</i> • Criar objetos e fazer rotações, translações, ampliações, reduções • Controles de animação • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Realização de medidas e ângulos sobre imagens
<p><i>V_{ost_gr}</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Plotar o gráfico da função integral dada a expressão - Plotar o gráfico da derivada de uma função dada a expressão - Plotar o gráfico da integral dado o gráfico de uma função - Plotar o gráfico da derivada dado o gráfico de uma função - Marcar os raízes da função - Desenhar as assíntotas - Desenhar eixos simétricos - Criar tabela vinculada ao gráfico - Marcar pontos - Desenhar curva - Preencher (hachurar, pintar) região determinada - Renomear objetos - Criar seletor - Inserir nova janela gráfica (associada a nova janela algébrica) - Inverter eixos coordenados - Escolher escala dos eixos coordenados 	<ul style="list-style-type: none"> • Comando que recebe como parâmetro a função • Comando <i>Derivada</i>, <i>Integral</i>, <i>Raízes</i>, que recebe como parâmetro a função que está incorporada ao gráfico. Clicando no gráfico, a função é copiada • Comando <i>Tabela</i> que recebe como parâmetros a classe e a amplitude do intervalo da classe • Comando <i>Ponto</i> recebe as coordenadas • Comando recebe as expressões da função que representa a área e botão pinta a região • Esconder, mostrar, renomear, mudar de cor, apagar objetos • Criar controle deslizante e receber como parâmetro os valores do intervalo • Abertura simultânea de janelas de visualização de mais de uma função • Botão inverte os eixos coordenados • <i>Feedback</i> dos comandos sobre as ações e erros • Importação e exportação de dados para <i>Excel</i> e <i>Word</i> • Copiar resultados da saída • Incorporação de objetos na Internet • Criar objetos e fazer rotações, translações, ampliações, reduções • Controles de animação • Controle de <i>zoom</i> • Subdividir intervalos em região do gráfico • Estimar o valor da área sob a curva (ou intersecção de duas curvas) em um intervalo, fazendo crescer o número de subintervalos (animação) • Fazer variar a área acumulada sob uma curva em um intervalo (animação) e mostrar simultaneamente o gráfico da variação (mobilização entre registros) • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Controlar a proporção e janela exata para os gráficos • Realização de medidas e ângulos sobre imagens
<p><i>V_{ost_fig}</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Inserir texto - Mudar cor - Inserir, copiar, recortar, colar, mover, deletar imagem - Sobrepor objeto - Inserir, escolher, esconder malha - Clicar botão Ajuste de curva 	<ul style="list-style-type: none"> • Criar objetos e fazer rotações, translações, ampliações, reduções • Controles de animação • Sintaxe dos comandos semelhante à dos objetos matemáticos • Realização de medidas e ângulos sobre imagens

Quadro 5 – Outros requisitos especificados

Fonte: A autora (2022).

Outras situações foram especificadas, com as respectivas funcionalidades e requisitos, mas não apresentamos aqui, dentre elas: S_2 – *Analisar o gráfico da função*; S_3 – *Encontrar a expressão da função*; S_4 – *Encontrar a derivada de uma função integral*; S_5 – *Encontrar a integral uma função integral*; S_6 – *Resolver problemas de acumulação e de taxa de variação*.

Achamos válido ressaltar que a grande vantagem do micromundo, do nosso ponto de vista, é a possibilidade de poder ser modelado e permitir a interação entre o aluno e a sua interface, através da manipulação direta, em situações de resolução de problemas relativamente novas.

Dessa forma, a combinação dos requisitos apontados nas pesquisas integra a caracterização de um micromundo que ajuda a otimizar a ideia da relação inversa do teorema fundamental através das situações que poderão ser desenvolvidas.

O Quadro evidencia outras funcionalidades que foram integradas como requisitos, podendo ainda serem aperfeiçoadas ou ampliadas para que se tornem mais específicas e garantam a eficiência das práticas.

A transposição informática dos objetos matemáticos foi cuidadosamente escolhida através de um sistema de variáveis que visou a exploração dos fenômenos que podem surgir na interface. Ou seja, a combinação entre as funcionalidades e requisitos podem levar à implementação dos elementos que a compõem, os *objetos digitais*. Portanto, eles podem ser utilizados pelo desenvolvedor para o design de interação, fornecendo ações a serem executadas pelo usuário.

5 Considerações finais

O artigo teve como objetivo explicitar uma parte do percurso de modelização do Teorema Fundamental do Cálculo para constituir a caracterização de um sistema micromundo que foi concebido em nossa tese de doutorado (OLIVEIRA, 2022).

A integração entre a TAD e a EDI permitiu que as tarefas de investigação e as técnicas utilizadas, fornecidas por estas abordagens, compusessem as justificativas pelos resultados obtidos. Essa dinâmica praxeológica no modelo de processo ocorreu com o vínculo entre a parte prática e parte teórica, no sentido de que uma influencia e, ao mesmo tempo, depende da outra.

O Teorema Fundamental do Cálculo é um exemplo notável na história do cálculo que declara explicitamente a relação inversa entre diferenciação e integração, que antes estava apenas implícita nos resultados dos problemas de área e de tangente. Por outro lado, a análise das pesquisas em relação à dimensão cognitiva apontou dificuldades na compreensão dos conceitos de variação e acumulação da área, do significado de variáveis, continuidade de uma função e representação gráfica, dentre outros aspectos que também foram evidenciados.

Do ponto de vista didático, identificamos algumas características relacionadas à forma de ensinar, os tipos de atividades, os conceitos matemáticos e as escolhas didáticas. A ausência

da relação inversa entre os conceitos de integração e derivação, da coordenação entre os registros de representação, a priorização de situações de algoritmização e mecanicismo do assunto, as limitações na exploração gráfica, foram os mais apontados nas pesquisas.

As análises das dimensões e do modelo praxeológico permitiram fazer a caracterização do micromundo, levando em conta as especificações relativas aos tipos de tarefas que ajudam a otimizar a relação inversa entre os processos de integração e derivação. Essa etapa privilegiou os objetos que podem ser representados na interface com as suas funcionalidades conceituais, ou seja, cada objeto foi considerado como um possível instrumento da atividade matemática que permite desenvolver técnicas para realizar certas tarefas.

Com a modelização que realizamos, inferimos que a análise dos processos de transposição adquiriu uma nova funcionalidade, pois conseguimos apontar alguns tipos de situações que o micromundo pode produzir. Por conseguinte, a descrição do saber para o sistema evidenciou os tipos de objetos que o sujeito irá manipular durante a sua interação, dadas as suas funcionalidades.

É relevante destacar, por fim, o potencial da comunicação entre a EDI e a TAD, por meio da conexão dinâmica entre o bloco prático e o bloco teórico da praxeologia de pesquisa, e poder antecipar as situações para especificar um micromundo em relação a algum domínio do conhecimento.

Referências

- ALONSO, E. P. **Aspectos visuais e gráficos do Teorema Fundamental do Cálculo**. 2017. 193f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p. 193. 2017.
- ARREDONDO, M. G. R.; ARMENTA, E. T.; MOLL, V. F. Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 26, n. 2, p. 69-109, 2014.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.
- ARTIGUE, M.; BOSCH, M. Reflection on Networking Through the Praxeological Lens. In: Bikner-Ahsbans, A.; Prediger, S. (eds). **Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education**. Advances in Mathematics Education. Springer, Cham. 2014. p. 249-265.
- BALACHEFF, N.; BELLEMAIN, F. Conhecimento, a Pedra Angular do Design de Tel. **Revista Tópicos Educacionais**, Recife, v. 17, n. 1-3, p. 31-59, 2007.
- BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999.
- CAMPOS, R. P. **A abordagem do Teorema Fundamental do Cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. 2007. 202f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em:

<https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11269/1/Ronaldo%20Pereira%20Campos.pdf>. Acesso em: 30 ago. 2023.

CHAACHOUA, H. T4TEL: un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. *In*: Pilet, J. ; Venda, C. (eds). **Actes du Séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM**. Paris: IREM de Paris, 2018. p. 8-25.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné**. Paris: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. Conceitos fundamentais da Didáctica: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. *In*: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 115-153.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino**. 2013. 324f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 324. 2013.

LAGRANGE, J. B. L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 1, n. 43, p. 1-30, 2000.

MATEUS, P. **Cálculo Diferencial e Integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica**. 2007. 188f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 188. 2006.

OLIVEIRA, P. B. **Modelização do Teorema Fundamental do Cálculo para um Sistema Micromundo à luz da Teoria Antropológica do Didático**. 2022. 302f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p. 302. 2022.

PALARO, L. A. **A concepção de educação matemática de Henri Lebesgue**. 2022. 340f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 340. 2006.

PICONE, D. F. B. **Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo**. 2007. 126f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 126. 2007.

QUINTERO, E.; SALINAS, P. Producción multimodal de signos en la apropiación de relaciones entre función y derivada. **Opción**, Maracaibo, v. 31, n. 5, p. 739-762, 2015.

TIBÚRCIO, R. S. **Processo de desenvolvimento de software educativo: um estudo da prototipação de um software para o ensino de Função**. 2016. 112f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p. 112. 2016.

TIBÚRCIO, R. S. **A Engenharia Didático-Informática: uma metodologia para a produção de software educativo**. 2020. 195f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco. Recife, p. 195. 2020.

**Submetido em 04 de Dezembro de 2022.
Aprovado em 29 de Março de 2023.**