



O problema combinado de planejamento da produção e corte de estoque sob incertezas: Aplicação em fábricas de móveis de pequeno porte

The integrated problem of production planning and cutting stock under uncertainties: Application in small-scale furniture plants

Douglas Alem¹
Reinaldo Morabito²

Resumo: Esse trabalho investiga um problema combinado de planejamento da produção e corte de estoque comum em fábricas de móveis de pequeno porte, onde os custos de produção envolvidos no processo de manufatura e as demandas dos produtos não são conhecidos com precisão. Para lidar com essas incertezas, foram propostos modelos de otimização robusta que permitem controlar o conservadorismo da solução de acordo com a atitude do decisor em relação ao risco. Experimentos computacionais baseados em dados reais de uma planta moveleira mostraram que é possível obter soluções robustas sem sacrificar em demasia o custo total. Além disso, observou-se que estratégias tipicamente utilizadas na prática para lidar com as incertezas podem gerar planos de produção com custos totais proibitivos.

Palavras-chave: Planejamento da produção. Fábricas de móveis. Custos incertos. Demandas incertas. Otimização robusta.

Abstract: *This paper investigates an integrated production planning and cutting stock problem that is common in small-scale furniture plants, in which the production costs involved in the manufacturing process and the demands for the products are not known precisely. To deal with these uncertainties, robust optimization models that control the conservatism of the solution according to the attitude of the decision maker towards risk were proposed. Computational experiments based on real data from a furniture plant showed that it is possible to obtain robust solutions without overly sacrificing the total cost. In addition, it was observed that commonly used strategies to deal with uncertainty issues can result in production plans with prohibitive total costs.*

Keywords: *Production planning. Furniture plants. Uncertain costs. Uncertain demands. Robust optimization.*

1 Introdução

O processo produtivo de móveis residenciais em fábricas de pequeno porte consiste, basicamente, no corte de placas de algum tipo de matéria-prima, como madeira, compensado ou MDF (*medium density fiberboard*), para produzir as peças necessárias de cada tipo de móvel. Por exemplo, para montar a cômoda ilustrada na Figura 1, é necessário produzir as cinco peças detalhadas na Tabela 1, as quais diferem pelas dimensões, espessura, comprimento e largura. A partir das demandas dos produtos finais (armários, camas, cômodas, criados, mesas, etc.), é preciso fazer a explosão dos produtos nas peças que os compõem e direcionar as quantidades requeridas na montagem dos móveis aos setores responsáveis.

Entretanto, antes de se iniciar o processo produtivo, o setor responsável pelo planejamento e controle da produção deve tomar algumas decisões referentes às políticas de produção, estocagem e distribuição de móveis ao longo de um horizonte de planejamento finito. Inicialmente, estimadas as demandas dos produtos finais (guarda-roupas, camas, cômodas, criados-mudos, mesas, etc.), são decididos os tipos e quantidades de móveis que serão produzidos em cada período, com base na capacidade disponível de máquinas, equipamentos e mão de obra, no nível atual de estoque e nas datas de entrega. Como consequência das decisões sobre os lotes de produção dos produtos, tem-se os lotes de produção das peças que os compõem. Nesse momento, é preciso determinar

¹ Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, CEP 18052-780, Sorocaba, SP, Brasil, e-mail: douglas@ufscar.br

² Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, CEP 13565-905, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: morabito@ufscar.br

como as placas devem ser cortadas para gerar os lotes de peças, o que corresponde a resolver um problema de corte de estoque bidimensional para obter os padrões de corte bidimensionais (maneiras específicas de cortar as placas para produzir os itens demandados), ou as frequências de utilização de padrões de corte selecionados *a priori*.

Essa é uma prática comum de empresas moveleiras de pequeno porte, em que as decisões sobre o corte das peças são tomadas a partir das informações dos lotes de produção de uma maneira relativamente independente. Ou seja, a solução do problema de dimensionamento de lotes (PDL) é utilizada como dado de entrada do problema de corte de estoque (PCE), sem haver trocas de informações e interações para as soluções de ambos os problemas. Essa visão simplificada de planejar a produção pode resultar em algumas dificuldades, como: (i) a geração de padrões de corte com baixa produtividade de peças, o que aumenta o desperdício de material; e (ii) o número elevado de preparações das máquinas seccionadoras, que consome capacidade de produção. Como consequência de (i) e (ii), o custo total de produção pode se tornar desnecessariamente alto, comprometendo a competitividade da empresa no mercado. Essa situação é ainda mais grave quando o custo das placas representa uma parte considerável do custo do produto final.

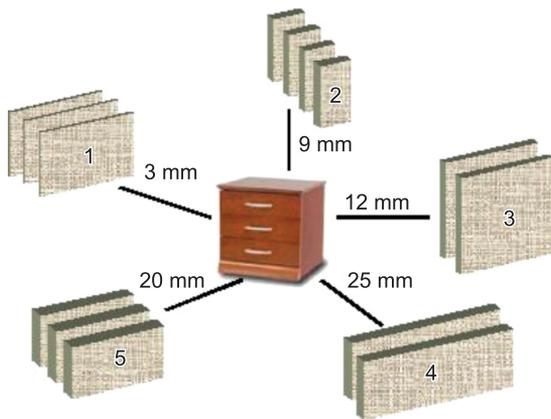


Figura 1. Peças que compõem o produto final cômoda.

Por outro lado, quando o dimensionamento de lotes de produção e a programação do corte das placas em estoque são resolvidos conjuntamente, há uma tendência em se antecipar a produção de lotes de peças de períodos futuros, na tentativa de produzir padrões de corte com menos desperdício (uma vez que, em geral, é mais fácil determinar boas combinações de peças na placa quando o sortimento de peças é maior) e/ou reduzir o número de preparações da máquina seccionadora ao longo do horizonte de planejamento. Todavia, conforme mais lotes são antecipados, aumenta-se o custo de estoque e uma tendência oposta de postergar a produção pode ser observada. Na prática, antecipar a produção e incorrer em custos de estocagem pode ser uma estratégia mais interessante do que postergar a produção e correr o risco de atrasar o atendimento da demanda, uma vez que os atrasos nas entregas dos produtos comprometem o nível de serviço da empresa. É este tipo de decisão que, segundo Gramani e França (2006), define o *problema combinado de dimensionamento de lotes e corte de estoque*.

Embora não se tenham muitos trabalhos na literatura que abordem a integração de problemas de planejamento da produção, existe uma crescente motivação para o estudo desse tema. Na revisão da literatura realizada em Drexl e Kimms (1997), os autores ressaltaram que os problemas de dimensionamento de lotes e programação da produção podem interagir com outras atividades de uma indústria, como o planejamento da distribuição, a programação de projetos e problemas de corte e empacotamento. Os autores concluíram ainda que a coordenação desses problemas pode diminuir os altos custos de transação. Thomas e Griffin (1996) enfatizaram que existe uma tendência em tratar problemas de planejamento e programação da produção de forma integrada, e Pochet e Wolsey (2006) aludiram à integração de modelos de planejamento da produção para melhorar a produtividade das operações em um sistema de produção. Mais recentemente, Jans e Degraeve (2008) defenderam que a integração do dimensionamento de lotes dentro de modelos mais gerais de planejamento da produção é uma interessante área para pesquisas futuras. Além disso, os autores

Tabela 1. Detalhamento das peças que compõem a cômoda: espessura, comprimento, largura e quantidade requerida na produção de um produto.

Tipo de peça	Espessura (mm)	Comprimento (mm)	Largura (mm)	Quantidade requerida
Contrafundo	3	710	535	2
Lateral	9	1062	530	2
Fundo das gavetas	12	647	453	6
Lateral gaveta multiuso	20	440	65	2
Tampo e base	25	970	570	2

discutem que os modelos integrados poderiam levar em consideração a coordenação entre várias plantas e atividades como o arranjo de carga na distribuição dos produtos.

A maioria dos trabalhos envolvendo a integração do dimensionamento de lotes e o corte de estoque foi desenvolvido somente para o caso determinístico, como em Nonas e Thorstenson (2000, 2008), Menon e Schrage (2002), Correia, Oliveira e Ferreira (2004), Poltroniere et al. (2008), Ghidini (2009) e Santos, Araújo e Rangel (2011). Mesmo com as dificuldades computacionais devido à complexidade do problema, os trabalhos acima apresentados obtiveram resultados numéricos promissores que mostraram a importância de se combinar decisões de dimensionamento de lotes e corte de estoque.

No presente trabalho, é proposto um modelo matemático para o problema combinado de planejamento da produção e corte de estoque baseado no caso de uma típica planta moveleira de pequeno porte, em que os processos de corte e furação são os gargalos de produção. O modelo integrado também considera que os custos da função objetivo do problema e as demandas dos produtos não são valores conhecidos com exatidão. Por exemplo, custos de produção dependem dos custos de aquisição de matéria-prima que, por sua vez, dependem de fatores econômicos inerentemente incertos, principalmente se o horizonte de planejamento for constituído por vários meses. As demandas, por sua vez, dependem de outros fatores aleatórios, como gosto e perfil do consumidor, situação econômica, dentre outros. Na prática, ainda é comum a aproximação dos valores incertos e aleatórios por valores médios ou de pior caso. Se por um lado o planejamento a partir de valores médios ignora a variabilidade das variáveis aleatórias e pode gerar planos inviáveis na prática, por outro lado, adotar planos mais conservadores para mitigar a ação das incertezas pode subestimar a capacidade de produção, ocasionando, por exemplo, contratação desnecessária de turnos e/ou funcionários adicionais.

Diferentemente dos modelos baseados em programação estocástica, os modelos de otimização robusta consideram que os parâmetros incertos são variáveis aleatórias limitadas num suporte estabelecido *a priori* e otimizam o problema numa perspectiva de pior caso intervalar. Neste trabalho, são desenvolvidos três modelos robustos: o primeiro considera apenas os custos incertos; o segundo apresenta a formulação robusta equivalente para lidar com as demandas incertas e, finalmente, o terceiro combina custos e demandas incertos num mesmo problema de otimização, cuja formulação conservadora não permite o *trade off* entre robustez e desempenho além do intervalo $[0,1]$. Os resultados obtidos confirmam alguns *insights* já relacionados em trabalhos da literatura e ainda indicam que, em geral, não é

preciso sacrificar muito a solução ótima para obter uma solução robusta quando apenas os custos variam. Comprova-se também a importância de determinar *budgets* de incertezas representativos, de modo a evitar soluções muito conservadoras. Ainda, uma série de simulações foi realizada para comparar as soluções robustas às estratégias comumente utilizadas na prática para lidar com as incertezas.

No melhor do nosso conhecimento, apenas Krichagina et al. (1998) e Alem e Morabito (2012) estudaram problemas integrados de planejamento da produção e corte de estoque sob incertezas. No primeiro, os autores desenvolveram uma metodologia para resolver um problema combinado de corte de estoque e dimensionamento de lotes numa empresa papelreira, em que as demandas dos produtos finais são variáveis aleatórias. Para resolver o problema, foi proposto um procedimento subótimo de dois passos, consistindo de programação linear no primeiro passo e análise Browniana no segundo. Em Alem e Morabito (2012), desenvolveu-se uma extensão do modelo combinado de lote e corte proposto em Gramani, França e Arenales (2009) para o caso em que demandas e custos são variáveis aleatórias simétricas e limitadas. Tal modelo também é aplicado ao planejamento da produção de empresas moveleiras, mas é diferente do modelo aqui proposto e estudado, principalmente porque não considera estágios de produção (corte, furação, etc.) de forma explícita, sendo a produção dos produtos finais o próprio gargalo do processo produtivo.

O campo de estudo da otimização robusta contém uma vasta coleção de trabalhos teóricos, como, por exemplo: construção dos conjuntos de incerteza (BERTSIMAS; SIM, 2004); propriedades das soluções e a tratabilidade computacional de formulações robustas (BERTSIMAS; SIM, 2006); a conexão entre medidas de risco e conjuntos de incerteza (CHEN et al., 2010); restrições de chance robustas (ERDOGAN; IYENGAR, 2006); otimização robusta em problemas de programação estocástica (CHEN; SIM; SUN, 2007); e formulações fortes para problemas de otimização robusta discretos (ATAMTÜRK, 2006). Além disso, a metodologia tem sido aplicada com sucesso em diversos contextos, entre os quais, destacam-se: (i) gestão da cadeia de suprimento (BEN-TAL et al., 2005; BERTSIMAS; THIELE, 2006) e controle de estoque (BIENSTOCK; OZBAY, 2008); (ii) planejamento agregado de produção em usinas de açúcar e álcool (PAIVA; MORABITO, 2012), indústrias de processamento de laranja (MUNHOZ; MORABITO, 2012) e colheita da uva (BOHLE; MATURANA; VERA, 2009); (iii) planejamento e programação da produção na gestão florestal (MATURANA et al., 2007; PALMA; NELSON, 2009); (iv) e programação da produção na indústria química (LI; IERAPETRITOU, 2008); (v) roteamento de veículos (SUNGUR; ORDÓÑEZ; DESSOUKY, 2008)

e roteamento de aeronaves (MARLA; BARNHART, 2009); (vi) fluxo em redes (ORDÓÑEZ; ZHAO, 2007), redes de sensores (YE; ORDÓÑEZ, 2008) e gerenciamento de projeto (ADIDA; JOSHI, 2009); (vii) gestão de portfólios e otimização financeira (BERTSIMAS; PACHAMANOVA, 2008; CHEN; KWON, 2012); (viii) sistemas de abastecimento de água (CHUNG et al., 2008); (ix) análise de envoltória de dados (DEA) (SADJADI; OMRANI, 2008); (x) teoria dos jogos (AGHASSI; BERTSIMAS, 2006); entre outras aplicações. O leitor pode consultar os trabalhos de Beyer e Sendhoff (2007) e de Bertsimas, Brown e Caramanis (2011) para um *survey* em otimização robusta.

O restante deste trabalho está dividido da seguinte maneira. A Seção 2 descreve, brevemente, o processo produtivo de uma empresa moveleira de pequeno porte. A Seção 3 apresenta um modelo determinístico para problema combinado de planejamento da produção e corte de estoque em fábricas de móveis. Esse modelo é diferente dos modelos apresentados em Gramani, França e Arenales (2009) e Alem e Morabito (2012). A Seção 4 revisa resumidamente a técnica de otimização robusta e apresenta importantes relações dos problemas equivalentes robustos. Na Seção 5, são desenvolvidos três modelos de otimização robusta, com custos incertos, com demandas incertas e com custos e demandas incertas simultaneamente, com base no modelo determinístico da Seção 3. A Seção 6 ilustra e analisa alguns exemplos numéricos baseados numa planta moveleira real. Por fim, a Seção 7 apresenta as considerações finais e as perspectivas de continuidade deste trabalho.

2 Processo produtivo numa planta moveleira

Conforme mencionado, o problema de planejamento da produção estudado nesse trabalho foi baseado numa típica planta moveleira de pequeno porte, situada no polo moveleiro do noroeste do Estado de São Paulo. Este polo, considerado o segundo maior do Brasil, é constituído, majoritariamente, por empresas de micro e pequeno porte que atuam, principalmente, na produção de móveis residenciais. A empresa visitada produz, essencialmente, móveis residenciais como camas de solteiro e casal, cômodas, criados e armários de dormitório com 3, 4 e 5 portas, em diversas cores diferentes (mogno, marfim, cerejeira, tabaco e tabaco com branco).

As etapas do processo de produção de uma típica empresa moveleira de pequeno porte são resumidas a seguir. **Corte:** primeiro estágio de produção em que as placas de MDF são cortadas segundo as dimensões dos itens que irão compor o móvel. **Furação:** segundo estágio de produção, cujo objetivo é fazer os furos e vincos nas peças cortadas para seu posterior encaixe e

montagem do móvel. Como é comum haver furadeiras que só podem furar uma peça por vez, o setor de furação pode também resultar no gargalo de produção.

Acabamento e pintura: nesse estágio, as peças passam por diversas máquinas, como lixadora, prensa e cola de borda. Ao saírem do setor de acabamento, as peças passam pelo setor de pintura, constituído por máquinas de pintura ultravioleta, estufas, entre outras. Posteriormente, as peças são empacotadas juntamente com seus acessórios (pregos, parafusos, entre outros) e são armazenadas no estoque até a data de entrega. A representação esquemática desse processo é ilustrada na Figura 2. Mais detalhes sobre a indústria moveleira do noroeste de São Paulo, assim como algumas especificidades dos processos produtivos, podem ser encontrados em Cavali (2004), Figueiredo (2006), Mosquera (2007), Santos (2008), Ghidini (2009), Alem (2011) e Vanzela (2012).

3 Formulação matemática do problema combinado na indústria de móveis

Com base em visitas realizadas na empresa moveleira descrita na Seção 2, sem perda de generalidade, apenas os processos de corte e furação foram considerados no modelo, por constituírem os processos gargalos do sistema produtivo em questão. A ideia básica do modelo é combinar decisões de dimensionamento de lotes – níveis de produção, estoque e atraso – com decisões de corte de estoque, como quantidade de padrões de corte necessários para atender à demanda interna de produção, programação de *setups* e horas extras necessárias para executar as operações de corte e furação. Admite-se que não há restrições sobre as quantidades de placas de MDF disponíveis em estoque para serem cortadas, ou sobre as outras matérias-primas necessárias para montar os móveis. Além disso, todos os padrões de corte são supostamente conhecidos e definidos a priori, como na prática industrial. A seguir, tem-se a notação matemática dos modelos.

Conjuntos de índices

I: Conjunto de produtos, $I = \{1, \dots, I\}$.

J: Conjunto de padrões de corte, $J = \{1, \dots, J\}$.

P: Conjunto de peças, $P = \{1, \dots, P\}$.

T: Conjunto de períodos $T = \{1, \dots, T\}$.

Os conjuntos de produtos, padrões de corte, peças e períodos são indexados por i , j , p e t , respectivamente. A menos que se afirme o contrário, admite-se que o índice i é válido para todo o conjunto I (similarmente para os demais). Supõe-se que “produto i ” quer dizer “produto do tipo i ”, como um armário de 3 portas. De forma similar, “padrão de corte j ” refere-se a “padrão de corte do tipo j ”, como um padrão que utiliza uma placa de 20 mm de espessura e tamanho $2,75 \times 1,83$ m, para produzir um determinado conjunto

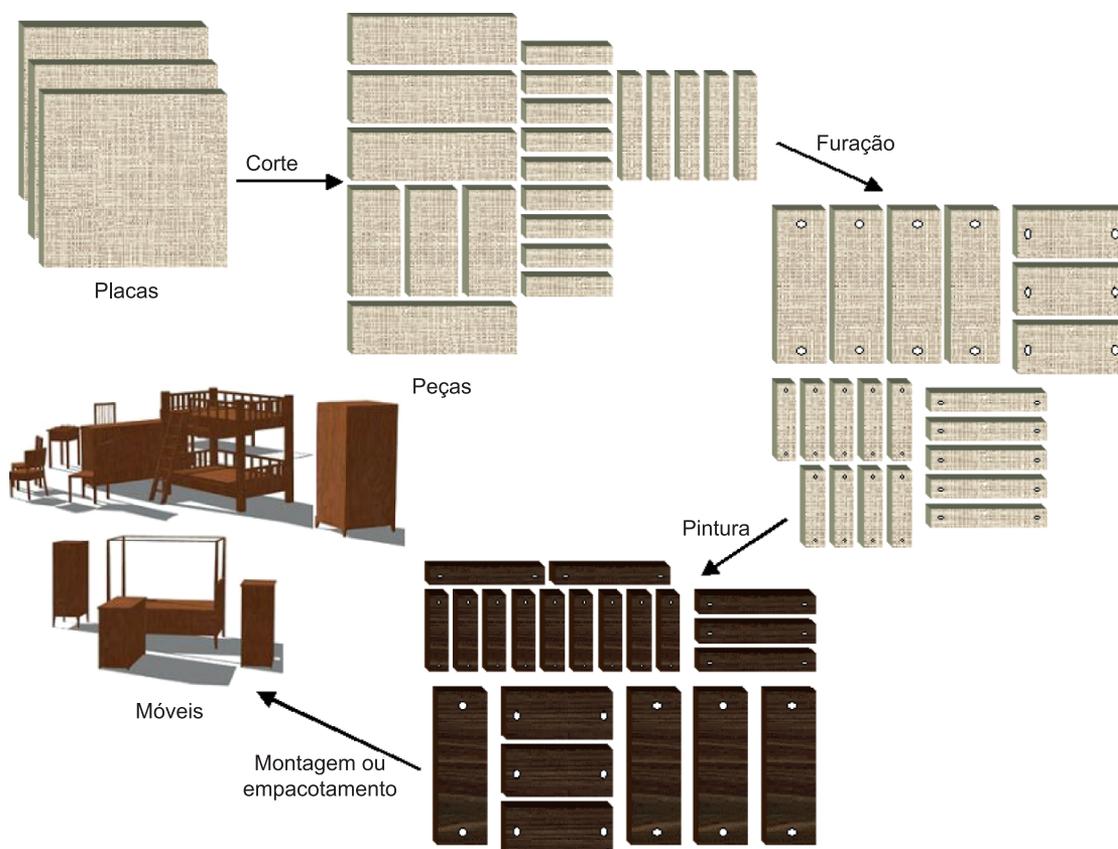


Figura 2. Processo produtivo simplificado de uma planta moveleira (ALEM, 2011).

de peças. Da mesma forma, “peça p ” significa “peça do tipo p ”, como uma base de criado-mudo de 600,0 mm de largura por 437,0 mm de altura. Considere, adicionalmente, os seguintes dados de entrada e variáveis de decisão.

Dados de entrada

C_{it} : Custo de produzir uma unidade do produto i no período t .

h_{it}^+ : Custo de estocar uma unidade do produto i ao final do período t .

h_{it}^- : Custo de falta/atraso de uma unidade do produto i ao final do período t .

o_t : Custo de horas extras no período t .

a_{pj} : Quantidade de peças p no padrão de corte j .

d_{it} : Demanda do produto i no período t .

r_{pi} : Quantidade de peças p necessárias para compor uma unidade do produto i .

v_j : Tempo necessário para produzir o padrão de corte j .

ϕ_j^I : Tempo de preparação da máquina seccionadora para produzir o padrão de corte j .

δ_{pj} : Função indicadora que vale 1, se $a_{pj} > 0$, e vale 0, caso contrário.

b_p : Tempo necessário para furar a peça p .

ϕ_p^II : Tempo de preparação da furadeira para furar a peça p .

C_t^I : Capacidade regular (em unidades de tempo) da máquina seccionadora no período t .

C_t^E : Capacidade extra (em unidades de tempo) da máquina seccionadora e da furadeira no período t .

C_t^{II} : Capacidade regular (em unidades de tempo) da furadeira no período t .

Q : Número suficientemente grande.

Variáveis de decisão

X_{it} : Quantidade do produto i produzido no período t .

I_{it}^+ : Quantidade do produto i estocado ao final do período t .

I_{it}^- : Quantidade do produto i em atraso ao final do período t .

Y_{jt} : Frequência com que o padrão de corte j é utilizado no período t .

Z_{jt} : Variável binária que vale 1, se a máquina seccionadora está preparada para produzir o padrão de corte j no período t ; e vale 0, caso contrário.

O problema combinado pode ser formulado como um problema de otimização inteira mista, cujo objetivo é determinar um plano de produção ótimo que minimize o custo de produção, custo de estoque,

custo de atraso e custo de hora extra, de modo a satisfazer as restrições (2)–(9) apresentadas a seguir.

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} c_{it} X_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} h_{it}^+ I_{it}^+ + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} h_{it}^- I_{it}^- + \sum_{t \in T} o_t O_t \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a: } X_{it} + I_{i,t-1}^+ - I_{it}^+ + I_{it}^- - I_{i,t-1}^- = d_{it}, i \in I, t \in T \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} a_{pj} Y_{jt} \geq \sum_{i \in I} r_{pi} X_{it}, p \in P, t \in T \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J} (v_j Y_{jt} + \varphi_j^I Z_{jt}) \leq C_t^I + O_t, t \in T \quad (4)$$

$$\sum_{p \in P} (b_p a_{pj} Y_{jt} + \varphi_p^II \delta_{pj} Z_{jt}) \leq C_t^{II} + O_t, t \in T \quad (5)$$

$$0 \leq O_t \leq C_t^E, t \in T \quad (6)$$

$$Y_{jt} \leq QZ_{jt}, j \in J, t \in T \quad (7)$$

$$X_{it}, I_{it}^+, I_{it}^- \geq 0, i \in I, t \in T \quad (8)$$

$$Z_{jt} \in \{0, 1\}, Y_{jt} \geq 0 \text{ e inteiros}, j \in J, t \in T \quad (9)$$

As restrições (2) representam o balanceamento de estoque dos produtos. Sem perda de generalidade, estoques e atrasos em $t = 0$ são considerados nulos. As restrições (3) asseguram que a demanda interna de todos os tipos de peças seja satisfeita. Estas restrições integram os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque, uma vez que relacionam as variáveis X_{it} , que definem o tamanho dos lotes do produto i no período t , e as variáveis Y_{jt} , que definem a quantidade de placas cortadas, segundo o padrão de corte j no período t . As restrições (4) asseguram que a capacidade total da máquina seccionadora (capacidade regular e extra, em unidades de tempo) não seja ultrapassada. As restrições (5) asseguram que a capacidade total da furadeira (capacidade regular e extra, em unidades de tempo) não seja ultrapassada.

Note que a mesma variável binária foi usada para indicar a preparação nos estágios de corte e furação. Isso foi feito para sincronizar ambos os estágios de produção, i.e., a furadeira precisa ser preparada para processar a peça p no período t somente se a operação anterior de corte tiver gerado pelo menos uma peça do tipo p no mesmo período do horizonte de planejamento. Como consequência, garante-se que todas as peças cortadas são subsequentemente furadas, ou seja, não há estoque intermediário de peças entre os dois estágios de produção. Matematicamente, definiu-se uma função indicadora $\delta_{pj} = 1$ (dado de entrada do problema) se o padrão de corte j contém pelo menos uma peça p , e $\delta_{pj} = 0$, caso

contrário. Se $Z_{jt} = 0$, então nenhuma peça é obtida pelo processamento do padrão de corte j no período t e, conseqüentemente, a furadeira não precisa ser preparada, o que reduz a expressão $\varphi_p^II \delta_{pj} Z_{jt}$ a zero. Por outro lado, quando $Z_{jt} = 1$, é preciso analisar se o padrão de corte j origina peças do tipo p ou não. No primeiro caso, como $\delta_{pj} = 1$, o termo referente ao tempo de preparação é ativado: considerando que $Z_{jt} = 1$ e $\delta_{pj} = 1$, a expressão $\varphi_p^II \delta_{pj} Z_{jt}$ é reduzida ao tempo de preparação $\varphi_p^II > 0$. No segundo caso, $\delta_{pj} = 0$ e a expressão referente ao tempo de preparação é desativada.

Neste trabalho, considerou-se que ambos os estágios de produção usam uma capacidade igual, que é medida em turnos de trabalho, e que há trabalhadores comuns em ambos os estágios. Assim, a hora extra é uma extensão da hora de trabalho regular para todos os trabalhadores, e a sua utilização também é igual nos dois estágios de produção. Essa suposição reflete o caso de empresas moveleiras de pequeno porte, mas a extensão para considerar diferentes capacidades e horas extras é direta. As restrições (6) garantem que a quantidade máxima de horas extras utilizadas da máquina seccionadora e da furadeira seja respeitada. As restrições (7) garantem que só pode haver produção do padrão de corte j no período t se a máquina seccionadora estiver preparada para cortá-lo. Finalmente, as restrições (8) e (9) referem-se ao domínio das variáveis de decisão.

4 Background em otimização robusta

Neste trabalho, adotou-se a metodologia de otimização robusta sob o enfoque do *Modelo de Dados Incertos U* (BEN-TAL; NEMIROVSKI, 2000), descrito da seguinte forma:

Definição (Modelo de Dados Incertos U). Dado o problema de otimização $\min_{x \geq 0} \{c^T x \mid Ax \leq b\}$,

define-se J_i como o conjunto de coeficientes da linha i da matriz tecnológica A sujeito à incerteza. Cada elemento de A , a saber, a_{ij} , $j \in J_i$, é modelado como uma variável aleatória simétrica, independente e limitada, \tilde{a}_{ij} , que pertence ao intervalo $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ centrado no ponto a_{ij} . Associado ao dado incerto \tilde{a}_{ij} , define-se o seu desvio em relação ao valor nominal como $z_{ij} = (\tilde{a}_{ij} - a_{ij}) / \hat{a}_{ij}$ que pertence ao intervalo normalizado $[-1, 1]$.

Embora os primeiros passos em otimização robusta linear tenham sido dados no trabalho pioneiro de Soyster (1973), aparentemente, a expressão otimização robusta foi usada pela primeira vez no trabalho de Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995) para denominar uma nova metodologia de programação estocástica composta da abordagem por cenários e da programação

por metas. A formulação robusta de Soyster pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_j c_j x_j \\ & \text{Sujeito a: } \sum_j a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} x_j \leq b_i, \forall i \quad (10) \\ & \quad x_j \geq 0, \forall j. \end{aligned}$$

O modelo de Soyster (10) considera o caso mais desfavorável de variação dos dados incertos, isto é, quando esses atingem o extremo do intervalo de variação. Consequentemente, o valor da função objetivo é muito deteriorado para garantir a factibilidade da restrição. Diz-se, nesse caso, que a metodologia de Soyster é muito conservadora. Para superar o problema do conservadorismo das soluções de Soyster, alguns trabalhos enfocaram formulações robustas alternativas menos conservadoras, como Ben-Tal e Nemirovski (1998, 1999), El-Ghaoui e Lebret (1997) e El-Ghaoui, Oustry e Lebret (1998). Particularmente, Ben-Tal e Nemirovski (2000) desenvolveram uma formulação robusta para permitir o *trade off* entre a robustez e o desempenho:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_j c_j x_j \\ & \text{Sujeito a: } \sum_j a_{ij} x_j + \gamma \left(\frac{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} x_j + \varepsilon_i \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2}}{\varepsilon_i \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2}} \right) \leq b_i, \forall i \quad (11) \\ & \quad x_j \geq 0, \forall j. \end{aligned}$$

em que γ é um nível de variabilidade dado ($\gamma = 10\%$, por exemplo) e ε_i é um parâmetro positivo definido pelo decisor, cuja função é controlar o nível de confiabilidade, i.e., a probabilidade máxima de violação da restrição i , dada pela expressão $k = \exp(-\varepsilon_i^2 / 2)$ (por exemplo, $k = 10^{-6}$). A desvantagem da formulação (11) de Ben-Tal e Nemirovski (2000) é a sua intratabilidade computacional (devido à não linearidade da i -ésima restrição), especialmente em se tratando de problemas com variáveis discretas. No pioneiro trabalho de Bertsimas e Sim (2003, 2004), os autores propuseram uma metodologia de otimização robusta linear baseada em conjuntos de incertezas poliédricos, de forma a evitar ambos os problemas de conservadorismo da solução e da possível intratabilidade da formulação não linear. Os autores argumentaram que é improvável a realização de todas as variáveis aleatórias coincidirem com os respectivos valores de pior caso, como preconiza o modelo de Soyster (1973). Então, os autores propuseram um número máximo de variáveis aleatórias que pode assumir o respectivo valor de pior caso, que ficou conhecido por *budget* de incerteza e representado

pelo parâmetro Γ . Impondo-se tal *budget*, o desvio total das variáveis aleatórias para cada restrição i é assim limitado: $\sum_{j \in J_i} |z_{ij}| \leq \Gamma_i, \forall i \in J_i$.

O parâmetro Γ_i pertence ao intervalo $[0, |J_i|]$ e é usado para controlar o grau de conservadorismo ou o nível de proteção da solução. Ao mesmo tempo, Γ_i serve para ajustar a atitude do decisor em relação ao risco. Por exemplo, $\Gamma_i = 0$ representa o caso nominal, em que a solução não é nada conservadora e está desprotegida das incertezas que afetam o problema. Nesse caso, diz-se que o decisor é neutro em relação ao risco. Por outro lado, $\Gamma_i = |J_i|$ representa o pior caso, pois fornece proteção máxima à solução, mas é muito conservadora e reflete a atitude de um decisor totalmente averso ao risco. Entre esses extremos, o decisor pode escolher o valor do *budget* de incerteza mais adequado às suas preferências. O modelo de otimização robusta proposto por Bertsimas e Sim (2003, 2004) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_j c_j x_j \\ & \text{Sujeito a: } \sum_j a_{ij} x_j + \max_{\{S_i | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \Gamma_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \leq b_i, \forall i \quad (12) \\ & \quad x_j \geq 0, \forall j. \end{aligned}$$

A linearização da formulação (12) é baseada em dualidade forte. Dada uma solução x^* do problema (12), primeiramente, é preciso reescrever a *função de proteção* da i -ésima restrição, i.e.,

$$\beta(x^*, \Gamma_i) = \max_{\{S_i | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \Gamma_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} x_j^* \right\} \quad (13)$$

como o seguinte problema de otimização linear:

$$\begin{aligned} & \beta(x^*, \Gamma_i) = \text{Maximizar } \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| z_{ij} \\ & \text{Sujeito a: } \sum_{j \in J_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \quad (14) \\ & \quad 0 \leq z_{ij} \leq 1, \quad \forall j \in J_i, \end{aligned}$$

cujas soluções consistem de Γ_i variáveis z_{ij} fixadas em 1, e as outras $|J_i| - \Gamma_i$ variáveis fixadas em zero, uma vez que o objetivo é maximizar z_{ij} . Note que o problema (14) apresenta uma função objetivo não linear se x for uma variável de decisão. Por essa razão, o próximo passo é determinar o dual do problema (14) e incorporá-lo à formulação robusta original (12). Considere λ_i e μ_{ij} as variáveis duais associadas às restrições de (14). Assim, o dual do problema (14) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \Gamma_i \lambda_i + \sum_{j \in J_i} \mu_{ij} \\ \text{Sujeito a: } & \lambda_i + \mu_{ij} \geq \hat{a}_{ij} x_j, \quad \forall i, j \in J_i \quad (15) \\ & \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \\ & \mu_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in J_i. \end{aligned}$$

Como o problema (14) é factível e limitado para todo Γ_i , então seu dual correspondente (15) também é factível e limitado. Além disso, por dualidade forte, tem-se que as funções objetivos dos problemas (14) e (15) coincidem. Dessa maneira, é possível substituir a função de proteção do problema (13) pelo problema dual equivalente (15), e a formulação robusta linear torna-se:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum_j c_j x_j \\ \text{Sujeito a: } & \sum_j a_{ij} x_j + \Gamma_i \lambda_i + \sum_{j \in J_i} \mu_{ij} \leq b_i, \quad \forall i \\ & \lambda_i + \mu_{ij} \geq \hat{a}_{ij} x_j, \quad \forall i, j \in J_i \quad (16) \\ & x_j \geq 0, \quad \forall j \\ & \lambda_i, \mu_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in J_i. \end{aligned}$$

Basicamente, a formulação robusta (16) é uma composição entre a formulação nominal e o dual

$$Pr \left(\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j^* > b_i \right) \leq 1 - \Phi \left(\frac{\Gamma_i - 1}{\sqrt{|J_i|}} \right), \text{ em que } \Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy. \quad (17)$$

Isso significa que a probabilidade de violação da i -ésima restrição pode ser aproximada por uma função de distribuição de probabilidade acumulada de uma normal padrão. Ainda, a probabilidade de violação *independe* do problema específico, pois só é

$$\varepsilon_i = 1 - \Phi \left(\frac{\Gamma_i - 1}{\sqrt{|J_i|}} \right) \Rightarrow \frac{\Gamma_i - 1}{\sqrt{|J_i|}} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon_i) \Rightarrow \Gamma_i = 1 + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon_i) \sqrt{|J_i|}. \quad (18)$$

A extensão da presente abordagem robusta para considerar a incerteza nos coeficientes da função objetivo ou no vetor independente b_i é direta. No primeiro caso, o *Modelo de Dados Incertos U* é um pouco diferente, uma vez que apenas os desvios positivos (mais desfavoráveis) são considerados, i.e., $\tilde{c}_j \in [c_{ij}, c_j + \hat{c}_j]$ para todo $j \in J_i$. Todavia, ainda é possível utilizar as técnicas apresentadas nessa seção, simplesmente reescrevendo o custo total como uma restrição auxiliar e incorporando os coeficientes incertos à matriz tecnológica A . No caso de incerteza no vetor independente, introduz-se uma nova variável x_{n+1} ao modelo, de forma a reescrevê-lo como $Ax - bx_{n+1} \geq 0$ com $x_{n+1} = 1$ para incluir b na matriz A (supondo-se que $j = 1, \dots, n$). Entretanto, essa abordagem não é atraente para analisar o *trade off* entre robustez e custo, pois a restrição i contém apenas um

da função de proteção. A expressão $\Gamma_i \lambda_i + \sum_{j \in J_i} \mu_{ij}$ fornece a proteção necessária da restrição i , mantendo a distância entre o lado direito b_i e o termo $\sum_j a_{ij} x_j$. Embora o número de restrições e variáveis (contínuas) cresça de acordo com o número de coeficientes incertos do problema, não é esperado que a formulação robusta seja mais difícil de resolver do que o problema nominal. Isso se dá porque a formulação robusta equivalente pertence à mesma classe do modelo nominal (Bertsimas e Sim, 2003, 2004). Essa é uma das razões do grande sucesso dessa metodologia, pois problemas discretos não se tornam mais intratáveis com a incorporação das incertezas, como poderia acontecer em programação estocástica, por exemplo.

A metodologia de Bertsimas e Sim (2003, 2004) garante que se, no máximo, Γ_i coeficientes \tilde{a}_{ij} , variarem, então o modelo (16) é *deterministicamente* factível, ou seja, sempre será factível. Porém, se mais coeficientes variarem, então não há mais garantia de factibilidade do modelo (16). Nesse caso, a metodologia de otimização robusta fornece alguns limitantes para determinar a probabilidade de violação do primeiro conjunto de restrição em (16). Seja x^* a solução do modelo de otimização robusta. Então, a probabilidade de violação da restrição i pode ser aproximada por:

preciso definir o conjunto de incertezas e o *budget* de incerteza. A partir da expressão (17) é ainda possível determinar valores para os *budgets* de incerteza. Note que se $Pr(\sum_j \tilde{a}_{ij} x_j^* > b_i) = \varepsilon_i$, então a probabilidade de violação pode ser escrita da seguinte forma:

elemento incerto. Assim, no presente trabalho é usada a metodologia proposta por Bertsimas e Thiele (2006).

5 Modelos de otimização robusta no planejamento da produção de fábricas de móveis

5.1 Planejamento da produção com custos incertos

A função objetivo (1) contém quatro fontes de incerteza: custos de produção, custos de estocagem, de atraso (ou perda de demanda) e de horas extras. Para reescrever o modelo (1)-(9) de modo a incorporar essas incertezas, considere o seguinte conjunto poliédrico-intervalar U :

$$U = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_{it}, \tilde{h}_{it}^+, \tilde{h}_{it}^-, \tilde{o}_t \in \mathbb{R}^+ \mid \tilde{c}_{it} \in [c_{it}, c_{it} + \hat{c}_{it}], (i, t) \in J^c; \tilde{h}_{it}^+ \in [h_{it}^+, h_{it}^+ + \hat{h}_{it}^+], (i, t) \in J^+; \\ \tilde{h}_{it}^- \in [h_{it}^-, h_{it}^- + \hat{h}_{it}^-], (i, t) \in J^-; \tilde{o}_t \in [o_t, o_t + \hat{o}_t], t \in J^o; \\ \sum_{(i,t) \in J^c} z_{it}^c \leq \Gamma^c; \sum_{(i,t) \in J^+} z_{it}^+ \leq \Gamma^+; \sum_{(i,t) \in J^-} z_{it}^- \leq \Gamma^- \sum_{t \in J^o} z_t^o \leq \Gamma^o \end{array} \right\} \quad (19)$$

O conjunto de incerteza (19) (ou espaço de incerteza) simplesmente mostra como as variáveis aleatórias estão modeladas. O equivalente robusto *não linear* da função objetivo com custos incertos pode ser visto como minimizar o máximo desvio dos custos sobre o conjunto de incerteza U . Note que o

máximo desvio das variáveis aleatórias é atingido no extremo superior de cada intervalo, ou seja, quando o desvio é positivo. Matematicamente, minimizar a função objetivo (1) levando-se em consideração a maximização das variáveis aleatórias sobre o conjunto U é o seguinte problema min-max:

$$\text{Minimizar}_{\mathbf{X}, \Gamma^+, \Gamma, \mathbf{O}} \left\langle \text{Maximizar}_U \sum_{(i,t) \in J^c} \tilde{c}_{it} X_{it} + \sum_{(i,t) \in J^+} \tilde{h}_{it}^+ I_{it}^+ + \sum_{(i,t) \in J^-} \tilde{h}_{it}^- I_{it}^- + \sum_{t \in J^o} \tilde{o}_t O_t \right\rangle \quad (20)$$

Ainda, dado um vetor $(\mathbf{X}^*, \mathbf{I}^{+*}, \mathbf{I}^{-*}, \mathbf{O}^*)$, pode-se escrever o problema (20) como o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{(z_{it}^c, z_{it}^+, z_{it}^-, z_t^o)} \sum_{(i,t) \in J^c} (c_{it} + \hat{c}_{it} z_{it}^c) \cdot X_{it}^* + \sum_{(i,t) \in J^+} (h_{it}^+ + \hat{h}_{it}^+ z_{it}^+) \cdot I_{it}^{+*} + \\ & \quad + \sum_{(i,t) \in J^-} (h_{it}^- + \hat{h}_{it}^- z_{it}^-) \cdot I_{it}^{-*} + \sum_{t \in J^o} (o_t + \hat{o}_t z_t^o) \cdot O_t^* \\ \text{Sujeito a: } & \sum_{(i,t) \in J^c} z_{it}^c \leq \Gamma^c; \sum_{(i,t) \in J^+} z_{it}^+ \leq \Gamma^+; \sum_{(i,t) \in J^-} z_{it}^- \leq \Gamma^-; \sum_{t \in J^o} z_t^o \leq \Gamma^o \\ & 0 \leq z_{it}^c \leq 1, (i, t) \in J^c \\ & 0 \leq z_{it}^+ \leq 1, (i, t) \in J^+ \\ & 0 \leq z_{it}^- \leq 1, (i, t) \in J^- \\ & 0 \leq z_t^o \leq 1, (t) \in J^o. \end{aligned} \quad (21)$$

O problema (21) poderia ser utilizado na obtenção do equivalente robusto, se fosse possível determinar *a priori* a solução $(\mathbf{X}^*, \mathbf{I}^{+*}, \mathbf{I}^{-*}, \mathbf{O}^*)$. Para quaisquer soluções $(\mathbf{X}, \mathbf{I}^+, \mathbf{I}^-, \mathbf{O})$, entretanto, o problema (21)

ainda é não linear, devido ao produto das variáveis primais e duais na função objetivo. Todavia, o problema dual correspondente naturalmente elimina tais não linearidades, como é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar}_{(\lambda^c, \lambda^+, \lambda^-, \lambda^o, \mu_{it}^c, \mu_{it}^+, \mu_{it}^-, \mu_t^o)} \Gamma^c \lambda^c + \Gamma^+ \lambda^+ + \Gamma^- \lambda^- + \Gamma^o \lambda^o + \\ & \quad + \sum_{(i,t) \in J^c} \mu_{it}^c + \sum_{(i,t) \in J^+} \mu_{it}^+ + \sum_{(i,t) \in J^-} \mu_{it}^- + \sum_{t \in J^o} \mu_t^o \\ \text{Sujeito a: } & \lambda^c + \mu_{it}^c \geq \hat{c}_{it} X_{it}, \quad \forall (i, t) \in J^c \\ & \lambda^+ + \mu_{it}^+ \geq \hat{h}_{it}^+ I_{it}^+, \quad \forall (i, t) \in J^+ \\ & \lambda^- + \mu_{it}^- \geq \hat{h}_{it}^- I_{it}^-, \quad \forall (i, t) \in J^- \\ & \lambda^o + \mu_t^o \geq \hat{o}_t O_t, \quad \forall t \in J^o \\ & \lambda^c, \lambda^+, \lambda^-, \lambda^o \geq 0 \\ & \mu_{it}^- \geq 0, \forall (i, t) \in J^-; \mu_{it}^o \geq 0, \forall (i, t) \in J^o \\ & \mu_{it}^c \geq 0, \forall (i, t) \in J^c; \mu_{it}^+ \geq 0, \forall (i, t) \in J^+. \end{aligned} \quad (22)$$

Claramente, o problema (22) é factível e limitado para todo $\Gamma \in [0, |J^c| + |J^+| + |J^-| + |J^o|]$ (note que $z_{it}^c = z_{it}^+ = z_{it}^- = z_{it}^o = 0$ é uma solução possível e que as variáveis de decisão são válidas apenas no intervalo $[0,1]$). Assim, por dualidade forte, o problema dual correspondente também é factível e

limitado. Ainda, as suas funções objetivos coincidem. Finalmente, incorporando-se o problema (22) na função objetivo não linear (21) e retornando ao problema de maximização inicial, tem-se a formulação robusta inteira mista para incorporar os custos incertos (23).

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} c_{it} X_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} h_{it}^+ I_{it}^+ + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} h_{it}^- I_{it}^- + \sum_{t \in T} o_t O_t + \Gamma^c \lambda^c + \\ & \lambda^+, \mu_{it}^+, \lambda^-, \mu_{it}^-, \lambda^o, \mu_t^o \\ & + \sum_{(i,t) \in J^c} \mu_{it}^c + \Gamma^+ \lambda^+ + \sum_{(i,t) \in J^+} \mu_{it}^+ + \Gamma^- \lambda^- + \sum_{(i,t) \in J^-} \mu_{it}^- + \Gamma^o \lambda^o + \sum_{t \in J^o} \mu_t^o \end{aligned}$$

Sujeito a: Restrições (2)–(9)

$$\begin{aligned} \lambda^c + \mu_{it}^c & \geq \hat{c}_{it} X_{it}, \quad \forall (i,t) \in J^c \\ \lambda^+ + \mu_{it}^+ & \geq \hat{h}_{it}^+ I_{it}^+, \quad \forall (i,t) \in J^+ \\ \lambda^- + \mu_{it}^- & \geq \hat{h}_{it}^- I_{it}^-, \quad \forall (i,t) \in J^- \\ \lambda^o + \mu_t^o & \geq \hat{o}_t O_t, \quad \forall t \in J^o \\ \lambda^c, \lambda^+, \lambda^-, \lambda^o & \geq 0 \\ \mu_{it}^c & \geq 0, \forall (i,t) \in J^c; \mu_{it}^+ \geq 0, \forall (i,t) \in J^+ \\ \mu_{it}^- & \geq 0, \forall (i,t) \in J^-; \mu_t^o \geq 0, \forall t \in J^o. \end{aligned} \tag{23}$$

Quando $\Gamma^c = \Gamma^+ = \Gamma^- = \Gamma^o = 0$ na expressão (23), as variáveis $(\lambda, \lambda^c, \lambda^+, \lambda^-, \lambda^o)$ admitem os respectivos valores dos seus RHS's, i.e., $\lambda^c = \hat{c}_{it} X_{it}$, $\lambda^+ = \hat{h}_{it}^+ I_{it}^+$, $\lambda^- = \hat{h}_{it}^- I_{it}^-$ e $\lambda^o = \hat{o}_t O_t$, para todo (i,t) . Assim, as parcelas $\sum \mu$ anulam-se e o valor da função objetivo não é deteriorado, o que corresponde a resolver o modelo determinístico (1)–(9).

reescreve-se a restrição (2) na forma de desigualdade, pois ela apresenta uma igualdade que pode não ser satisfeita para todas as realizações da demanda. Assim, a restrição (2) é redefinida da seguinte maneira. Defina o estoque do produto i no período t por $I_{it} = I_{it}^+ - I_{it}^-$. Dessa maneira, o estoque é irrestrito em sinal, podendo representar o estoque em mãos ou o atraso. Seja H_{it} a variável não negativa que representa o custo de estoque ou o custo de atraso do produto i no período t . Sabendo que $I_{it} = \sum_{\ell=1}^t (X_{i\ell} - d_{i\ell})$, a restrição (2) pode ser reformulada como o conjunto de restrições em (24).

5.2 Planejamento da produção com demandas incertas

Para aplicar a metodologia de otimização robusta ao Problema Combinado com demanda incerta,

$$\begin{aligned} H_{it} & \geq h_{it}^+ I_{it}^+ = h_{it}^+ \left[\sum_{\ell=1}^t (X_{i\ell} - d_{i\ell}) \right], \quad i \in I; \quad t \in T \\ H_{it} & \geq h_{it}^- I_{it}^- = h_{it}^- \left[-\sum_{\tau=1}^t (X_{i\ell} - d_{i\ell}) \right], \quad i \in I; \quad t \in T. \end{aligned} \tag{24}$$

Uma vez que $I_{it}^+ \cdot I_{it}^- = 0$ para cada par (i,t) , consequentemente apenas uma das restrições de (24) estará ativada em qualquer solução factível, para o

mesmo par (i,t) . Para reescrever o modelo (1)–(9) de modo a incorporar as demandas incertas, considere o seguinte conjunto poliédrico-intervalar U^d :

$$U^d = \left\{ \begin{aligned} & \tilde{d}_{i\ell} \in R^+ \mid \tilde{d}_{i\ell} \in [d_{i\ell} - \hat{d}_{i\ell}, d_{i\ell} + \hat{d}_{i\ell}], i \in I; \ell \in T \\ & z_{i\ell}^d = \frac{\tilde{d}_{i\ell} - d_{i\ell}}{\hat{d}_{i\ell}}, i \in I; \ell \in T \\ & \sum_{\ell=1}^t z_{i\ell}^d \leq \Gamma_{it}^d, i \in I; t \in T \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

Note no conjunto poliédrico-intervalar U^d que as demandas acumuladas $\tilde{d}_{i\ell}$ são variáveis aleatórias simétricas e limitadas. Considerando os *budgets* de incerteza $\Gamma_{it}^d \in [0, t]$, é possível escrever a variável aleatória $\tilde{d}_{i\ell}$ como uma combinação linear do seu valor nominal e do seu desvio, ou seja, $\tilde{d}_{i\ell} = d_{i\ell} + \hat{d}_{i\ell} z_{i\ell}^d$. Baseado no trabalho de Bertsimas e Thiele (2006), os *budgets* de incerteza são caracterizados como se segue:

- *i.* $\Gamma_{i1}^d \leq \Gamma_{i2}^d \leq \dots \leq \Gamma_{iT}^d$, em que $T = |T|$ é o último período do horizonte de planejamento. Essa suposição implica que Γ_{it}^d é não decrescente com o período t , para qualquer i .
- *ii.* $\Gamma_{it}^d - \Gamma_{i,t-1}^d \leq 1$, $i \in I$; $t \in T$. Essa suposição implica que o aumento em Γ_{it}^d é igual ou menor que o aumento nos períodos.

$$\text{Minimizar } \sum_{(X, H, O)} \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} c_{it} X_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} H_{it} + \sum_{t \in T} o_t O_t$$

Sujeito a: Restrições (5) – (9)

$$H_{it} \geq h_{it}^+ \left[\sum_{\ell=1}^t (X_{i\ell} - d_{i\ell}) + \lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\ell=1}^t \mu_{i\ell t}^d \right], \quad i \in I; \quad t \in T \quad (27)$$

$$H_{it} \geq h_{it}^- \left[- \sum_{\ell=1}^t (X_{i\ell} - d_{i\ell}) + \lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\ell=1}^t \mu_{i\ell t}^d \right], \quad i \in I; \quad t \in T$$

$$\lambda_{it}^d + \mu_{i\ell t}^d \geq \hat{d}_{i\ell}, \quad i \in I; \quad t \in T; \quad \forall \ell \leq t$$

$$\lambda_{it}^d, \mu_{i\ell t}^d \geq 0, \quad i \in I; \quad t \in T; \quad \forall \ell \leq t.$$

A formulação (27) assegura que $H_{it} \geq 0$, pois o lado direito das restrições de balanço de estoque/atraso é sempre não negativo. Bertsimas e Thiele (2006) afirmam ainda que a expressão $\lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\ell=1}^t \mu_{i\ell t}^d$ de (27) pode ser vista como o desvio de pior caso da demanda acumulada em relação ao seu valor nominal. Tal desvio depende do *budget* de incerteza considerado.

5.3 Planejamento da produção com custos e demandas incertos

Os modelos (23) e (27) consideram as incertezas independentes dos custos e demandas, respectivamente, supondo que ambas as fontes de incerteza não ocorram simultaneamente. Na prática, é desejável um modelo que agregue custos e demandas incertos, de modo que seja possível determinar o impacto que ambas as incertezas ocasionam no planejamento da produção. Neste trabalho, admite-se que não há correlação entre os custos unitários e as demandas. Observe que os custos unitários de estoque e atraso afetam diretamente as restrições de demanda do modelo (27), enquanto os outros custos podem ser diretamente transformados nos seus respectivos equivalentes robustos, como exemplifica a Seção 5.1. Seja $\tilde{h}_{it}^+ = h_{it}^+ + \hat{h}_{it}^+ z_{it}^+$ para todo $z_{it}^+ \in [0, 1]$, então, nosso objetivo é tomar

De acordo com a perspectiva da otimização robusta, deve-se determinar o máximo desvio $\hat{d}_{i\ell}$ sobre o conjunto de todas as possíveis realizações das demandas incertas. Isso corresponde a resolver o seguinte problema auxiliar (26) para i e t dados:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } \sum_{z_{i\ell}^d} \sum_{\ell=1}^t \hat{d}_{i\ell} z_{i\ell}^d \\ & \text{Sujeito a: } \sum_{\ell=1}^t z_{i\ell}^d \leq \Gamma_{it}^d \\ & \quad 0 \leq z_{i\ell}^d \leq 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Reinjetando o dual do problema (26) na primeira restrição de (24), o equivalente robusto do Problema Combinado com demandas incertas pode ser escrito da seguinte maneira:

a realização de z_{it}^+ que maximize o lado direito da restrição de estoque em (27). Nesse caso, é preciso resolver o problema auxiliar (28) para cada par $i \in I$ e $t \in T$, cujo correspondente dual é expresso em (29).

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } \hat{h}_{it}^+ \theta_{it}^+ z_{it}^+ \\ & \text{Sujeito a: } z_{it}^+ \leq \Gamma_{it}^+ \\ & \quad 0 \leq z_{it}^+ \leq 1. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \lambda_{it}^+ \Gamma_{it}^+ + \mu_{it}^+ \\ & \quad (\lambda_{it}^+, \mu_{it}^+) \\ & \text{Sujeito a: } \lambda_{it}^+ + \mu_{it}^+ \geq \hat{h}_{it}^+ \theta_{it}^+ \\ & \quad \lambda_{it}^+ \geq 0, \mu_{it}^+ \geq 0, \end{aligned} \quad (29)$$

com $\theta_{it}^+ = \sum_{\ell=1}^t (X_{i\ell} - d_{i\ell}) + \lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\ell=1}^t \mu_{i\ell t}^d$.

Analogamente, pode-se escrever $\tilde{h}_{it}^- = h_{it}^- + \hat{h}_{it}^- z_{it}^-$ para todo $z_{it}^- \in [0, 1]$ e determinar os respectivos problemas auxiliares. Reinjetando os duais dos problemas auxiliares nas restrições de estoque e atraso de (27) e incorporando o modelo robusto com custos incertos (23) em (27), tem-se o equivalente robusto com custos e demandas incertos (30).

$$\text{Minimizar } \sum \sum c_{it} X_{it} + \sum \sum H_{it} + \sum o_t O_t + \Gamma^c \lambda^c + \sum_{(i,t) \in J^c} \mu_{it}^c + \Gamma^o \lambda^o + \sum_{t \in J^o} \mu_t^o$$

Sujeito a: Restrições (5) – (9)

$$\begin{aligned} H_{it} &\geq h_{it}^+ \left[\sum_{\ell=1}^t (X_{i\ell} - d_{i\ell}) + \lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\ell=1}^t \mu_{i\ell t}^d \right] + \lambda_{it}^+ \Gamma_{it}^+ + \mu_{it}^+, \quad i \in I; \quad t \in T \\ H_{it} &\geq h_{it}^- \left[-\sum_{\ell=1}^t (X_{i\ell} - d_{i\ell}) + \lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\ell=1}^t \mu_{i\ell t}^d \right] + \lambda_{it}^- \Gamma_{it}^- + \mu_{it}^-, \quad i \in I; \quad t \in T \\ \lambda_{it}^+ + \mu_{it}^+ &\geq \hat{h}_{it}^+ \left[\sum_{\ell=1}^t (X_{i\ell} - d_{i\ell}) + \lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\ell=1}^t \mu_{i\ell t}^d \right], \quad \forall (i,t) \in J^+ \\ \lambda_{it}^- + \mu_{it}^- &\geq \hat{h}_{it}^- \left[-\sum_{\ell=1}^t (X_{i\ell} - d_{i\ell}) + \lambda_{it}^d \Gamma_{it}^d + \sum_{\ell=1}^t \mu_{i\ell t}^d \right], \quad \forall (i,t) \in J^- \\ \lambda_{it}^d + \mu_{i\ell t}^d &\geq \hat{d}_{i\ell}, \quad i \in I; \quad t \in T; \quad \forall \ell \leq t \\ \lambda_{it}^d, \mu_{i\ell t}^d &\geq 0, \quad i \in I; \quad t \in T; \quad \forall \ell \leq t \\ \lambda^c + \mu_{it}^c &\geq \hat{c}_{it} X_{it}, \quad \forall (i,t) \in J^c \\ \lambda^o + \mu_t^o &\geq \hat{o}_t O_t, \quad \forall t \in J^o \\ \lambda^c, \lambda^o &\geq 0, \lambda_{it}^+ \geq 0, \forall (i,t) \in J^+, \lambda_{it}^- \geq 0, \forall (i,t) \in J^- \\ \mu_{it}^c &\geq 0, \forall (i,t) \in J^c; \mu_{it}^+ \geq 0, \forall (i,t) \in J^+ \\ \mu_{it}^- &\geq 0, \forall (i,t) \in J^-; \mu_{it}^o \geq 0, \forall (i,t) \in J^o. \end{aligned} \tag{30}$$

A nova função objetivo é composta pelo custo de produção, estoque/falta, hora extra e pela “parcela robusta” dada pela expressão $\Gamma^c \lambda^c + \sum \mu_{it}^c + \Gamma^o \lambda^o + \sum \mu_t^o$. Ainda, a parcela robusta do estoque e falta ($\lambda_{it}^+ \Gamma_{it}^+ + \mu_{it}^+$ e $\lambda_{it}^- \Gamma_{it}^- + \mu_{it}^-$, respectivamente) estão implicitamente consideradas na função objetivo pelo termo $\sum_{i,t} H_{it}$. Em geral, modelos matemáticos robustos que consideram a incorporação simultânea de várias fontes de incerteza apresentam custos totais mais deteriorados, justamente devido às parcelas robustas que podem representar percentuais elevados do custo total se os *budgets* de incerteza forem conservadores. Note que, por construção, os novos *budgets* de incerteza dos custos de estoque Γ_{it}^+ e atraso Γ_{it}^- variam no intervalo $[0,1]$, pois, para cada par ordenado (i,t) , tem-se apenas um coeficiente incerto. Entretanto, esse fato não impede que sejam determinados *trade offs* entre o custo total e *budgets* fracionários.

6 Ensaios numéricos

Nessa seção, são apresentados os experimentos numéricos que foram executados para analisar três questões principais: (1) a deterioração no valor da função objetivo ocasionada pela solução robusta, i.e., “o preço da robustez”; (2) a estrutura da solução robusta, e se existem tendências ou padrões para determinados níveis de desvio e *budgets* de incertezas; (3) a metodologia de otimização robusta comparada a abordagens aproximadas para lidar com

as incertezas, evidenciando a potencial superioridade dessa metodologia. Os modelos matemáticos foram codificados no Sistema de Modelagem Algébrica GAMS (ROSENTHAL, 2008) e resolvidos pelo pacote de otimização ILOG-CPLEX 11.2. O tempo limite de resolução de cada problema teste foi fixado em 1000 segundos e o *GAP* de otimalidade relativo (diferença entre o limitante superior e o inferior sobre o inferior) foi considerado 0,01. Os experimentos foram executados numa máquina Core i7 Duo 4, 4.0 GB de RAM, 2.0 GHz, sob a plataforma Windows 7.

6.1 Descrição dos dados

Os modelos matemáticos propostos neste trabalho foram resolvidos com base em exemplares reais coletados em visitas técnicas à empresa moveleira estudada. Foram considerados 26 produtos do portfólio da empresa, entre armários de 3, 4 e 5 portas, cômodas, criados-mudos e variações, como formatos, quantidade de gavetas, cores, etc. As principais matérias-primas utilizadas no processo produtivo desses produtos são placas de MDF de $2,75 \times 1,83$ m, cujas espessuras têm 3, 9, 12, 15, 20 e 25 mm. Admitiu-se que os 26 produtos considerados podem ser manufaturados a partir de 49 peças distintas que são obtidas pelo corte das placas de MDF de acordo com 81 padrões de corte utilizados pela empresa. Convém ressaltar que esses padrões de corte fornecidos pela empresa são padrões guilhotinados ortogonais e padrões tableiros compostos, devido a restrições da máquina

seccionadora. As demandas dos produtos ao longo do horizonte de planejamento de 12 meses são exibidas na Tabela A.1 do Apêndice. Os outros dados relevantes para o problema de otimização podem ser consultados em Alem (2011). O custo de estoque de cada produto em cada período (h_{it}^+) foi considerado igual a um percentual do custo de produção. O custo de atraso de cada produto em cada período (h_{it}^-) foi adotado como uma penalização igual à margem de contribuição ao lucro da venda do produto. O custo por hora extra em cada período (o_t) foi estimado com base no valor pago ao trabalhador por hora extra realizada. Os desvios dos custos foram modelados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_{it} &= \gamma \cdot c_{it}(1+s)^{t-1}, & i \in I, t \in T, \\
 \hat{h}_{it}^+ &= \gamma \cdot h_{it}^+(1+s)^{t-1}, & i \in I, t \in T, \\
 \hat{h}_{it}^- &= \gamma \cdot h_{it}^-(1+s)^{t-1}, & i \in I, t \in T, \\
 \hat{o}_t &= \gamma \cdot o_t(1+s)^{t-1}, & i \in I, t \in T.
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

As equações (31) mostram que os desvios equivalem a $\gamma\%$ dos seus respectivos valores nominais e que eles são não estacionários, i.e., variam de acordo com o período do horizonte de planejamento. A motivação em adotar desvios não estacionários crescentes no tempo é o apelo prático de que a incerteza dos custos é maior em períodos mais distantes. A taxa de juros s foi escolhida igual à taxa selic do período de análise.

6.2 Caso 1: resultados do modelo com custos incertos

Inicialmente, estudou-se a deterioração no valor da função objetivo com o aumento do *budget* de incerteza de cada custo individual presente no modelo (23). Isso equivale a variar Γ^c entre 0 e 312 (total de coeficientes incertos, considerando 24 produtos e 12 períodos), mantendo-se os demais *budgets* de incerteza em zero. Procedimento similar foi realizado para $\Gamma^+ \in [0,312]$, $\Gamma^- \in [0,312]$ e $\Gamma^o \in [0,12]$.

As Figuras 3 e 4 ilustram o *trade off* entre o valor da função objetivo e os *budgets* de incerteza Γ^c e Γ^- , respectivamente. A curva de probabilidade de violação da meta do decisor é igual nos dois casos, pois a mesma só depende do número de coeficientes incertos. Ainda, tal probabilidade é menor do que 0,05% para Γ^c e $\Gamma^- \geq 60$. Considerando $\Gamma^c \geq 60$, o custo total é aumentado em 0,5%, 5%, 9% e 18%, para $\gamma = 1\%$, 10%, 20% e 40%, respectivamente. É interessante notar que o acréscimo percentual do custo total é muito maior para valores menores de Γ^c . Observe, por exemplo, que os coeficientes angulares diminuem com o aumento dos *budgets*. Esse fenômeno ocorre porque os desvios dos custos são incorporados ao problema de maneira decrescente, i.e., dos desvios mais desfavoráveis para os desvios menos desfavoráveis, como mostrado matematicamente na função de proteção (13) e no seu correspondente problema de otimização dado em (14). Como consequência, espera-se que as curvas de *trade off* sejam monotonicamente não decrescentes. Os

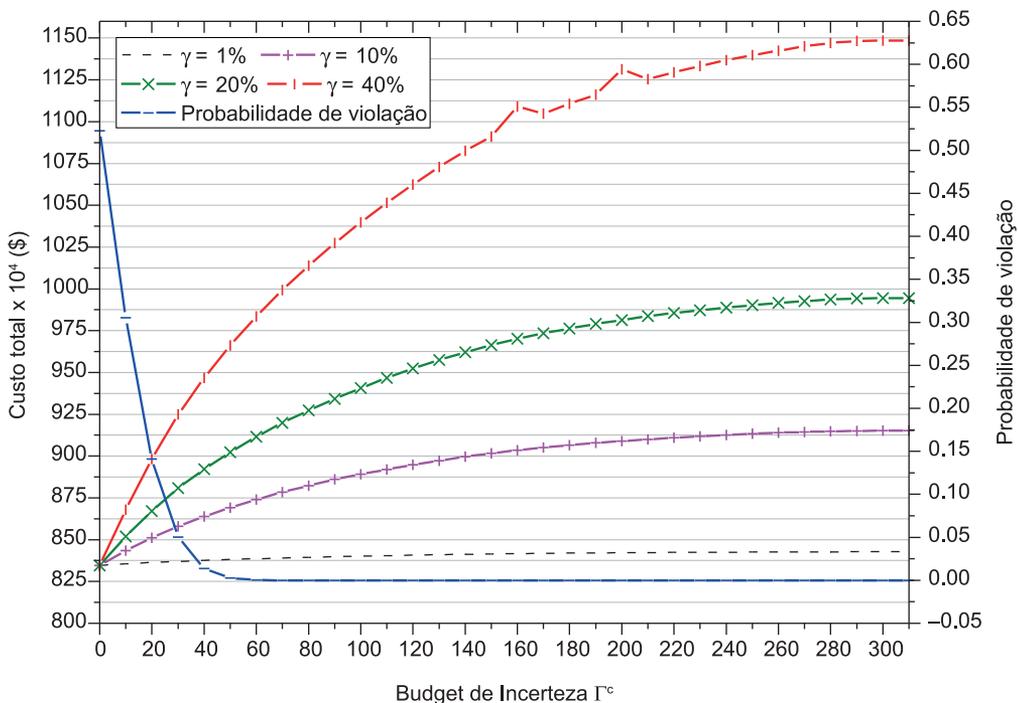


Figura 3. Trade off entre o custo total e o budget de incerteza Γ^c , e curva de probabilidade de violação da meta do decisor.

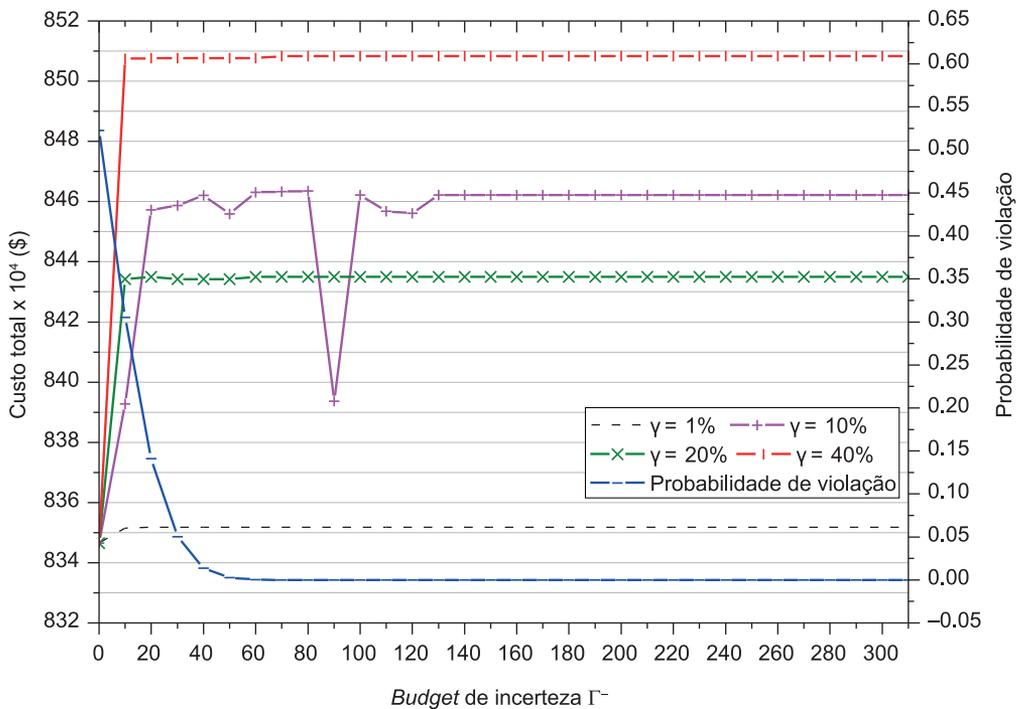


Figura 4. Trade off entre o custo total e o budget de incerteza Γ^- , e curva de probabilidade de violação da meta do decisor $\gamma = 10\%$.

problemas teste resolvidos nesse artigo apresentaram eventualmente pontos de inflexão devido às soluções subótimas consideradas na análise. A Figura 4 também evidencia que o custo total é estabilizado para valores de Γ^- entre 10 e 20, sugerindo que o cenário de pior caso é atingido muito antes do pior caso teórico, i.e., $\Gamma^- = 312$. Esse resultado sugere que o decisor pode atribuir valores para Γ^- entre 10 e 20, a fim de incorporar a variação do custo de atraso, e mesmo assim o custo total não vai ser mais do que 2% pior do que no caso nominal. Como era de se esperar, não houve mudança na solução robusta para nenhum desvio γ variando-se Γ^+ e Γ^o , uma vez que na solução ótima do problema determinístico, as variáveis de decisão associadas a esses parâmetros são nulas. Observe ainda que a queda no custo total da curva de $\gamma = 10\%$ próxima do budget Γ^- igual a 90 é um efeito da solução subótima.

Os resultados mostraram que a solução robusta é idêntica à solução nominal quando $\gamma = 1\%$, independente do budget de incerteza Γ^c , indicando que aumento do valor ótimo é devido somente aos custos das variáveis duais auxiliares. Nesse caso, não houve estocagem de produtos e não foram utilizadas horas extras. A partir de $\gamma = 10\%$, houve uma tendência na redução do custo de produção e no aumento do custo de atraso com o acréscimo do budget Γ^c . Ao mesmo tempo, o custo de estoque exibiu uma tendência de aumento em torno de $\Gamma^c = 200$, sofrendo sucessivas reduções até a estabilização na

situação mais conservadora. O custo de hora extra também foi mais significativo em torno de $\Gamma^c = 200$. O número de placas utilizadas e o número de setups não apresentaram nenhum comportamento claro. O aumento sucessivo do budget Γ^- ocasionou variação no valor ótimo, nos outros custos individuais e nas variáveis de decisão somente até $\Gamma^- = 10$, a partir do qual a solução estabilizou-se. Esse fenômeno foi observado para todos os desvios. Isso corrobora com a afirmação anterior de que $\Gamma^- = 10$ representa o caso mais conservador de variação do custo de atraso. É interessante notar que o aumento do budget Γ^- causou um aumento nos custos de produção, estoque e hora extra, ao passo que o custo de atraso diminuiu, em média, 14%, 17%, 39% e 41%, para os desvios de 1%, 10%, 20% e 40%, respectivamente.

Para analisar a variação de todos os custos simultaneamente, foram consideradas probabilidades de violação da meta do decisor igual a 10%, 5% e 1%, o que equivale a selecionar $\Gamma^c = \Gamma^+ = \Gamma^- = 24$ e $\Gamma^o = 6$ para $\epsilon \leq 10\%$, $\Gamma^c = \Gamma^+ = \Gamma^- = 31$ e $\Gamma^o = 7$ para $\epsilon \leq 5\%$, e $\Gamma^c = \Gamma^+ = \Gamma^- = 43$ e $\Gamma^o = 10$ para $\epsilon \leq 1\%$, como ilustra a Tabela 1. Note que, para todos os níveis γ , o aumento no valor da função objetivo é similar ao aumento quando apenas Γ^c varia e os outros budgets são nulos. Esse fato leva a inferir que a variação no custo de produção tem um impacto muito maior do que a variação acumulada de todos os outros custos. Observe que, na medida em que a solução se torna mais conservadora, o custo de produção decresce,

ao passo em que os outros custos aumentam. Uma vez que a variação do custo de produção causa maior impacto no custo total e tal variação é crescente com o horizonte de planejamento, é razoável que a política robusta tente manufacturar logo nos primeiros períodos a demanda dos produtos mais distantes no horizonte de planejamento, inclusive utilizando mais horas extras, o que eleva o custo de estoque e de hora extra. Ao mesmo tempo, existe uma pressão para diminuir a produção nos períodos mais distantes, o que eleva bastante o custo de atraso. Embora o número de placas pareça aumentar com o desvio γ , não é óbvio que soluções mais conservadoras utilizam mais placas. Aparentemente, são necessários mais *setups* para maiores γ e menores probabilidades de violação, provavelmente porque produzir para estocar causa maior aumento no valor da função objetivo e realizar *setups* não causa impacto direto nos custos.

6.3 Caso 2: resultados do modelo com demandas incertas

Os *budgets* de incerteza das demandas foram assumidos dinâmicos no horizonte de planejamento, mas iguais para todos os produtos. Sob tais hipóteses, foram analisados três modelos de *budgets*: (i) $\Gamma_{it}^d = \sqrt{t}$; (ii) $\Gamma_{it}^d = 0,5 + 0,1t$; e (iii) $\Gamma_{it}^d = t$. As razões que motivaram a adoção desses modelos são: (i) em Bertsimas e Thiele (2006), é argumentado que os *budgets* de incerteza selecionados de forma ótima tendem ao valor $\sqrt{t+1}$. (ii) Além disso, Alem e Morabito (2012) mostraram que *budgets* de incerteza lineares como $\Gamma_{it}^d = 0,5 + 0,1t$ produzem soluções robustas com custos totais pouco deteriorados. Finalmente, (iii) reflete a situação de pior caso de variação das demandas e pode ser usado para analisar

políticas extremamente pessimistas. A Tabela 2 mostra os resultados computacionais do modelo com demandas incertas (27).

A Tabela 2 confirma que o custo total aumenta com o aumento do nível de variabilidade e conforme o *budget* de incerteza se torna mais conservador. Além disso, os custos totais são bastante sensíveis às escolhas dos *budgets* e dos níveis de variabilidade dados. Observe que para os dois primeiros *budgets* de incerteza (menos conservadores), o aumento no valor ótimo pode ser considerado plausível, dado que nenhum ultrapassou o próprio nível de variabilidade. Entretanto, considerando $\Gamma_{it}^d = t$, o custo extra necessário para obter as soluções robustas são significativamente maiores do que seus correspondentes desvios.

Uma vez que os modelos de otimização robusta são baseados numa perspectiva de pior caso, as demandas sempre admitem valores no intervalo $[d_{it}^d, d_{it}^d + \hat{d}_{it}^d]$, conforme o *budget* de incerteza aumenta. Considerando ainda que ambas as variáveis de estoque e atraso dadas pela expressão (24) são ilimitadas superiormente, o aumento acumulado da demanda devido ao sucessivo acréscimo nos *budgets* de incerteza pode ocasionar três fenômenos distintos. (i) Se a capacidade for apertada, a produção não consegue acompanhar o crescimento da demanda e a segunda restrição de (27) torna-se mais ativa do que a primeira, gerando custos de atraso sensivelmente maiores do que custos de estoque (ALEM; MORABITO, 2012). (ii) Por outro lado, se a capacidade for folgada, a produção cresce em consonância ao aumento da demanda e os custos de atraso são insignificantes em comparação aos custos de estoque. (iii) Finalmente, se a capacidade for normal, a produção tende a acompanhar o crescimento da demanda até um

Tabela 2. Resultados do modelo robusto (23), permitindo-se a variação de todos os custos simultaneamente, a partir da escolha da probabilidade de violação da meta do decisor (ϵ) da Equação 18. Para $\epsilon \leq 10\%$, $\Gamma^c = \Gamma^+ = \Gamma^- = 24$ e $\Gamma^o = 6$. Para $\epsilon \leq 5\%$, $\Gamma^c = \Gamma^+ = \Gamma^- = 31$ e $\Gamma^o = 7$. Para $\epsilon \leq 1\%$, $\Gamma^c = \Gamma^+ = \Gamma^- = 43$ e $\Gamma^o = 10$.

Prob. viol.	Desvio ($\gamma\%$)	Custo total	GAP (%)	Extra (%)	Tempo (s)	Custo prod.	Custo estoque	Custo atraso	Custo hora	# de placas	# de setups
10%	1	8371369	0,0000	0,2985	0,1100	7851178	0	495412	0	96882	576
	10	8587652	0,0162	2,890	3,040	7955133	2205	394440	25,96	97693	587
	20	8821050	0,0179	5,686	4,570	8016221	6751	343178	18,88	99673	591
	40	9268731	0,0031	11,05	2,990	8031745	14158	331572	0	99745	597
5%	1	8376189	0,0000	0,3563	0,1100	7846849	0	499733	0	96865	576
	10	8665635	0,3664	3,824	3,310	7937998	2839	439021	62,87	98112	593
	20	8914526	0,0105	6,806	3,920	8016221	8051	343178	74,05	99132	593
	40	9455906	0,0011	13,29	3,790	8031745	21738	331572	0	101064	587
1%	1	8384689	0,0000	0,4581	0,1400	7834826	0	511731	0	96818	576
	10	8749186	0,3782	4,825	2,990	7893524	6106	481839	528,6	98915	593
	20	9115623	0,4690	9,216	2,810	7973651	12847	416799	298,3	100106	600
	40	9769637	0,0128	17,05	5,130	8026386	27928	336021	9,140	99653	611

determinado valor limite, a partir do qual não se pode mais produzir em excesso, ocasionando o aumento de ambos os custos de estoque e atraso. Os resultados apresentados na Tabela 2 ilustram o caso (iii). Nesse caso, note que para manter altos níveis de estoque e não aumentar em demasia o custo de atraso, o custo de hora extra aumentou significativamente, chegando a mais de 20% do custo de atraso em situações mais conservadoras com desvios iguais a 40%. Nada foi particularmente observado com respeito ao número de setups.

6.4 Caso 3: resultados dos problemas com custos e demandas incertos

Como era de se esperar, quando demandas e custos são incorporados concomitantemente ao modelo de otimização robusta, o custo extra necessário para obter as soluções robustas aumenta consideravelmente. Observe na Tabela 3 que, sob o *budget* de incerteza mais conservador ($\Gamma_{it}^d = t$) e $\varepsilon = 1\%$, o custo total aumentou mais de 130%, ao passo que, permitindo apenas a variação da demanda, o aumento foi de 75% (Tabela 2, coluna 5, última linha), e quando apenas os custos variam, o aumento foi de apenas 17% (Tabela 1, coluna 5, última linha). Esse aumento adicional do modelo (30) é devido, principalmente, ao custo de produção, seguido do custo de atraso. Aparentemente, a tendência é de que o custo de produção cresça, na medida em que a solução se torna mais conservadora, principalmente devido aos *budgets* de incerteza das demandas. A parcela mais significativa dos outros custos é referente ao custo de atraso (6,3% do custo total), seguida do custo de estoque (5,6%), e da parcela robusta (3%).

Não surpreendentemente, quando custos e demandas são considerados ao mesmo tempo, o custo de atraso

pode ser significativamente maior, ao passo que o custo de estoque decresce consideravelmente. Por exemplo, note que o modelo com demandas incertas com desvio de 40% gera um custo de estoque de 1.575.902 e um custo de atraso de 509.387. Entretanto, no modelo com custos e demandas incertos, o custo de estoque oscila entre 199.427 e 201.532, e o custo de atraso, entre 3.757.961 e 3.424.061. Uma explicação para esse fenômeno é dada ao final da Seção 5.3., com a ressalva de que, neste caso, o compromisso entre aumentar o nível de produção (e estocar mais) e pagar altos custos de atraso é mais evidente, devido à incorporação dos desvios dos custos de estoque e atraso diretamente nas restrições de atendimento da demanda. Também convém ressaltar que a estrutura da solução robusta é similar à solução do modelo (27) quando apenas as demandas são incertas. Isso pode ser observado em relação aos níveis de produção, estoque, atraso, e quantidade de placas usadas. Diferentemente dos casos anteriores, foram utilizadas horas extras para todos os desvios, probabilidades de violação e modelos de *budgets*, inclusive sob a hipótese de $\gamma = 1\%$, o que parece razoável, uma vez que a produção cresce vertiginosamente.

A análise das colunas “GAP” e “Tempo” nas Tabelas 2, 3 e 4 sugere que o algoritmo *branch-and-cut* do CPLEX tem mais dificuldade em encontrar soluções melhores para maiores γ , menores probabilidades de violação e *budgets* de incerteza mais conservadores, pois os *GAPs* e os tempos computacionais são ligeiramente maiores. Embora os modelos com apenas custos incertos (26) e demandas incertas (27) sejam resolvidos de forma bastante eficiente pelo GAMS/CPLEX (*GAPs* menores do que 1% e tempos menores que 1 minuto), o modelo (30) que agrega custos e demandas mostrou-se mais difícil de ser resolvido. Esse resultado é evidente quando se

Tabela 3. Resultados do modelo robusto (27) com demandas incertas, considerando quatro níveis de desvios e três modelos para os *budgets* de incerteza.

Γ_{it}^d	Desvio ($\gamma\%$)	Custo total	GAP (%)	Extra (%)	Tempo (s)	Custo prod.	Custo estoque	Custo atraso	Custo hora	# de placas	# de setups
0,5 + 0,1t	1	8371298	0,0000	0,2977	0,2300	7798640	3836	570773	0	96657	577
	10	8594954	0,0000	2,977	4,980	7924181	46750	654695	0	98024	599
	20	8844908	0,0137	5,972	8,370	8063671	114700	753938	350,5	99848	594
	40	9423032	0,8619	12,90	13,55	8321908	212106	1020981	11485	103333	592
\sqrt{t}	1	8397643	0,0000	0,6133	5,640	7813432	9549	573639	0	97443	593
	10	8863296	0,0502	6,192	11,31	8072104	86595	746230	494,1	99424	590
	20	9387286	0,1504	12,47	21,05	8359245	206649	865806	6891	102615	595
	40	10499733	0,8442	25,80	9,090	8908248	413184	1009403	15329	108725	576
t	1	8495467	0,0058	1,785	7,270	7872884	19942	588366	41,30	97174	604
	10	9931996	0,9717	19,00	11,70	8641948	237411	853504	5588	106092	578
	20	11368642	0,1600	36,21	14,03	9438048	451147	563685	21479	115927	584
	40	14564097	0,9572	74,49	20,43	11071598	1575902	509387	115481	131585	576

considera o *budget* de incerteza $\Gamma_{it}^d = t$, sugerindo que uma boa escolha do *budget* de incerteza da demanda é particularmente relevante na presença de custos incertos, pois além da exacerbada deterioração no valor da função objetivo, *budgets* muito conservadores podem tornar o problema intratável, dependendo das dimensões.

7 Solução robusta *versus* estratégias aproximadas para lidar com as incertezas

Para analisar se os modelos robustos apresentados de fato contribuem para gerar soluções mais eficazes para lidar com as incertezas do que abordagens comumente usadas na prática, os problemas anteriores

foram resolvidos de acordo com duas estratégias. Na primeira estratégia (WC), foram resolvidos problemas determinísticos cujos custos e demandas foram substituídos pelos seus correspondentes valores de pior caso, i.e., os desvios foram somados integralmente aos valores nominais. Na segunda estratégia (HR), foi empregada a ideia de horizonte de tempo de planejamento rolante, em que, ao final de cada período, os parâmetros aleatórios do período subsequente tornam-se conhecidos e as decisões podem ser reavaliadas. Os detalhes da estratégia HR são apresentados no Apêndice A.1. A Tabela 5 exhibe a comparação entre a estratégia robusta (OR) fornecida pelo modelo (30) e as duas abordagens aproximadas, utilizando duas métricas: (i) diferença entre os custos extras incorridos na obtenção da solução

Tabela 4. Resultados do modelo robusto (30) com custos e demandas incertos, considerando quatro níveis de desvios, três modelos de *budgets* de incertezas e três probabilidades de violação. Os *budgets* de incerteza dos custos de estoque Γ_{it}^+ e falta Γ_{it}^- foram considerados iguais a 1 (caso mais conservador).

Prob. viol.	Γ_{it}^d	Desvio ($\gamma\%$)	Custo total	GAP (%)	Extra (%)	Tempo (s)	Custo prod.	Custo est.	Custo atraso	Custo hora	# de placas	# de setups
10%	0,5 + 0,1t	1	8664689	0,1313	3,813	12,79	8435970	1364	20282	180684	102917	588
		10	9172214	0,1330	9,894	18,01	8564910	5890	111721	280326	104254	583
		20	9744059	0,1662	16,74	14,59	8672046	14267	258792	443757	106296	583
		40	10976465	0,9966	31,51	33,91	8856577	30557	521838	953926	111164	594
	\sqrt{t}	1	8702159	0,1321	4,262	37,99	8483044	1618	30422	156309	103723	584
		10	9556274	0,1742	14,50	13,93	8715791	11997	232318	390706	106152	579
		20	10524819	0,2104	26,10	17,71	8993678	27997	543941	688720	110914	586
		40	12499011	0,3155	49,75	19,80	9551377	73896	1167239	1205330	116394	586
	t	1	8834679	0,1380	5,849	12,40	8508563	2922	160547	132216	104162	582
		10	10928985	0,2851	30,94	14,20	9390294	31723	724484	686460	115334	582
		20	13341605	0,3170	59,85	29,00	10227019	77963	1500109	1469783	123493	582
		40	18541376	0,9985	122,1	904,7	11904011	199427	3757961	2988126	139194	575
5%	0,5 + 0,1t	1	8672021	0,1576	3,901	14,46	8436206	1527	19893	182564	102772	595
		10	9226455	0,1662	10,54	19,62	8552454	6307	127410	286240	104508	580
		20	9851797	0,2198	18,04	17,32	8661155	14934	273111	469607	105866	581
		40	11104205	0,2793	33,04	25,20	8893010	34616	558156	812572	108072	585
	\sqrt{t}	1	8707224	0,1320	4,322	38,15	8483044	1645	30178	156552	103723	584
		10	9610173	0,1904	15,14	21,99	8716918	12355	268363	360472	108118	582
		20	10636604	0,2496	27,44	23,09	8986035	29055	593117	631850	110611	584
		40	12717128	0,2692	52,37	19,85	9530862	71905	1251939	1156052	115274	586
	t	1	8839192	0,1312	5,904	12,11	8507529	2937	111049	228787	104331	589
		10	10981394	0,2570	31,57	16,80	9403336	32444	676971	656203	115016	581
		20	13469342	0,4181	61,38	30,23	10205568	78616	1505630	1506527	123329	587
		40	18827263	1,101	125,6	1000	11822556	201532	3632894	2994992	137626	577
1%	0,5 + 0,1t	1	8678921	0,1317	3,983	11,49	8446809	1351	20537	180635	103097	579
		10	9316920	0,1400	11,63	10,77	8565926	6560	118038	303321	105583	575
		20	10028240	0,1945	20,15	18,54	8639576	15325	277436	488136	105996	588
		40	11461686	0,2663	37,32	19,10	8865246	34334	549039	841754	109271	581
	\sqrt{t}	1	8718080	0,1513	4,452	16,41	8482463	1857	31308	157182	103125	580
		10	9705618	0,1934	16,28	17,07	8724254	12783	256396	376089	106827	587
		20	10821093	0,2039	29,65	21,51	8974332	31223	640930	689262	110145	583
		40	13199656	0,9573	58,15	30,34	9485264	68009	1227359	1311716	116706	581
	t	1	8848191	0,1285	6,011	15,93	8511226	2860	71344	206239	104081	590
		10	11161055	0,9675	33,72	9,800	9319406	31553	592418	718051	115165	812
		20	13680165	0,3698	63,90	24,21	10187321	77890	1502087	1531279	122424	581
		40	19298069	1,050	131,2	1000	11837590	201060	3143547	3424061	136358	572

robusta e das estratégias aproximadas $E(R) - E(\cdot)$; (ii) diferença entre os níveis de serviço da política robusta e das estratégias aproximadas $S(R) - S(\cdot)$, em que (\cdot) pode representar WC ou HR. O nível de serviço foi calculado como $S = \left[1 - \sum_{i,t} (I_{it}^- / d_{it}) \right] \cdot 100\%$. Se $E(R) - E(\cdot) = \xi < 0$, então a estratégia robusta gera um custo total $\xi\%$ menor do que a correspondente estratégia aproximada. Se $S(R) - S(\cdot) = \xi' < 0$, então a política robusta tem um nível de serviço $\xi'\%$ menor

do que a política aproximada. Os valores hachurados na Tabela 5 representam a superioridade da estratégia da solução robusta em detrimento às estratégias aproximadas.

Os resultados mostram que a política robusta com os budgets de incerteza $0,5 + 0,1t$ e \sqrt{t} é superior à política WC em termos de custo extra para todos os desvios e probabilidades de violação. Considerando o budget $\Gamma_{it}^d = t$, a política robusta mostrou um desempenho insatisfatório, principalmente para os

Tabela 5. Comparação entre a política robusta (R), a estratégia de pior caso (WC) e a estratégia de horizonte rolante (HR) em termos das diferenças entre custos extras $(E(R) - E(\cdot))$ e entre níveis de serviço $(S(R) - S(\cdot))$ das três abordagens.

Prob. viol.	Γ_{it}^d	Desvio ($\gamma\%$)	$E(R) - E(WC)$ (%)	$E(R) - E(HR)$ (%)	$S(R) - S(WC)$ (%)	$S(R) - S(HR)$ (%)
10%	$0,5 + 0,1t$	1	-0,6976	1,756	4,518	4,559
		10	-28,50	-11,68	3,499	3,753
		20	-43,89	-29,76	4,942	8,908
		40	-52,89	-70,43	-4,777	37,78
	\sqrt{t}	1	-0,2487	2,205	4,837	4,878
		10	-23,90	-7,078	2,112	2,367
		20	-34,54	-20,41	1,971	5,937
		40	-34,65	-52,19	-4,844	37,71
	t	1	1,339	3,793	5,228	5,269
		10	-7,454	9,369	-1,799	-1,544
		20	-0,7911	13,34	-7,404	-3,437
		40	37,74	20,21	-26,89	15,67
5%	$0,5 + 0,1t$	1	-0,6097	1,844	4,450	4,491
		10	-27,85	-11,03	3,327	3,582
		20	-42,60	-28,47	4,543	8,509
		40	-51,36	-68,90	0,2717	42,83
	\sqrt{t}	1	-0,1880	2,27	4,832	4,872
		10	-23,26	-6,43	2,429	2,684
		20	-33,20	-19,07	2,670	6,636
		40	-32,04	-49,57	-4,065	38,49
	t	1	1,393	3,85	3,892	3,932
		10	-6,826	10,00	-1,383	-1,129
		20	0,7394	14,87	-7,777	-3,811
		40	41,17	23,63	-27,44	15,12
1%	$0,5 + 0,1t$	1	-0,5271	1,927	4,519	4,559
		10	-26,77	-9,946	3,194	3,449
		20	-40,49	-26,36	4,433	8,400
		40	-47,08	-64,62	0,035	42,59
	\sqrt{t}	1	-0,058	2,396	4,828	4,868
		10	-22,11	-5,289	2,226	2,480
		20	-30,99	-16,86	2,110	6,076
		40	-26,26	-43,79	-5,867	36,69
	t	1	1,501	3,955	4,172	4,213
		10	-4,674	12,15	-1,974	-1,719
		20	3,265	17,39	-7,758	-3,792
		40	46,81	29,27	-34,67	7,884
Média		-14,18	-10,21	-1,600	10,10	

desvios de 1% e 40%. Entretanto, além da política robusta apresentar em *média* o melhor desempenho, o pior desempenho da política robusta gerou um custo extra 46% maior do que o custo da estratégia WC, ao passo que o pior desempenho da estratégia WC gerou um custo extra 52% maior do que o da política robusta. Esse fenômeno é ainda mais pronunciado na análise das estratégias robusta e HR. Embora a política robusta forneça um custo extra 10% maior do que a política HR, o pior caso da HR é mais pessimista do que o correspondente pior caso da estratégia robusta, como pode ser observado nos valores mínimo e máximo. Cabe ressaltar que, para os desvios de 1%, HR tem um desempenho superior à estratégia OR, possivelmente porque a variação dos dados incertos é baixa, o que aproxima as decisões de períodos anteriores àquelas de períodos futuros, gerando um custo extra menor.

O nível de serviço da política robusta também mostrou um desempenho inferior ao nível de serviço da estratégia WC para $\Gamma_{it}^d = t$ e desvios de 40%. Diferentemente dos resultados anteriores, embora $S(R) > S(WC)$ em média, o melhor desempenho de OR gerou um nível de serviço apenas 5% maior do que o da estratégia WC, ao passo que o melhor desempenho de WC gerou um nível de serviço 30% melhor. Por outro lado, o desempenho do nível de serviço da estratégia HR é significativamente pior do que o da estratégia robusta, tanto em média quanto em valores de melhor/pior desempenho.

Em alguns casos, a política robusta mostrou-se mais conservadora do que a estratégia de pior caso. De fato, quando $\Gamma_{it}^d = t$, a restrição de demanda é “exageradamente protegida”, no sentido em que tal restrição considera integralmente o desvio \hat{d}_{it} atual e os desvios dos períodos anteriores $(\hat{d}_{i,t-1}, \hat{d}_{i,t-2}, \dots, \hat{d}_{i,1})$, o que gera uma proteção excessiva e pessimista. Por outro lado, a estratégia de pior caso resolve um problema menos conservador, cuja demanda é igual a $(d_{it} + \hat{d}_{it})$. Por essa razão, é importante determinar valores plausíveis para os *budgets* de incerteza.

8 Considerações finais

O desenvolvimento de modelos matemáticos para lidar com as incertezas em problemas de planejamento da produção em geral não é trivial. Na prática, as incertezas são substituídas por valores médios ou de pior caso, ou ainda são ignoradas e, caso se materializem, parte das decisões são reavaliadas com base num planejamento de horizonte de tempo rolante. Embora existam diversas metodologias para lidar com as incertezas, algumas delas resultam em resolver problemas mais complexos do que o problema determinístico original. Neste trabalho, estudamos

um problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque típico de empresas moveleiras de pequeno porte, na situação em que os custos da função objetivo e as demandas não são dados conhecidos com certeza. Para lidar com as incertezas, foram propostas três formulações matemáticas diferentes baseadas em otimização robusta, considerando apenas o custo incerto, apenas a demanda incerta, e ambos o custo e a demanda incertos, simultaneamente. Embora tal metodologia baseie-se numa perspectiva de pior caso, os resultados mostraram que as soluções não são conservadoras, pois é permitido controlar a incorporação das incertezas ao modelo de acordo com as preferências do decisor.

Comparando-se a metodologia de otimização robusta a dois procedimentos comuns na prática, concluiu-se que é possível economizar uma quantia considerável se os métodos de otimização robustos propostos forem utilizados em detrimento das abordagens aproximadas de lidar com as incertezas. Além disso, em muitos casos, o nível de serviço obtido pelas soluções robustas é superior ao das aproximações consideradas. Esses resultados podem servir como base para os gestores apoiarem as suas decisões em ambientes sujeitos às incertezas nos custos e demandas. Pesquisas futuras incluem o desenvolvimento de modelos robustos ajustáveis e com intervalos de incerteza elipsoidais, na tentativa de produzir soluções robustas menos conservadoras. Entretanto, a formulação robusta equivalente pode não ser computacionalmente tratável para exemplares reais, o que sugere o estudo de métodos de resolução eficientes, explorando procedimentos de geração dos padrões de corte combinados com métodos *branch-and-price*.

Agradecimentos

Os autores agradecem à empresa de móveis visitada por disponibilizar parte dos dados e aos três revisores anônimos pelos úteis comentários e sugestões de melhoria do trabalho. Este trabalho teve o apoio da FAPESP e CNPq.

Referências

- ADIDA, E.; JOSHI, P. A robust optimization approach to project scheduling and resource allocation. **International Journal of Services Operations and Informatics**, v. 4, n. 2, p. 169-193, 2009. <http://dx.doi.org/10.1504/IJSOI.2009.023421>
- AGHASSI, M.; BERTSIMAS, D. Robust game theory. **Mathematical Programming**, v. 107, n. 1, p. 231-273, 2006. <http://dx.doi.org/10.1007/s10107-005-0686-0>
- ALEM, D. **Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras**. 2011. Tese (Doutorado em Ciências da Computação e Matemática Computacional)-Instituto de

- Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- ALEM, D.; MORABITO, R. Production planning in furniture settings via robust optimization. **Computers & Operations Research**, v. 39, n. 2, p. 139-150, 2012. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2011.02.022>
- ATAMTÜRK, A. Strong formulations of robust mixed 0-1 programming. **Operations Research**, v. 108, p. 235-250, 2006.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust convex optimization. **Mathematics of Operations Research**, v. 23, p. 769-805, 1998. <http://dx.doi.org/10.1287/moor.23.4.769>
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust solutions of uncertain linear programming. **Operations Research Letters**, v. 25, p. 1-13, 1999. [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6377\(99\)00016-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6377(99)00016-4)
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. **Mathematical Programming**, v. 88, p. 411-424, 2000. <http://dx.doi.org/10.1007/PL00011380>
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust optimization: methodology and applications. **Mathematical Programming Series B**, v. 92, p. 453-480, 2002. <http://dx.doi.org/10.1007/s101070100286>
- BEN-TAL, A. et al. Supplier-retailer flexible commitments contracts: a robust optimization approach. **Manufacturing and Service Operations Management**, v. 7, n. 3, p. 248-271, 2005. <http://dx.doi.org/10.1287/msom.1050.0081>
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. Robust discrete optimization and network flows. **Mathematical Programming Series B**, v. 98, n. 1-3, p. 49-71, 2003. <http://dx.doi.org/10.1007/s10107-003-0396-4>
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. The price of robustness. **Operations research**, v. 52, n. 1, p. 35-53, 2004. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1030.0065>
- BERTSIMAS, D.; THIELE, A. A robust optimization approach to inventory theory. **Operations Research**, v. 54, n. 1, p. 150-168, 2006. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1050.0238>
- BERTSIMAS, D.; PACHAMANOVA, D. Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs. **Computers & Operations Research**, v. 35, p. 3-17, 2008. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2006.02.011>
- BERTSIMAS, D.; BROWN, D.; CARAMANIS, C. Theory and applications of robust optimization. **SIAM Review**, v. 53, n. 3, p. 464-501, 2011. <http://dx.doi.org/10.1137/080734510>
- BEYER, H.-G.; SENDHOFF, B. Robust optimization - a comprehensive survey. **Computers Methods in Applied Mechanics Engineering**, v. 196, p. 3190-3218, 2007. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2007.03.003>
- BIENSTOCK, D.; OZBAY, N. Computing robust basestock levels. **Discrete Optimization**, v. 5, n. 2, p. 389-414, 2008. <http://dx.doi.org/10.1016/j.disopt.2006.12.002>
- BOHLE, C.; MATURANA, S.; VERA, J. A robust optimization approach to wine grape harvesting scheduling. **European Journal of Operational Research**, v. 200, n. 1, p. 245-252, 2009. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2008.12.003>
- CAVALI, R. **Problema de corte e empacotamento na indústria de móveis: um estudo de caso**. 2004. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2004.
- CHEN, C.; KWON, R. H. Robust portfolio selection for index tracking. **Computers & Operations Research**, v. 39, n. 4, p. 829-837, 2012. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2010.08.019>
- CHEN, W. et al. From CVAR to uncertainty set: implications in joint chance constrained optimization. **Operations Research**, v. 58, p. 470-485, 2010. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1090.0712>
- CHEN, W.; SIM, M.; SUN, P. A robust optimization perspective on stochastic programming. **Operations Research**, v. 55, n. 6, p. 1058-1070, 2007. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1070.0441>
- CORREIA, M.; OLIVEIRA, J.; FERREIRA, J. Reel and sheet cutting at a paper mill. **Computers & Operations Research**, v. 31, p. 1223-1243, 2004. [http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548\(03\)00076-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548(03)00076-5)
- DREXL, A.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling – survey and extensions. **European Journal of Operational Research**, v. 99, p. 221-235, 1997. [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00030-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00030-1)
- EL-GHAOUI, L.; LEBRET, H. Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices. **SIAM Journal on matrix analysis and applications**, v. 18, p. 1035-1064, 1997. <http://dx.doi.org/10.1137/S0895479896298130>
- EL-GHAOUI, L.; OUSTRY, F.; LEBRET, H. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. **SIAM Journal of Optimization**, v. 9, p. 35-52, 1998.
- ERDOGAN, E.; IYENGAR, G. Ambiguous chance constrained problems and robust optimization. **Operations Research**, v. 107, p. 37-61, 2006.
- FIGUEIREDO, A. **Análise de produtividade de padrões de corte na indústria de móveis**. 2006. (Mestrado em Matemática Aplicada)-Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2006.
- GRAMANI, M.; FRANÇA, P. The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial process. **European Journal of Operational Research**, v. 174, p. 509-521, 2006. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2004.12.019>
- GRAMANI, M.; FRANÇA, P.; ARENALES, M. A lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. **International Journal of Production Economics**, v. 119, n. 2, p. 219-227, 2009. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2009.02.011>
- GHIDINI, C. L. T. S. **Otimização de processos acoplados: programação da produção e corte de estoque**. 2009. Tese (Doutorado em Ciências da Computação e Matemática Computacional)-Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Modeling industrial lot sizing problems: a review. **International Journal of Production Research**, v. 46, n. 6, p. 1619-1643, 2008. <http://dx.doi.org/10.1080/00207540600902262>

- KRICHAGINA, E. et al. L. A dynamic stochastic stock-cutting problem. **Operations Research**, v. 45, n. 5, p. 690-701, 1998. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.46.5.690>
- LI, Z.; IERAPETRITOU, M. G. Robust optimization for process scheduling under uncertainty. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 47, n. 12, p. 4148-4157, 2008. <http://dx.doi.org/10.1021/ie071431u>
- MARLA, L.; BARNHART, C. Robust optimization: lessons learned from aircraft routing. **Transportation Science**, 2009. In press.
- MATURANA, S. et al. **Robust optimization: a case in forest operations planning**. USC ISE, 2007. Relatório técnico, 2007-03.
- MENON, S.; SCHRAGE, L. Order allocation for stock cutting in the paper industry. **Operations Research**, v. 50, p. 324-332, 2002. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.50.2.324.427>
- MOSQUERA, G. P. **Contribuições para o problema de corte de estoque bidimensional na indústria moveleira**. 2007. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada)-Universidade Estadual Paulista, São Jose do Rio Preto, 2007.
- MULVEY, J.; VANDERBEI, R.; ZENIOS, S. Robust optimization of large scale systems. **Operations Research**, v. 43, n. 2, p. 264-281, 1995. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.43.2.264>
- MUNHOZ, J. R.; MORABITO, R. Uma abordagem de otimização robusta no planejamento agregado de produção na indústria cítrica. **Produção**, 2012. Ahead of print. <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-65132012005000054>
- NONAS, S.; THORSTENSON, A. A combined cutting stock and lot sizing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 120, n. 2, p. 327-342, 2000. [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(99\)00160-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00160-5)
- NONAS, S.; THORSTENSON, A. Solving a combined cutting-stock and lot-sizing problem with a column generating procedure. **Computers and Operations Research**, v. 35, n. 10, p. 3371-3392, 2008. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2007.03.005>
- ORDÓÑEZ, F.; ZHAO, J. Robust capacity expansion of network flows. **Networks**, v. 50, n. 2, p. 136-145, 2007. <http://dx.doi.org/10.1002/net.20183>
- PAIVA, R. P.; MORABITO, R. Planejamento hierárquico da produção em usinas de açúcar e álcool: Modelagem de otimização robusta. **Produção**, 2012. Ahead of print.
- PALMA, C. D.; NELSON, J. D. A robust optimization approach protected harvest scheduling decisions against uncertainty. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 39, p. 342-355, 2009. <http://dx.doi.org/10.1139/X08-175>
- POCHET, Y.; WOLSEY, L. **Production planning by mixed integer programming**. New York: Springer, 2006.
- POLTRONIERE, S. et al. A coupling cutting stock lot sizing problem in the paper industry. **Annals of Operations Research**, v. 157, n. 1, p. 91-104, 2008. <http://dx.doi.org/10.1007/s10479-007-0200-6>
- ROSENTHAL, R. **GAMS – A user's guide**. Disponível em: <<http://www.gams.com/docs/document.htm>>. Acesso em: jun. 2008.
- SADJADI, S.; OMRANI, H. Data envelopment analysis with uncertain data: an application for Iranian electricity distribution companies. **Energy Policy**, v. 36, p. 4247-4254, 2008. <http://dx.doi.org/10.1016/j.enpol.2008.08.004>
- SANTOS, S. M. P. G. **Modelagem do problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque numa indústria moveleira**. 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada)-Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2008.
- SANTOS, S. G.; ARAÚJO, S. A.; RANGEL, S. Integrated cutting machine programming and lot sizing in furniture industry. **Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento**, v. 3, p. 1-17, 2011.
- SOYSTER, A. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. **Operations Research**, v. 21, p. 1154-1157, 1973. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.21.5.1154>
- SUNGUR, I.; ORDÓÑEZ, F.; DESSOUKY, M. A robust optimization approach for the capacitated vehicle routing problem with demand uncertainty. **IIE Transactions**, v. 40, n. 5, p. 509-523, 2008. <http://dx.doi.org/10.1080/07408170701745378>
- THOMAS, D.; GRIFFIN, P. Coordinated supply chain management. **European Journal of Operational Research**, v. 94, p. 1-15, 1996. [http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(96\)00098-7](http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(96)00098-7)
- VANZELA, M. **Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque na Indústria Moveleira**. 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2012.
- YE, W.; ORDÓÑEZ, F. Robust optimization models for energy-limited wireless sensor networks under distance uncertainty. **IEEE Transactions on Wireless Communications**, v. 7, n. 6, p. 2161-2169, 2008. <http://dx.doi.org/10.1109/TWC.2008.060756>

Apêndice A.1. Demandas dos 26 produtos nos 12 períodos do horizonte de planejamento.

Tabela A.1. Demandas dos 26 produtos nos 12 períodos do horizonte de planejamento.

Produto	jan.	fev.	mar.	abr.	maio	jun.	jul.	ago.	set.	out.	nov.	dez.
1	181	162	145	159	160	151	154	196	178	184	199	235
2	61	40	36	37	46	59	44	49	64	98	102	118
3	56	10	35	2	17	71	40	140	120	132	141	182
4	166	139	112	134	146	172	157	157	171	165	148	241
5	120	109	87	107	126	129	131	130	131	134	117	151
6	139	123	99	121	97	109	124	139	152	151	164	183
7	65	46	44	43	69	73	80	67	86	84	74	118
8	62	41	42	37	62	81	77	61	87	80	51	121
9	53	10	35	2	121	30	105	154	120	31	62	175
10	70	125	104	172	58	16	60	88	137	53	249	218
11	176	170	70	100	10	69	29	88	125	65	218	165
12	59	79	113	58	39	54	78	132	131	183	200	155
13	128	177	181	137	47	27	53	77	70	76	138	209
14	86	138	63	162	19	11	6	148	115	173	120	159
15	86	91	144	160	20	24	48	151	98	172	124	103
16	118	157	118	81	21	4	7	162	132	85	164	126
17	143	97	86	116	43	53	70	123	108	168	237	245
18	170	70	54	68	32	77	28	85	92	75	141	125
19	126	178	144	166	32	49	11	79	159	123	190	245
20	171	136	63	142	36	53	76	73	182	102	152	107
21	159	181	70	113	76	3	54	65	153	130	130	216
22	168	138	75	83	23	49	52	71	61	86	201	192
23	120	160	63	147	42	56	53	126	51	112	190	166
24	64	145	113	147	53	45	7	167	188	145	121	136
25	147	155	71	108	75	25	21	117	119	166	106	225
26	88	144	176	104	72	61	53	182	60	103	148	168

Apêndice A.2. Estratégia baseada em horizonte rolante para determinar uma política de produção quando as incertezas ocorrem ao longo dos períodos do horizonte de planejamento.

Os passos da estratégia HR mencionada na Seção 5.5 são descritos a seguir:

Passo 1) Resolva o problema determinístico com os dados nominais.

Passo 2) Armazene a solução ótima das variáveis de decisão X_{it}^* , Y_{jt}^* e Z_{jt}^* , para todo $i \in I, j \in J, t \in T$.

Passo 3) Para $t = 1, \dots, T$, faça:

3.1) Fixe as variáveis do período atual t : $X_{it} = X_{it}^*$, $Y_{jt} = Y_{jt}^*$ e $Z_{jt} = Z_{jt}^*$, para todo $i \in I, j \in J$.

3.2) Atualize os parâmetros incertos do período t de acordo com as expressões abaixo:

$$c_{it} \sim U[c_{it}, c_{it} + \hat{c}_{it}], \quad \forall i \in I,$$

$$\hat{h}_{it}^+ \sim U[h_{it}^+, h_{it}^+ + \hat{h}_{it}^+], \quad \forall i \in I,$$

$$\hat{h}_{it}^- \sim U[h_{it}^-, h_{it}^- + \hat{h}_{it}^-], \quad \forall i \in I,$$

$$o_t \sim U[o_t, o_t + \hat{o}_t],$$

$$d_{it} \sim U[d_{it}, d_{it} + \hat{d}_{it}], \quad \forall i \in I,$$

em que $U[a, b]$ é um número aleatório gerado de acordo com uma distribuição uniforme entre a e b .

3.3) Resolva novamente o problema determinístico.