

# Aplicação individual e combinada dos gráficos de controle Shewhart e CUSUM: uma aplicação no setor metal mecânico

*Individual and combined application of CUSUM and Shewhart control charts: an application in the metalworking sector*



Olga Maria Formigoni Carvalho Walter<sup>1</sup>  
Elisa Henning<sup>2</sup>  
Marcio Evandro Cardoso<sup>1</sup>  
Robert Wayne Samohyl<sup>1</sup>

**Resumo:** O presente artigo tem como objetivo analisar e controlar estatisticamente um processo industrial, em que o gráfico do tipo Shewhart é o atualmente utilizado. A partir de uma aplicação realizada por meio da pesquisa axiomática quantitativa, são analisadas outras opções como o emprego de um gráfico CUSUM e um gráfico combinado Shewhart-CUSUM. Paralelamente à aplicação dos gráficos de controle, foram desenvolvidos *scripts* em ambiente R para calcular os limites de controle do gráfico CUSUM, por meio da aproximação de Siegmund (1985) e da construção do gráfico combinado Shewhart-CUSUM. Os resultados demonstram que a aplicação, tanto do gráfico CUSUM quanto do gráfico combinado Shewhart-CUSUM, possibilita detectar interferências no processo, as quais não foram identificadas pelo gráfico do tipo Shewhart. Assim, considera-se o gráfico de controle CUSUM, isolado ou combinado com o gráfico do tipo Shewhart, uma ferramenta preventiva mais sensível para avaliar interferências na qualidade do processo. Este artigo será útil tanto para pesquisadores quanto para profissionais da área de Engenharia de Produção e gestão de operações interessados em melhor compreender os parâmetros que compõem o projeto de um gráfico de controle CUSUM, bem como introduzi-lo em processos nos quais atualmente se utiliza somente o gráfico de controle de Shewhart.

**Palavras-chave:** Controle estatístico do processo (CEP). Gráfico de controle. Shewhart. CUSUM. Gráfico de controle combinado Shewhart-CUSUM.

**Abstract:** *The objective of this study is to statistically analyze and control an industrial process in which the Shewhart style control chart is used. Through an axiomatic quantitative research, several options of application are evaluated, such as the use of the CUSUM control chart individually or a combined Shewhart-CUSUM chart probabilistically combined. At the same time, R language scripts were developed to calculate the control limits for the CUSUM control chart using Siegmund's (1985) approximation and the construction of the combined CUSUM-Shewhart chart. The results show that the application of both the CUSUM and the combined Shewhart-CUSUM charts enabled the detection of interferences in the process that were not detected by the Shewhart chart alone. Therefore, it can be said that the CUSUM chart either individually or combined with the Shewhart chart is an effective preventive tool for quality control. The results obtained can be useful for researchers and for production engineering professionals who focus on understanding the CUSUM chart parameters and applying it to industrial processes that adopt only the Shewhart charts.*

**Keywords:** *Statistical process control (SPC). Control chart. Shewhart. CUSUM. Combined Shewhart-CUSUM control charts.*

<sup>1</sup> Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção – PPGEP, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, CP 476, CEP 88010-970, Florianópolis, SC, Brasil, e-mail: olgaformigoni@gmail.com; marcio-evandro@uol.com.br; samohyl@deps.ufsc.br

<sup>2</sup> Departamento de Matemática – DMAT, Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, Rua Paulo Malschitzki, s/n, Campus Universitário Professor Avelino Marcante, CEP 89219-710, Joinville, SC, Brasil, e-mail: dma2eh@joinville.udesc.br

## 1 Introdução

Os gráficos de controle são utilizados com a finalidade de monitorar o processo e sinalizar aos analistas a necessidade de investigá-lo e ajustá-lo, conforme o tamanho dos desvios encontrados.

Os gráficos de Shewhart alcançaram sucesso devido à sua simplicidade, na qual a facilidade da regra de decisão se baseia apenas no exame do último ponto observado. Em outras palavras, pode-se dizer que, se ele está além dos limites de controle do gráfico, deve-se investigar a presença de causas especiais no processo. Mas esta é também uma grande desvantagem, pois ignora qualquer informação dada pela sequência anterior de pontos. Diz-se que o gráfico “não possui memória”. Isto torna o gráfico do tipo Shewhart relativamente insensível a pequenas mudanças no processo, da ordem de  $1,5\sigma$  (erros padrão) ou menos (MONTGOMERY, 2009).

Dado este problema, o gráfico de controle das Somas Acumuladas (CUSUM) e o gráfico de controle da Média Móvel Ponderada Exponencialmente (EWMA) foram desenvolvidos para corrigir esta lacuna, e são indicados para o monitoramento de processos sujeitos a pequenas alterações. Nestes gráficos, a decisão sobre o estado do controle estatístico do processo é baseada na informação acumulada das diversas amostras anteriores, e não somente na última delas. Assim, é possível sinalizar com maior rapidez os pequenos desajustes, como também identificar, com razoável acurácia, o momento em que ocorre uma mudança no processo.

Os gráficos CUSUM, apesar de serem mais sensíveis que os gráficos do tipo Shewhart para pequenas alterações na média, são pouco difundidos e não são muito utilizados pelas indústrias no Brasil (SAMOHYL, 2009). A principal razão disso está na dificuldade de utilização e interpretação se comparados aos tradicionais gráficos de Shewhart.

Todavia, nenhum dos gráficos mencionados irá ter um bom desempenho para todas as situações. Um tratamento possível é combinar múltiplos gráficos para abranger mudanças de diversas magnitudes. Como adicionar limites de Shewhart aos gráficos CUSUM ou EWMA para detectar tanto pequenas como grandes alterações (TSUNG; WANG, 2010).

Este artigo tem como objetivo avaliar alternativas para o monitoramento de um determinado processo, ponderando também as variações sensíveis não detectadas pelo gráfico de Shewhart. Como ferramenta auxiliar, rotinas no ambiente GNU R (R DEVELOPMENT... 2011) foram elaboradas, uma delas para estimar o limite de controle  $h$  do CUSUM por meio da aproximação de Siegmund (1985) e outra, para construir o gráfico combinado Shewhart-CUSUM.

Este artigo está estruturado da seguinte maneira: partindo da introdução e objetivos, apresenta-se o

embasamento teórico que fundamenta este trabalho. Na seção 2, são descritos os gráficos de controle do tipo Shewhart para variáveis; na seção 3, são apresentados os gráficos de controle CUSUM; na seção 4, é introduzido o gráfico de controle combinado Shewhart-CUSUM; a seção 5 constitui-se dos materiais e métodos empregados, bem como a apresentação dos dados. A seção 6 é reservada à análise e discussão dos resultados das aplicações dos gráficos Shewhart e CUSUM individuais e combinados. Finalizando, na seção 7, são apresentadas as conclusões e considerações finais.

## 2 Gráfico de controle para variáveis

Os gráficos de controle para variáveis são usados para monitorar um processo quando a característica da qualidade é uma variável que pode ser mensurada e expressa em um valor na escala contínua. Neste caso, é conveniente descrever a característica da qualidade por meio da medida de sua tendência central e sua variabilidade, e representá-la em um gráfico de controle para variáveis adequado.

Uma das formas de monitorar a variabilidade de um processo é utilizar os gráficos de controle, que são elementos visuais para monitoramento da conformidade de características dos processos. Por meio de gráficos de controle corretamente utilizados, pode-se rapidamente identificar alterações inusitadas em pontos estratégicos na linha de produção (SAMOHYL, 2009).

Os gráficos de controle foram originalmente propostos em 1924, por Walter Shewhart, que trabalhou no *Bell Telephone Laboratories*, com a intenção de eliminar variações anormais pela diferença entre variações devidas às causas assinaláveis e aquelas devidas às causas aleatórias. Segundo Kume (1993), causas aleatórias são inevitáveis e, fatalmente, ocorrem em um processo, mesmo que a operação seja executada com o uso de matéria-prima e métodos padronizados. Já as causas assinaláveis significam que existem fatores relevantes a serem investigados. Samohyl (2009) cita uma terceira causa chamada estrutural. Como a causa especial, a estrutural é também eliminável ou compensável, mas a diferença é que esta ocorre periodicamente ou em função de outra.

Um gráfico de controle consiste na plotagem de três linhas. Representam os limites de controle: um limite de controle superior (LCS), um limite de controle inferior (LCI) e a média de amostras (subgrupos racionais), conhecida como a linha central (LC), que é a média da variável ou o alvo (valor nominal) da característica. A Figura 1 apresenta os principais elementos dos gráficos de controle tradicionais de Shewhart (SAMOHYL, 2009).

Tradicionalmente, as linhas de controle ficam em uma distância de três erros padrão da linha central, originalmente sugerida por Shewhart (1931). O

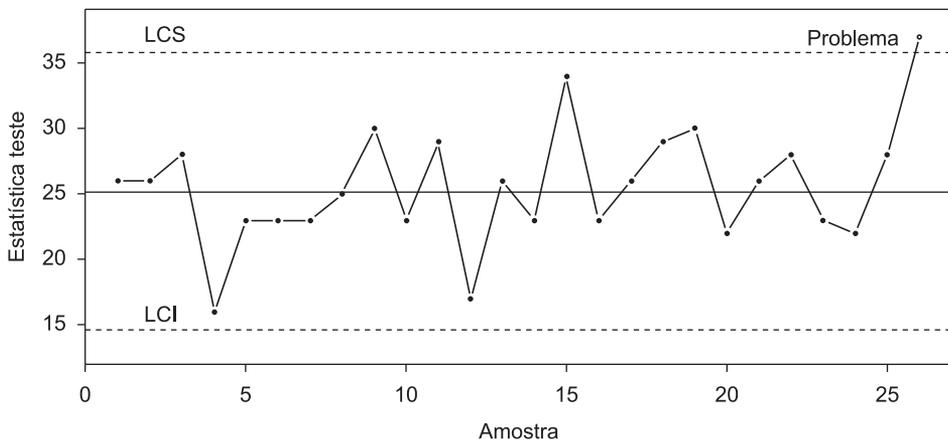


Figura 1. Gráfico de controle em formato conceitual. Fonte: Adaptado de Samohyl (2009).

controle da média do processo é usualmente feito por meio do gráfico de controle para as médias, gráfico  $\bar{X}$  (MONTGOMERY, 2009). A variabilidade do processo pode ser monitorada tanto pelo gráfico de controle para o desvio padrão, gráfico  $S$ , como pelo gráfico para amplitude, gráfico  $R$ .

O gráfico  $\bar{X}$  representa o valor médio de um subgrupo e é utilizado com o objetivo de controlar a média (centralização) do processo, enquanto o gráfico  $R$  controla a variação. Estes gráficos devem ser empregados simultaneamente. Um gráfico  $R$  é geralmente aplicado em conjunto com um gráfico  $\bar{X}$  para controlar a variação do processo dentro de um subgrupo.

Uma das maneiras de se avaliar o desempenho de um gráfico de controle é mediante o número médio de amostras (NMA), que corresponde ao número de amostras necessárias para se detectar uma mudança ocorrida no processo. É a quantidade de amostras na média, necessárias, para que o gráfico de controle sinalize que o processo está fora de controle estatístico.

Um gráfico de controle pode ser visto como uma sequência de testes de hipóteses. Nesse caso, o alarme falso está associado à rejeição da hipótese nula ( $H_0$ ) verdadeira. A aceitação da hipótese alternativa ( $H_1$ ), implica em um processo não estável. Alarmes falsos são denominados  $NMA_0$  em analogia com  $H_0$  e alarmes verdadeiros de  $NMA_1$ , em analogia com  $H_1$  (SAMOHYL, 2009). Para os gráficos do tipo Shewhart, o  $NMA_0$  (alarme falso) pode ser calculado pela Equação 1:

$$NMA_0 = \frac{1}{\alpha} \tag{1}$$

em que  $\alpha$  representa a taxa de alarmes falsos. Assim, um gráfico de controle do tipo Shewhart, com limites de três erros padrão ( $\alpha = 0,27\%$ ), tem  $NMA_0$  igual a 370, isto quando o processo está sob controle. Assim, tem-se, em média, um alarme falso a cada 370 amostras, aproximadamente.

Os limites de controle são normalmente estabelecidos considerando três erros padrão, a partir da média  $\bar{X}$ , para mais e para menos. Costa, Epprecht e Carpinetti (2009) afirmam que com a utilização de três erros padrão, enquanto o processo estiver sob controle, raramente um ponto cairá na região de ação do gráfico, que visaria à intervenção sob o processo. Para a definição dos limites de controle no gráfico  $\bar{X}$ , utilizam-se as Equações 2, 3 e 4 (MONTGOMERY, 2009).

$$LCS_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} \tag{2}$$

$$LC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} \tag{3}$$

$$LCI_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} \tag{4}$$

em que  $\mu_x$  corresponde à média de  $\bar{X}$  e  $\sigma_x$  corresponde ao erro padrão de  $\bar{X}$ .

Para facilitar a elaboração dos gráficos de controle no chão de fábrica, Shewhart desenvolveu uma tabela de coeficientes, que depende do tamanho  $n$  do subgrupo e que pode ser utilizada para o cálculo dos limites de controle. Esta tabela pode ser encontrada em referências tradicionais de CEQ como Montgomery (2009), Costa, Epprecht e Carpinetti (2009) e Samohyl (2009).

Desse modo, ao invés de utilizar a Equação 2 e 4 para definir os limites de controle, segundo Montgomery (2009), é possível utilizar a Equação 5 e 7, respectivamente. E a Equação 6 é equivalente a Equação 3.

$$LCS = \bar{X} + A_2 \bar{R} \tag{5}$$

$$LC = \bar{X} \tag{6}$$

$$LCI = \bar{X} - A_2 \bar{R} \tag{7}$$

em que  $\bar{X}$  corresponde à média da média das amostras;  $\bar{R}$  corresponde à média das amplitudes das amostras; e  $A_2$  corresponde ao fator para construção dos gráficos de controle, tabelado.

Existe um gráfico para o monitoramento da variabilidade do processo, mas na prática pouco utilizado, que é o gráfico de variabilidade  $S$ , baseado diretamente no erro padrão dos subgrupos. É mais apropriado quando os subgrupos têm, por exemplo, tamanho  $n > 10$ , o que é raro acontecer na prática. Entretanto, a acurácia do gráfico  $S$  é melhor do que o gráfico  $R$ , aparecendo menos alarmes falsos, e a sua utilização deve ser considerada como opção em fábricas em que a cultura dos métodos quantitativos é mais evoluída e apreciada (SAMOHYL, 2009).

Ao localizar um ponto além dos limites de controle (acima do  $LCS$  ou abaixo do  $LCL$ ) ou ainda identificar um comportamento não aleatório dos pontos no gráfico, deve-se investigar o processo para descobrir se realmente está fora de controle estatístico e, em caso positivo, as causas devem ser identificadas e removidas. Há alguns padrões específicos de comportamento dos pontos que identificam que o processo está fora de controle, são as regras suplementares (NELSON, 1985).

As regras suplementares (ou sensibilizantes) foram criadas com o propósito de acelerar a detecção de alterações no processo. Muitas delas tentam formalizar a percepção de que algo, no processo, possa estar fora de ordem. A incorporação dessas regras implica no aumento do risco  $\alpha$ , ou seja, há um aumento no número de alarmes falsos (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2009). A inclusão, por exemplo, de uma das regras suplementares, em que dois, em três pontos consecutivos, se localizam além dos limites de dois erros padrão, denominados limites de alerta, leva à redução de um  $NMA_0$  de 370 para 225,4 (CHAMP; WOODALL, 1987), implicando no aumento do número de alarmes falsos. Desta forma, deve-se ter cautela ao aplicar duas ou mais regras de decisão simultaneamente, uma vez que um número excessivo de alarmes falsos pode ser prejudicial a um programa de Controle Estatístico do Processo (MONTGOMERY, 2009).

### 3 Gráfico de Controle de Soma Acumulada (CUSUM)

Os gráficos de Shewhart se tornaram populares no controle estatístico de processo devido à sua simplicidade de uso e interpretação, além de detectarem com eficácia grandes mudanças. Porém estes gráficos possuem uma desvantagem, que é apenas efetuar a análise do último ponto plotado, não levando em consideração as observações anteriores, o que os torna insensíveis à detecção de mudanças de menor magnitude.

O gráfico de soma acumulada (CUSUM) é um aprimoramento do gráfico de controle  $\bar{X}$  de Shewhart e é o mais apropriado para reconhecer o histórico dos dados, característica ausente em gráficos mais simples, e também para reconhecer pequenas alterações nos processos muito antes dos alarmes dos gráficos  $\bar{X}$  (SAMOHYL, 2009).

No gráfico CUSUM, a decisão sobre o estado do processo é baseada na informação acumulada de diversas amostras, e não apenas na última delas. Acumulando, dessa forma, a pequena evidência que cada amostra fornece do estado do processo, consegue-se maior rapidez na sinalização de pequenos desajustes (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2009).

A base do conceito CUSUM é a soma acumulada dos desvios das mensurações ao redor da média do processo como ponto de referência (SAMOHYL, 2009). O gráfico CUSUM incorpora diretamente toda a informação na sequência de valores da amostra, plotando as somas acumuladas dos desvios dos valores dos subgrupos em relação à média ( $\mu_0$ ) (MONTGOMERY, 2009). O cálculo começa procurando os desvios em relação à média, ou seja, a diferença entre o valor observado (média amostral) e a média ideal do processo  $\mu_0$ . A partir deste desvio, a soma acumulada é iniciada com a Equação 8:

$$C_i = \sum_{j=1}^i (X_j - \mu_0) = (X_i - \mu_0) + C_{i-1} \quad (8)$$

em que  $C_i$  é a soma acumulada incluindo a  $i$ -ésima amostra.

Quando o processo está sob controle, o resultado da Equação 8 flutua em torno de zero, ou seja, é um passeio aleatório com média zero (MONTGOMERY, 2009). Se a média se desloca para um valor superior a  $\mu_1 > \mu_0$ , uma tendência para cima ou positiva se desenvolverá na soma cumulativa  $C_i$ . A mesma coisa acontece se a média se desloca para baixo, para um valor  $\mu_1 < \mu_0$ . Uma tendência para baixo, ou negativa, se desenvolverá na soma cumulativa  $C_i$  (MONTGOMERY, 2009; SAMOHYL, 2009).

O CUSUM pode ser construído para monitorar tanto a média de um processo de observações individuais, quanto para a média de subgrupos racionais (MONTGOMERY, 2009). Para amostras de tamanho  $n > 1$ , em que são utilizados subgrupos racionais, substitui-se, na Equação 8,  $X_i$  por  $\bar{X}_i$  (SAMOHYL, 2009; MONTGOMERY; RUNGER, 2009). A estatística acumulada  $C_i$  não é um gráfico de controle, pois não apresenta os limites superiores e inferiores. Para representar o CUSUM, por meio de gráficos de controle, existem duas possibilidades: o CUSUM Tabular e a Máscara V do CUSUM. Neste artigo, será abordado apenas o gráfico CUSUM Tabular.

### 3.1 O gráfico de controle CUSUM Tabular

O gráfico de controle CUSUM Tabular utiliza-se de um procedimento que calcula as somas acumuladas negativas e positivas e as compara com um limite de controle  $h$  para indicar se o processo está ou não sob controle. Este procedimento pode ser utilizado tanto para o monitoramento da média de observações individuais, quanto para o monitoramento da média de subgrupos racionais.

O CUSUM tabular acumula desvios positivos em relação à média na estatística  $C_i^+$ , denominada CUSUM unilateral superior. Já os desvios negativos compõem a estatística  $C_i^-$ , denominada CUSUM unilateral inferior. Estas estatísticas são calculadas por meio de algoritmos de soma acumuladas, representadas pelas Equações 9 e 10:

$$C_i^+ = \max\left[0, X_i - (\mu_0 + k) + C_{i-1}^+\right] \quad (9)$$

$$C_i^- = \max\left[0, (\mu_0 - k) - X_i + C_{i-1}^-\right] \quad (10)$$

em que os valores iniciais para  $C_i^+ = C_i^- = 0$ . O valor de referência  $k$  é a metade entre o valor da média  $\mu_0$  e o valor da média fora de controle, que se tem interesse em detectar rapidamente. Ou seja, o valor de referência  $k$  é determinado entre o valor pretendido  $\mu_0$  e o valor da média fora de controle estatístico  $\mu_1$ . O valor de referência  $k$  deve ser escolhido de forma que o valor da soma  $\mu_0 + k\sigma$  ou  $(\mu_0 - k\sigma)$  esteja situado entre a média do processo  $\mu_0$  e a média deslocada (fora de controle estatístico) que se deseja avaliar. Se a mudança é expressa em unidades de erros padrão quando  $\mu_1 = \mu_0$ , então  $k$  representa a metade da magnitude desta mudança, conforme Equação 11:

$$k = \frac{\delta}{2\sigma} = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} \quad (11)$$

em que  $\delta$  é o tamanho da mudança que se deseja detectar em unidades de erro padrão ( $\sigma$ );  $\mu_0$  é o valor alvo; e  $\mu_1$ , o valor da média fora de controle.

Alves (2003) aponta que o valor de referência  $k$  está diretamente relacionado com a magnitude da variação que se deseja detectar com o gráfico CUSUM. Quanto menor este fator, menor será a faixa de variação que o gráfico será capaz de detectar e maior será a sensibilidade do gráfico. Assim, se  $C_i^+$  ou  $C_i^-$  excederem o valor de  $h$ , o processo é considerado fora de controle. O gráfico CUSUM Tabular pode ser aplicado para os dados observados ( $X_j$ ) ou padronizados ( $y_j$ ), conforme a Equação 12:

$$y_i = (X_j - \mu_0) / \sigma \quad (12)$$

Para o gráfico CUSUM Tabular padronizado, o algoritmo de soma acumulada é definido por meio das Equações 13 e 14:

$$C_i^+ = \max\left[0, y_i - k + C_{i-1}^+\right] \quad (13)$$

$$C_i^- = \max\left[0, -k - y_i + C_{i-1}^-\right] = \min\left[0, y_i + k + C_{i-1}^-\right] \quad (14)$$

### 3.2 Parâmetros do gráfico de controle CUSUM Tabular

A escolha dos parâmetros  $k$  e  $h$ , que compõem o gráfico de controle CUSUM Tabular, deve ser realizada de modo que sua seleção forneça bom desempenho para o NMA até o alarme.

Várias abordagens podem ser utilizadas para determinar o NMA de um CUSUM. Brook e Ewans (1972) utilizam o método de aproximação, baseado em Cadeias de Markov, para aproximar mudanças da condição de “sob controle” para “fora de controle” estatístico. Hawkins (1992) apresenta um procedimento simples, mas bastante preciso para o cálculo do NMA, baseado em uma equação de aproximação. Outra abordagem é a proposta por Siegmund (1985), em que o cálculo dos parâmetros do gráfico de controle CUSUM é facilmente realizado, pelas equações aproximadas 15 e 16:

$$NMA_0 = \frac{e^{2k(h+1,166)} - 2k(h+1,166) - 1}{2k^2} \quad (15)$$

$$NMA_1 = \frac{e^{-2(d-k)(h+1,166)} + (d-k)(h+1,166) - 1}{2(d-k)^2} \quad (16)$$

em que  $d$  representa o tamanho do deslocamento da média do processo em erros padrão;  $k$  é o valor de referência; e  $h$  é o limite de controle. Quando  $(d - k = 0)$ , utiliza-se a aproximação  $NMA_1 = (h + 1,166)^2$ .

Com base em vários estudos analíticos que procuram fornecer bom desempenho para o NMA, Montgomery (2009) e Samohyl (2009) apresentam algumas recomendações para a escolha dos parâmetros que compõem o gráfico de controle CUSUM.

De acordo com Montgomery (2009), um valor razoável para  $H$  é cinco vezes o valor do erro padrão ( $\sigma$ ), ou seja,  $H = 5\sigma$ . Definindo  $H = h\sigma$  e  $K = k\sigma$ , e utilizando  $h = 4$  ou  $h = 5$  e  $k = 0,5$ , resultará em um CUSUM com boas propriedades do NMA contra

uma mudança na média do processo de  $1,5\sigma$  (erros padrão). Por meio da Tabela 1, é possível identificar as variações que ocorrem no NMA com diferentes configurações de  $h$  e  $k$ .

O valor de referência  $k$  amplamente utilizado na prática é de 0,5, o que significa que está se deixando de se preocupar com variações de meio desvio padrão no processo. O valor de referência  $k$  ajuda a melhorar o  $NMA_1$  do gráfico, detectando as alterações no processo mais rapidamente do que o gráfico de Shewhart (SAMOHYL, 2009).

A Tabela 1 apresenta os valores de NMA calculados pela aproximação de Siegmund (1985), desenvolvida neste artigo. Verifica-se que os valores apresentados estão bem aproximados daqueles mostrados por Samohyl (2009).

Conforme a Tabela 1, a alteração de um erro padrão na média com  $h = 4,77$  e  $k = 0,5$ , para o gráfico de controle CUSUM, é detectada em aproximadamente 9,88 amostras. Já o gráfico de controle de Shewhart exigiria 43,89 amostras em média, para detectar a mesma mudança. Ou seja, para esta configuração, o gráfico de controle CUSUM detecta a alteração mais rapidamente.

Ainda, por meio da Tabela 1, é possível verificar que, para várias configurações de  $h$  e  $k$ , o gráfico de controle CUSUM tem menores valores para NMA que o gráfico de controle de Shewhart. Até  $1,5\sigma$  (erros padrão) de deslocamento na média, todas as configurações de  $h$  e  $k$  reagem mais rapidamente na detecção de alterações do processo no gráfico de controle CUSUM. Dessa forma, os gráficos do controle CUSUM são recomendados e associados a processos que exigem maior precisão e que não suportam a ocorrência de pequenas alterações que devem ser detectadas rapidamente. Já para processos

em que grandes mudanças são mais significativas, adotam-se os gráficos de controle de Shewhart (SAMOHYL, 2009).

No Apêndice A, são apresentados *scripts* desenvolvidos no ambiente GNU R (R DEVELOPMENT..., 2011), baseados na aproximação de Siegmund (1985). A primeira função calcula o valor de NMA e utiliza três parâmetros de entrada: a magnitude da mudança em números de erros padrão, o valor de referência  $k$  e o limite de controle  $h$ . Esta função retorna o NMA para um CUSUM unilateral e o NMA para um CUSUM bilateral, e calcula tanto  $NMA_0$  como  $NMA_1$ . A segunda função estima o limite de controle  $h$  e utiliza dois parâmetros de entrada: o valor de referência  $k$  e  $NMA_0$ , retornando o limite de controle  $h$  para um CUSUM unilateral e bilateral.

#### 4 Gráfico de Controle Combinado Shewhart-CUSUM

Uma abordagem para aumentar a sensibilidade do gráfico CUSUM, para grandes mudanças, é o procedimento probabilístico de combinar os gráficos de Shewhart-CUSUM (MONTGOMERY, 2009). Este gráfico combina as vantagens dos gráficos Shewhart e CUSUM e tem largas aplicações práticas, sendo o único gráfico de CEP recomendado pela USEPA (UNITED..., 2009) para monitoramento de aquíferos (GIBBONS, 1999; ABUJIYA; RIAZ; LEE, 2012).

Além do monitoramento de aquíferos, gráficos combinados Shewhart-CUSUM para monitoramento de médias têm sido aplicados nas mais diversas áreas, como no monitoramento ambiental (CHOU; O'BRIEN; BARNETT, 2001; ZHOU et al., 2008; UNITED..., 2009), no monitoramento de processos

**Tabela 1.** Comparação de desempenho do gráfico CUSUM tabular com o gráfico Shewhart.

Deslocamento na média em $\sigma$	NMA Shewhart	$k = 0,25;$ $h = 8,01$	$k = 0,5;$ $h = 4,77$	$k = 0,75;$ $h = 3,32$	$k = 1;$ $h = 2,49$
0,00	370,38	370,84	371,48	368,26	372,46
0,25	281,14	84,20	123,88	166,56	208,29
0,50	155,22	28,79	35,23	49,43	68,10
0,75	81,22	16,35	16,16	20,12	27,15
1,00	43,89	11,35	9,88	10,79	13,37
1,25	24,96	8,68	7,03	6,99	7,91
1,50	14,97	7,02	5,44	5,09	5,36
1,75	9,47	5,90	4,43	3,99	3,99
2,00	6,30	5,08	3,74	3,27	3,16
2,25	4,41	4,46	3,23	2,77	2,60
2,50	3,24	3,98	2,84	2,40	2,22
2,75	2,49	3,59	2,54	2,12	1,93
3,00	2,00	3,27	2,29	1,90	1,70

Fonte: Adaptado de Samohyl (2009), cálculos a partir dos *scripts* disponíveis no Apêndice A.

laboratoriais (SOLBERG, 1984; BLACKSELL et al., 1994; ROCHA, 2004; CONRATHS; SCHARES, 2006), em previsão de demanda (COELHO, 2008) e no monitoramento dos erros de previsão (SOUZA; SAMOHYL, 2008).

Um gráfico combinado Shewhart-CUSUM incorpora, num mesmo eixo, os valores observados, os limites de controle Shewhart, os valores das somas cumulativas (positiva e negativa) e o limite de controle do CUSUM. É uma modificação do procedimento CUSUM, com a adição do gráfico de controle Shewhart (LUCAS, 1982).

A combinação de gráficos de controle, considerando a função de probabilidade de ocorrência de alarmes falsos, foi abordada por Montgomery (2009), Coelho (2008) e Wu et al. (2008). De modo geral, se há  $r$  variáveis estatisticamente independentes para um produto em particular e se o gráfico com probabilidade de erro tipo I é mantido para cada uma, então a verdadeira probabilidade (erro tipo I), para cada procedimento de controle conjunto, é definida pela Equação 17:

$$\alpha' = 1 - (1 - \alpha)^r \quad (17)$$

em que  $(1 - \alpha)^r$  é a probabilidade de que todas as variáveis sejam representadas no gráfico simultaneamente dentro de seus limites de controle (MONTGOMERY, 2009).

Seguindo este raciocínio, quando dois gráficos diferentes monitoram a mesma variável, a taxa de alarmes falsos do gráfico combinado  $\alpha_{cs}$  será uma combinação de taxas individuais de cada um,  $\alpha_s$  e  $\alpha_c$  para Shewhart e CUSUM, respectivamente. Assim, uma expressão que sumariza esta combinação é dada pela Equação 18, desenvolvida da Equação 17:

$$\alpha_{cs} = \alpha_s + \alpha_c - \alpha_s \alpha_c \quad (18)$$

Logo, dois gráficos de controle com taxas de alarme falso de 1% individualmente geram um gráfico combinado com taxa de alarme falso de cerca de 2%. Portanto, desejando-se manter a taxa no valor original (1%), menor que 2%, os limites de controle dos dois gráficos devem ser recalculados, resultando em valores mais distantes da linha central (COELHO, 2008).

Assim, no planejamento de gráfico, é necessário ajustar o  $LCS$  (Shewhart) e  $h$  (CUSUM) de modo a calcular o erro tipo I (taxa de alarme falso -  $\alpha$ ) do procedimento combinado. Ressalta-se que os limites de Shewhart devem ser inferiores a  $h + k$ , caso contrário não há nenhuma razão para utilizar um gráfico combinado (LUCAS, 1982). Se o  $LCS$  é relaxado,  $h$  necessita ser mais estreito, e o gráfico combinado terá um poder maior para detectar pequenas mudanças. Similarmente, se o  $LCS$  for mais estreito,

$h$  será mais largo, tendo o gráfico um poder maior para detectar grandes mudanças (WU et al., 2008).

Uma vez determinados os valores de  $NMA_0$  do combinado e dos esquemas individuais, podem-se encontrar os parâmetros do CUSUM e limites de controle de Shewhart, pelo método que for mais conveniente ao pesquisador. Esse procedimento será elaborado na seção 6 sobre a aplicação do método proposto numa indústria metal mecânica.

## 5 Materiais e Métodos

Segundo a classificação de método de pesquisa de Bertrand e Fransoo (2002), esta é uma pesquisa axiomática quantitativa, e é dirigida a modelos de problemas idealizados, ou seja, aqueles oriundos da prática que foram simplificados (MORABITO NETO; PUREZA, 2012). A pesquisa axiomática quantitativa gera conhecimento sobre determinadas variáveis do modelo de acordo com as diretrizes a respeito do comportamento de outras variáveis do próprio modelo. Para tal, conta com o auxílio de métodos formais nas suas áreas específicas, tais como matemática, estatística e computação (BERTRAND; FRANSOO, 2002). Segundo os mesmos autores, este tipo de pesquisa divide-se ainda em normativa e descritiva.

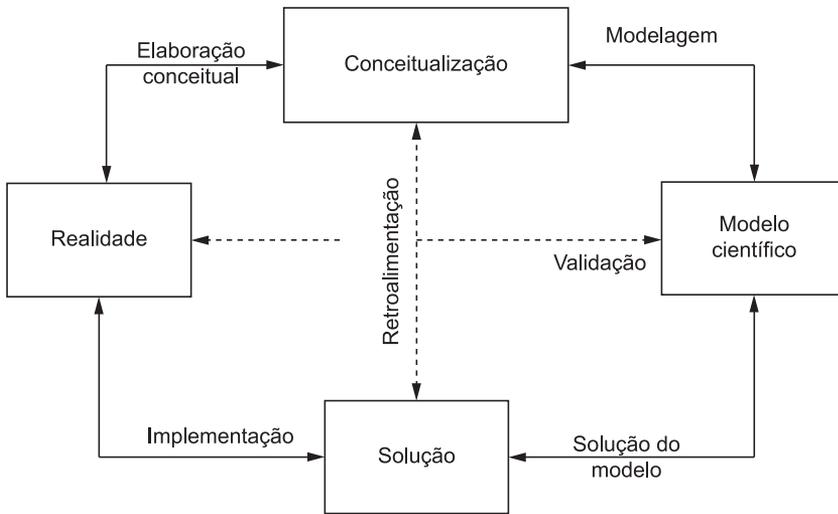
De acordo com as características da pesquisa axiomática, este trabalho enquadra-se como pesquisa axiomática normativa. É assim classificada, pois pretende encontrar estratégias para melhorar o sistema real existente empregando os tradicionais gráficos de controle de Shewhart, o gráfico de controle CUSUM e o combinado Shewhart-CUSUM para comparar e avaliar alternativas para o monitoramento de um processo de usinagem. As fases da pesquisa axiomática normativa, conduzida neste trabalho, têm base no ciclo de Mitroff et al. (1974) da Figura 2, abordada também por Bertrand e Fransoo (2002).

A representação de cada fase da Figura 2, utilizada nesta pesquisa, é detalhada no Quadro 1.

Na primeira fase, a de conceitualização, o modelo conceitual é construído, mediante as variáveis a serem analisadas, bem como o escopo do problema, no caso a variabilidade do processo.

Na sequência, está a fase de modelagem, em que um modelo científico é desenvolvido com o objetivo de definir as relações entre as variáveis de interesse. A aplicação de gráficos de controle estatístico de processos auxilia no reconhecimento de padrões não aleatórios na característica da qualidade, configurando-se um modelo apropriado para esta classe de problemas.

Na terceira fase de solução do modelo, o modelo é resolvido utilizando mecanismos matemáticos e estatísticos com o auxílio de técnicas de computação, especificamente os *scripts* desenvolvidos em ambiente R. Na fase final, os resultados alcançados pela solução



**Figura 2.** Modelo da pesquisa axiomática e suas fases. Fonte: Bertrand e Fransoo (2002) apud Mitroff et al. (1974).

**Quadro 1.** Metodologia desta pesquisa mediante as fases da pesquisa axiomática quantitativa.

Fases da Pesquisa Axiomática		Fases da Presente Pesquisa
Fase	Características	
Conceitualização	Cria-se o modelo conceitual do problema. Escolhem-se o escopo do problema, o modelo a ser resolvido e as suas variáveis.	O modelo conceitual tem base nos tradicionais gráficos de controle de Shewhart, no gráfico de controle CUSUM e no gráfico combinado Shewhart-CUSUM. A variável analisada é a média do processo de usinagem.
Modelagem	O modelo quantitativo é construído e com ele são definidas as relações quantitativas entre as variáveis de interesse.	Esta fase corresponde à criação dos <i>scripts</i> apresentados nos Apêndices, com base no referencial teórico abordado neste trabalho.
Solução do Modelo	Métodos matemáticos são aplicados, sendo eles a principal ênfase nesta fase.	Execução dos <i>scripts</i> desenvolvidos (Apêndice A e B).
Implementação	Os resultados do modelo são implementados para ações em gestão de operações.	Os gráficos sugeridos mostraram-se uma alternativa viável, pois apresentaram informações que não foram possíveis de ser identificadas com o processo de controle atualmente utilizado pela empresa.

Fonte: Os autores com base em Bertrand e Fransoo (2002).

do modelo passam a ser praticados por meio da implementação.

Esta pesquisa foi conduzida em uma empresa do ramo metal mecânico, situada no norte do Estado de Santa Catarina. O produto avaliado trata-se de uma peça denominada pistão de compressão, que é utilizada em compressores de refrigeração. É um dos itens responsáveis pela compressão do ar refrigerante dentro do compressor. A característica de interesse estudado refere-se à altura do topo do pistão até o centro do furo, que possui dimensão nominal  $9,78 \pm 0,05$  (mm).

Os dados foram coletados durante o mês de outubro 2010 e correspondem a 44 subgrupos de tamanho  $n = 4$ , conforme apresentado na Tabela 2 do Anexo.

Na prática, o desenvolvimento, a implantação e a utilização de gráficos de controle passam por duas

fases operacionais, a fase I e a fase II (WOODALL, 2000; VINING, 2009). A primeira fase é em geral um estudo retrospectivo, que consiste em obter-se uma amostra representativa dos dados com o objetivo de determinar os limites de controle. Nesta fase, verificam-se as suposições necessárias de normalidade e autocorrelação. Quando estas suposições são satisfeitas, os gráficos podem ser aplicados e conclusões podem ser tiradas sobre o estado de controle estatístico do processo. Esta fase, que corresponde à estimação de parâmetros do processo, só deve ser encerrada quando se tem a certeza de que o processo encontra-se estável e ajustado.

A incorporação das regras suplementares utilizadas na interpretação dos gráficos de controle de Shewhart implica o aumento do número de alarmes falsos (NMA<sub>0</sub>) (CHAMP; WOODALL, 1987; COSTA;

EPPRECHT; CARPINETTI, 2009). Assim, neste trabalho, optou-se por não utilizá-las, pois, para fazer comparações entre os três gráficos de controle (Shewhart, CUSUM e gráfico combinado Shewhart-CUSUM), a análise só é efetiva para a mesma taxa de alarmes falsos.

A segunda fase tem o intuito de monitorar o processo e utiliza os limites de controle especificados na etapa anterior. Na fase II, pode surgir a dúvida sobre a necessidade e frequência de atualização dos limites de controle, para incorporar novos dados e rever o desempenho do procedimento. A resposta é específica a cada situação e depende de vários fatores, como a cultura da empresa, o tempo, os recursos e as prioridades (SAMOHYL, 2009).

Como ferramenta de apoio estatístico, é utilizado o *software R*, versão 2.12.1, uma linguagem e um ambiente para computação estatística (R DEVELOPMENT..., 2011). O R possui um pacote específico para controle estatístico do processo, denominado *Quality Control Charts* (qcc), desenvolvido por Scrucca (2004). Ele permite gerar gráficos de controle Shewhart para variáveis discretas e contínuas e para atributos, além de gráficos CUSUM para variáveis contínuas (HENNING; ALVES; SAMOHYL, 2008).

## 6 Análise e Discussão dos Resultados

Para analisar a estabilidade do processo produtivo, inicialmente testou-se a hipótese de normalidade da distribuição dos dados originais, a fim de garantir o correto uso do gráfico de controle CUSUM. Para esta finalidade, foi utilizado o teste de hipótese de Shapiro-Wilk. O resultado dos cálculos para o

teste de normalidade dos primeiros 30 subgrupos apresentou valor  $p$  igual a 0,850, o que indica que os dados se adequam a uma distribuição normal. A autocorrelação também foi descartada por meio da análise dos correlogramas. As características encontradas permitem que se utilizem os dados em sua forma original, sem necessidade de qualquer transformação, para que seja possível a aplicação dos gráficos de controle.

Os limites de controle de Shewhart foram definidos com o auxílio do *software R*, de acordo com as Equações 5 e 7, resultando em  $LCS = 9,801$  mm e  $LCI = 9,763$  mm, conforme Figura 3.

Na fase de monitoramento, foram analisados todos os dados por meio dos gráficos de controle de Shewhart, apresentados nas Figuras 3 e 4. A Figura 3 apresenta o gráfico de controle de Shewhart para a média ( $\bar{X}$ ) e a Figura 4 apresenta o gráfico de controle de Shewhart para a amplitude ( $R$ ).

Por meio da Figura 3, verifica-se que o processo apresenta-se sob controle estatístico, de acordo com os procedimentos adotados, pois nenhum dos pontos do gráfico apresenta-se além dos limites de controle superior e inferior.

Na Figura 4, que é o gráfico de controle de Shewhart para a amplitude ( $R$ ), o processo também se apresenta sob controle, pois, de acordo com os procedimentos adotados, os pontos do gráfico encontram-se dentro dos limites de controle. Os valores da média, limite de controle superior e inferior são 0,026; 0,0606; e 0, respectivamente. Porém, a indicação de processo sob controle se modifica quando os dados são analisados por meio do gráfico de controle CUSUM, apresentado na Figura 5.

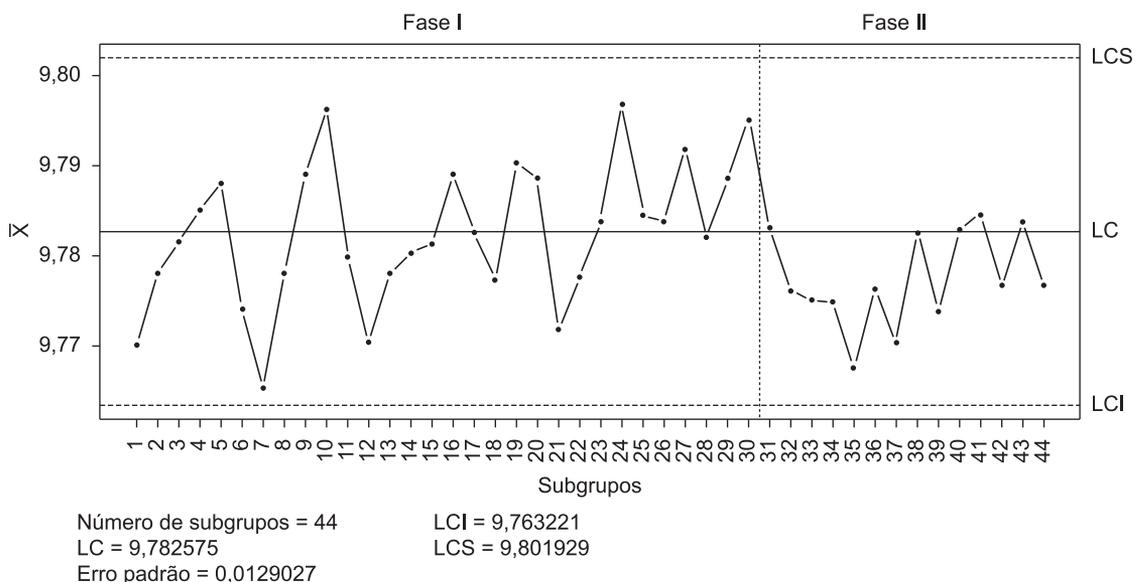


Figura 3. Fase de diagnóstico e de monitoramento do gráfico de controle de Shewhart para a média ( $\bar{X}$ ).

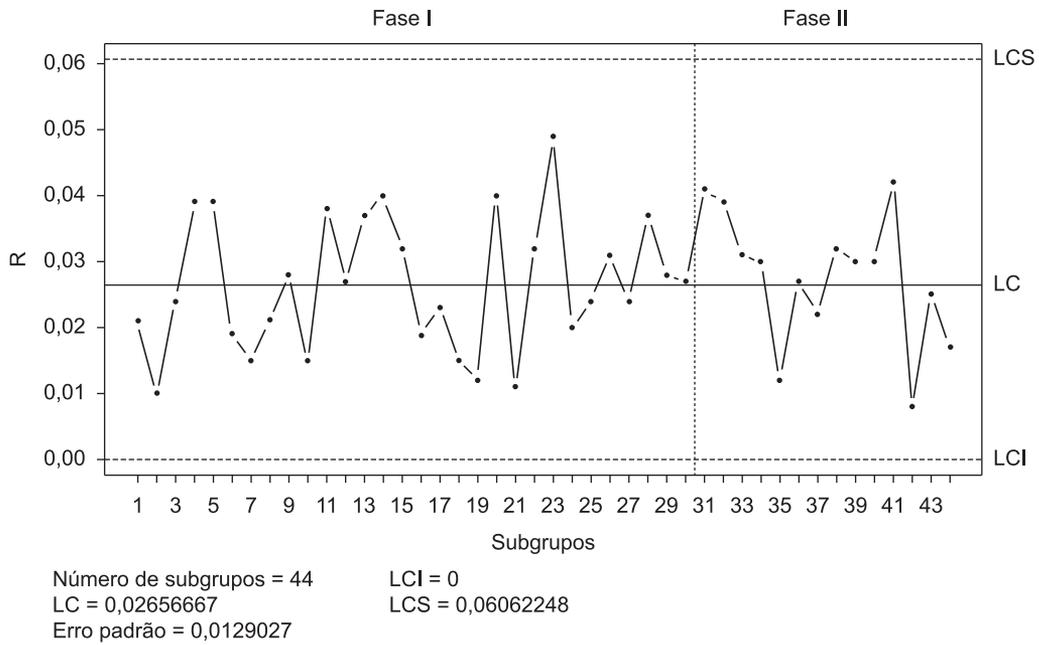


Figura 4. Fase de diagnóstico e de monitoramento do gráfico de controle de Shewhart para a amplitude (R).

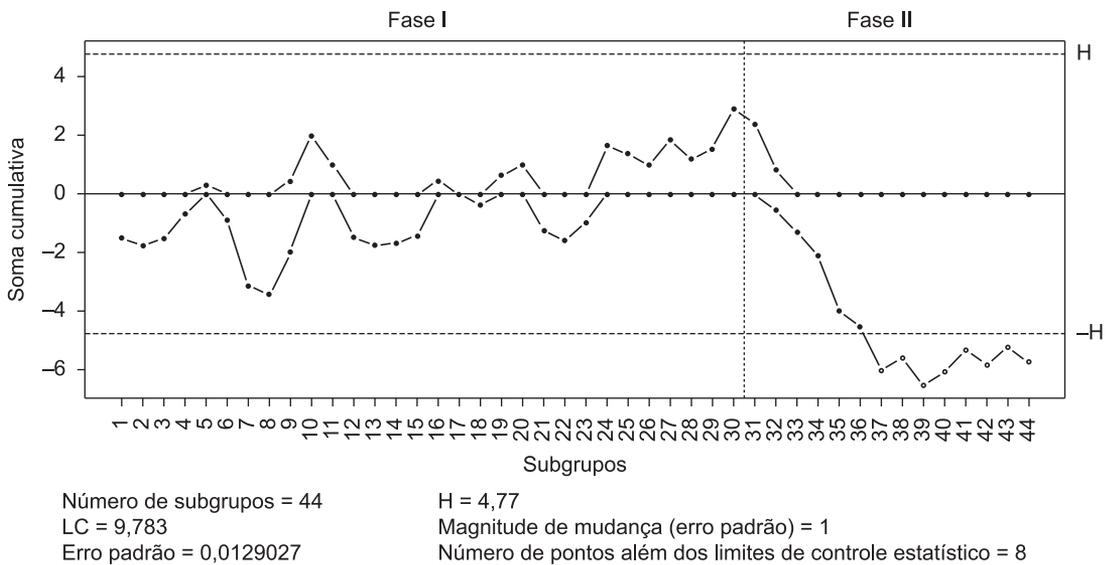


Figura 5. Gráfico de controle CUSUM para  $k = 0,5$  e  $h = 4,77$ .

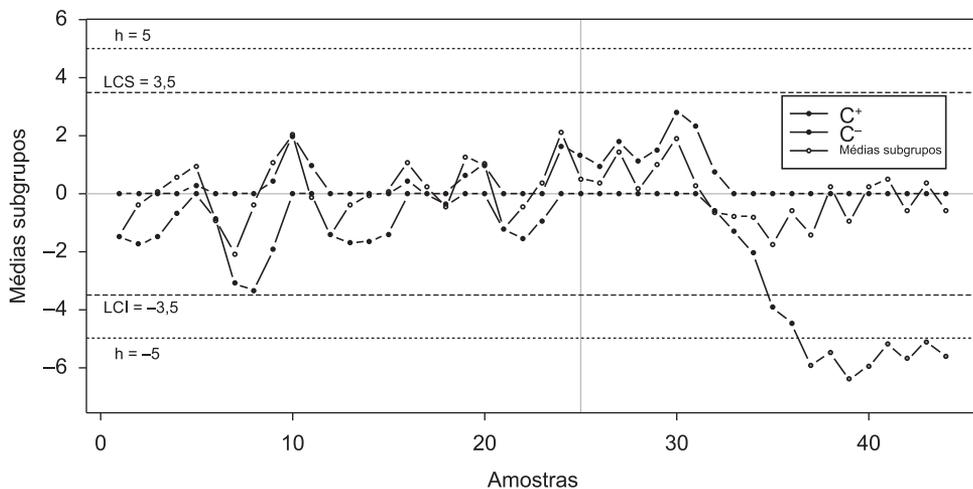
Como os dados são reais e a magnitude da mudança é desconhecida, utilizou-se um gráfico CUSUM, com os seguintes parâmetros  $k = 0,5$  e  $h = 4,77$ , como ferramenta auxiliar no monitoramento deste processo. Este gráfico sinalizaria alterações da ordem de um erro padrão em relação à média, em que os gráficos do tipo Shewhart são insensíveis. A escolha por estes parâmetros reside no fato de este valor para  $k$  ser frequentemente usado para o CUSUM padrão (MONTGOMERY, 2009; RYU; WAN; KIM, 2010) e significa  $NMA_0$  de 370.

Por meio da Figura 5, identificou-se que há uma tendência de decréscimo na média do processo a partir

da amostra 31, que se estende até a amostra 36, levando o processo para fora de controle estatístico a partir da amostra 37. A vantagem de usar um CUSUM reside na manutenção do  $NMA_0$  que, neste caso, é de 370.

A aplicação do CUSUM indica que há indícios de uma alteração na média do processo. Desta forma, foi necessário proceder à uma análise mais abrangente junto ao pessoal responsável pelo processo, a fim de identificar possíveis causas que estivessem causando esta alteração. As possíveis causas identificadas para essa variação foram as seguintes:

- Desgaste de ferramental: o aumento na média pode ser ocasionado pelo desgaste natural



**Figura 6.** Gráfico de controle combinado Shewhart-CUSUM para  $k = 0,5$  e  $h = 5,0$  e limites de Shewhart em  $3,5$ .

da ferramenta que, atualmente, é trocada de acordo com o plano de manutenção ou quando é sinalizado pelo gráfico de controle;

- Regulagem (*setup*): como é utilizado o mesmo equipamento para fabricar outros modelos de pistões, é necessário regular o equipamento conforme o modelo a ser produzido. Nesse momento, pode ocorrer variação na média do processo devido à regulagem errada do dispositivo que posiciona o pistão para ser usinado; e
- Regulagem inicial errada: uma das possíveis razões também pode estar relacionada ao *turn over*, ou seja, à rotatividade de operadores no posto de trabalho que realizam a atividade de *setup*. A preocupação dos operadores está relacionada ao atendimento das especificações e não à média do processo. Eles apenas verificam se o processo está dentro dos limites de controle do gráfico de Shewhart.

Para complementar, aplicou-se um gráfico combinado Shewhart-CUSUM (Figura 6), planejado para  $NMA_0 = 370$ , ou seja, com taxa de alarmes falsos  $\alpha = 0,27\%$ . Os valores  $NMA_0$ , para os gráficos individuais, Shewhart e CUSUM foram obtidos a partir da Equação 18, resultando em  $NMA_0 = 462,5$  ( $\alpha = 0,22\%$ ) para a parte CUSUM e  $NMA_0 = 1846$  ( $\alpha = 0,05\%$ ) para a parte Shewhart. O limite superior  $h$  do CUSUM foi calculado pela Equação 15 e resultou em  $h = 5,0$ . O valor do limite superior do gráfico tipo Shewhart é  $LSC = 3,5\sigma$  (erros padrão). O  $NMA_1$  para este gráfico combinado é de 4,9142 (ROCHA, 2004, p. 125). As rotinas aplicadas no cálculo dos valores de  $NMA_0$ , e para aproximação do limite superior do CUSUM por Siegmund (1985), estão disponíveis no Apêndice A e B.

O gráfico combinado Shewhart-CUSUM (Figura 6) não apresentou diferença em relação ao gráfico CUSUM individual (Figura 5), mas tem a vantagem de detectar alterações de magnitudes diversas. Assim, a parte CUSUM sinaliza rapidamente alterações de magnitudes menores na média, inclusive fornecendo informações sobre a tendência desta, mantendo, pela parte Shewhart, também a eficiência em detectar alterações maiores e repentinas, uma necessidade das especificações do processo. Assim, este gráfico configura-se como uma alternativa para o controle estatístico do processo analisado, apesar de sua interpretação ser mais complexa do que os demais gráficos de controle.

## 7 Conclusão e Considerações Finais

A sinalização mais rápida dos processos fora de controle estatístico acarreta a redução de perdas, que podem ser significativas quando pequenos desvios da média estabelecida para a característica da qualidade se revertem em prejuízos. Além disso, podem resultar na redução de competitividade no mercado.

Assim, este trabalho focalizou uma situação prática em que um gráfico CUSUM e um gráfico combinado Shewhart-CUSUM apresentam-se como alternativa aos tradicionais gráficos de Shewhart.

Quanto aos resultados obtidos com os gráficos de Shewhart, considerando como instabilidade apenas o critério de pontos fora dos limites de controle no processo analisado, pode-se afirmar que ele é considerado sob controle estatístico, ou seja, incidem sobre este processo apenas causas comuns. Porém, sob a ótica do gráfico de controle CUSUM e do gráfico combinado Shewhart-CUSUM, é possível sinalizar alterações de menor magnitude, além de informações sobre a tendência de aumento e diminuição da média do processo.

Embora o gráfico do tipo Shewhart não aponte problemas no processo, os gráficos CUSUM, inclusive os projetados para sinalizar alterações maiores ( $k = 0,75$ ;  $k = 1,0$ ), indicam que há uma tendência de diminuição na média do processo. Assim, em médio e longo prazo, a situação atual pode implicar problemas para a empresa, como o gráfico de Shewhart demorar em sinalizar esse aumento. Ao aplicar apenas o gráfico Shewhart, corre-se o risco de detectar tardiamente a mudança na média do processo.

A alteração da média do processo evidenciada com o gráfico de controle CUSUM e com gráfico combinado Shewhart-CUSUM permitiu identificar algumas causas (desgaste de ferramental e regulagem inicial errada), as quais, não recebendo a devida atenção, podem vir a interferir futuramente na qualidade do processo. Assim, considera-se que, nesta aplicação, o gráfico de controle CUSUM é importante, pois agiu como uma ferramenta preventiva para evitar futuras interferências na qualidade do processo.

A aplicação do gráfico combinado Shewhart-CUSUM mostrou-se uma alternativa interessante e conveniente, pois sinalizou, na parte CUSUM, as mudanças de menor magnitude, que não seriam detectadas pelo gráfico do tipo Shewhart. Além disso, permitiu, na parte Shewhart, detectar alterações maiores e repentinas, que o gráfico CUSUM individualmente necessitaria de mais amostras e mais tempo para sinalizar.

Além das considerações, quanto aos resultados da aplicação realizada, cabe também ressaltar a contribuição científica na elaboração de um *script* para construção do gráfico combinado Shewhart-CUSUM (visto que não foi possível encontrar ferramentas para este fim, tanto na literatura quanto em *softwares* estatísticos), sobretudo por poder ser utilizado em um ambiente de *software* livre e sem custos, como o R. Do mesmo modo, foi possível desenvolver no R uma rotina para calcular os limites de controle do CUSUM a partir da aproximação de Siegmund.

Especificamente para o processo, sugere-se que ações sejam tomadas a partir das causas identificadas para reduzir a variabilidade do processo, mantendo o monitoramento por meio do gráfico de controle CUSUM, de preferência em conjunto com o gráfico do tipo Shewhart, para confirmar se este voltará ao controle estatístico ou se novas causas serão identificadas.

Entende-se que este tipo de estudo é importante para impulsionar a aplicação de gráficos de controle mais sofisticados, como o CUSUM e o combinado nos processos industriais. Na medida em que os procedimentos de CEP vão se tornando parte da cultura da empresa, é possível (e recomendável) avaliar a aplicação destes gráficos. Para processos que exigem maior precisão, pelas próprias exigências da engenharia, o gráfico CUSUM é uma opção

adequada. Por outro lado, mudanças de grande magnitude requerem um gráfico de Shewhart. E, complementando, uma análise mais ampla, abrangendo mudanças tanto pequenas quanto grandes, pode ser mais bem avaliada por um gráfico combinado.

## Referências

- ABUJIYA, M. R.; RIAZ, M.; LEE, M. H. Improving the Performance of Combined Shewhart-Cumulative Sum Control Charts. **Quality and Reliability Engineering International**. Oct 2012. <http://dx.doi.org/10.1002/qre.1470>
- ALVES, C. C. **Gráficos de controle CUSUM: um enfoque dinâmico para a análise estatística de processos**. 2003. 134 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- BERTRAND, J. W. M.; FRANSOO, J. C. Modelling and simulations: operations management research methodologies using quantitative modelling. **International Journal of Operations and Production Management**, v. 22, n. 2, p. 241-264, 2002. <http://dx.doi.org/10.1108/01443570210414338>
- BLACKSELL, S. D. et al. Use of combined Shewhart-CUSUM Control Charts in Internal Quality Control of Enzyme-linked immunosorbent assays for the typing of foot and mouth disease virus antigen. **Revue scientifique et technique (International Office of Epizootics)**, v. 13, n. 3, p. 687-699, 1994.
- BROOK, D.; EVANS, D. A. An Approach to the Probability Distribution of Cusum Run Length. **Biometrika**, v. 59, n. 3, p. 539-549, 1972. <http://dx.doi.org/10.1093/biomet/59.3.539>
- CHAMP, C. W.; WOODALL, W. H. Exact results for Shewhart control charts with supplementary runs rules. **Technometrics**, v. 29, n. 4, p. 393-399, 1987. <http://dx.doi.org/10.1080/00401706.1987.10488266>
- CHOU, C. J.; O'BRIEN, R. F.; BARNETT, D. B. Application of intrawell testing of RCRA groundwater monitoring data when no upgradient well exists. **Environmental Monitoring and Assessment**, v. 71, n. 1, p. 91-106, 2001.
- COELHO, L. C. **Utilização de modelos de suavização exponencial para previsão de demanda com gráficos de controle combinados Shewhart-CUSUM**. 2008. 122 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.
- CONRATHS, F. J.; SCHARES, G. Validation of Molecular-diagnostic techniques in the parasitological laboratory. **Veterinary Parasitology**, v. 136, n. 2, p. 91-98, 2006. <http://dx.doi.org/10.1016/j.vetpar.2005.12.004>
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle Estatístico de Qualidade**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- GIBBONS, R. D. Use of Combined Shewhart-CUSUM Control Charts for Ground Water Monitoring Applications. **Ground Water**, v. 5, n. 37, p. 682-692, 1999.
- HAWKINS, D. M. A fast accurate approximation of Average Run Length of CUSUM Control Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 24, n. 1, p. 37-43, 1992.

- HENNING, E.; ALVES, C. C.; SAMOBYL, R. W. Gráficos de controle multivariados MEWMA e MCUSUM em ambiente R. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 18., 2008, Estância de São Pedro. **Anais...** Estância de São Pedro, 2008.
- KUME, H. **Métodos estatísticos para melhoria da qualidade**. São Paulo: Gente, 1993.
- LUCAS, J. M. Combined Shewhart-CUSUM Quality Control Schemes. **Journal of Quality Technology**, v. 14, n. 2, p. 51-59, 1982.
- MITROFF, I. I. et al. On managing science in the systems age: two schemas for the study of science as a whole systems phenomenon. **Interfaces**, v. 4, n. 3, p. 46-58, 1974. <http://dx.doi.org/10.1287/inte.4.3.46>
- MONTGOMERY, D. C. **Introdução ao controle estatístico da qualidade**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. G. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- MORABITO NETO, R.; PUREZA, V. Modelagem e simulação. In: MIGUEL, P. A. C. **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. cap 8, p.169-198.
- NELSON, L. S. Interpreting Shewhart X-bar Control Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 17, n. 2, p. 114-116, 1985.
- R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing**. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2010. Disponível em: <<http://www.R-project.org>>. Acesso em: 20 jan. 2011.
- ROCHA, R. **Implementação de sistema gerencial, com avanços em controle estatístico, em laboratório de nutrição animal**. 2004. 154 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.
- RYU, J.; WAN, H.; KIM, S. Optimal Design of a CUSUM Chart for a Mean Shift of unknown size. **Journal of Quality Technology**, v. 42, n. 3, p. 311-326, 2010.
- SAMOBYL, R. W. **Controle Estatístico da Qualidade**. Rio de Janeiro: Campus, 2009.
- SCRUCCA, L. qcc: An R package for quality control charting and statistical process control. **R News**, v. 4, n. 1, p. 11-17, jun. 2004. Disponível em <[http://cran.r-project.org/doc/Rnews/Rnews\\_2004-1.pdf](http://cran.r-project.org/doc/Rnews/Rnews_2004-1.pdf)>. Acesso em: 20 jan. 2011.
- SHEWHART, W. **Economic control of quality of manufactured product**. New York: D. Van Nostrand Company, 1931. 501 p.
- SIEGMUND, D. **Sequential Analysis: Tests and Conference Intervals**. Nova York: Springer-Verlag, 1985. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-1862-1>
- SOLBERG, H. Monitoring long-term analytical quality by computerized combined Shewart-cusum method. **Scandinavian Journal of Clinical and Laboratory Investigation**, v. 172, p. 43-49, 1984.
- SOUZA, G. P.; SAMOBYL, R. W. Monitoring Forecast Errors with Combined CUSUM and Shewhart Control Charts. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM OF FORECASTING, 26., 2008, Nice. **Proceedings...** Nice, 2008.
- TSUNG, F.; WANG, K. Adaptative Charting Techniques: Literature Review and Extensions. In: LENZ, H. J.; WILRICH, P.; SCMID, W. **Frontiers in Statistical Quality Control**. Springer Physika-Verlag, 2010. v. 9, p. 19-35.
- UNITED STATES ENVIRONMENTAL PROTECTION AGENCY - USEPA. **Statistical Analysis of Groundwater Monitoring Data at RCRA Facilities - Unified Guidance**. USEPA, Mar 2009. Disponível em: <<http://www.epa.gov/osw/hazard/correctiveaction/resources/guidance/sitechar/gwstats/unified-guid-fs.pdf>>. Acesso em: 15 mar. 2011.
- VINING, G. Technical Advice: Phase I and phase II control charts. **Quality Engineering**, v. 21, n. 4, p. 478-479, 2009. <http://dx.doi.org/10.1080/08982110903185736>
- WOODALL, W. H. Controversies and contradictions in statistical process control. **Journal of Quality Technology**, v. 32, n. 4, p.341-350, 2000.
- WU, Z. et al. Optimization designs of the combined Shewhart-CUSUM control charts. **Computational Statistics and Data Analysis**, v. 53, n. 2, p. 496-506, 2008. <http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2008.08.032>
- ZHOU, W. et al. Application of water quality control charts to spring monitoring in karst terranes. **Environmental Geology**, v. 53, n. 6, p. 1311-1321, 2008. <http://dx.doi.org/10.1007/s00254-007-0739-1>

**Anexo**

**Tabela 2.** Amostra coletada da altura do topo do pistão até o centro do furo.

Subgrupo	Observação $X_i$				Subgrupo	Observação $X_i$			
1	9,763	9,766	9,784	9,767	23	9,789	9,781	9,758	9,807
2	9,783	9,775	9,781	9,773	24	9,785	9,805	9,804	9,793
3	9,792	9,768	9,780	9,786	25	9,778	9,790	9,773	9,797
4	9,762	9,801	9,786	9,791	26	9,799	9,789	9,779	9,768
5	9,789	9,786	9,769	9,808	27	9,788	9,804	9,780	9,795
6	9,781	9,780	9,773	9,762	28	9,770	9,805	9,768	9,785
7	9,757	9,765	9,772	9,767	29	9,791	9,769	9,797	9,797
8	9,786	9,768	9,769	9,789	30	9,806	9,791	9,804	9,779
9	9,793	9,785	9,775	9,803	31	9,792	9,802	9,777	9,761
10	9,804	9,800	9,789	9,792	32	9,761	9,799	9,784	9,760
11	9,791	9,796	9,758	9,774	33	9,794	9,779	9,764	9,763
12	9,761	9,784	9,779	9,757	34	9,774	9,761	9,773	9,791
13	9,783	9,774	9,796	9,759	35	9,768	9,762	9,774	9,766
14	9,784	9,798	9,781	9,758	36	9,771	9,788	9,785	9,761
15	9,796	9,764	9,784	9,781	37	9,756	9,772	9,775	9,778
16	9,784	9,785	9,784	9,803	38	9,763	9,786	9,795	9,786
17	9,769	9,792	9,784	9,785	39	9,783	9,758	9,766	9,788
18	9,786	9,772	9,780	9,771	40	9,797	9,767	9,773	9,794
19	9,785	9,793	9,786	9,797	41	9,788	9,762	9,784	9,804
20	9,765	9,805	9,791	9,793	42	9,779	9,773	9,773	9,781
21	9,770	9,767	9,778	9,772	43	9,783	9,799	9,779	9,774
22	9,763	9,768	9,784	9,795	44	9,776	9,777	9,768	9,785

Fonte: Dados da pesquisa.

**Apêndice A – Determinação do NMA e o limite e controle h do CUSUM.**

O *script* a seguir calcula os valores para o NMA do gráfico CUSUM individual segundo a aproximação de Siegmund (1985). O parâmetro delta representa a mudança na média em unidades de desvio padrão.

```

nma.siegmund=function(delta,k,h){
  if (k < 0)
    stop(“k has to be non-negative”)
  if (h < 1)
    stop(“h is too small”)
  deltaMAIS=delta-k
  deltaMENOS=-delta-k
  if (deltaMAIS == 0)
    {cmsMAIS=(h+1.166)^2
  cmsMENOS=(exp(-2*deltaMENOS*(h+1.166))+2*deltaMENOS*(h+1.166)-1)/(2*deltaMENOS^2)
  cms=(1/cmsMAIS)+(1/cmsMENOS)
  nma=(1/cms)
  structure(list(“one.sided”=round(cmsMAIS,2),”two.sided”=round(nma,2)))}
  else {
  cmsMAIS=(exp(-2*deltaMAIS*(h+1.166))+2*deltaMAIS*(h+1.166)-1)/(2*deltaMAIS^2)
  cmsMENOS=(exp(-2*deltaMENOS*(h+1.166))+2*deltaMENOS*(h+1.166)-1)/(2*deltaMENOS^2)
  cms=(1/cmsMAIS)+(1/cmsMENOS)
  nma=(1/cms)
  structure(list(“one.sided”=round(cmsMAIS,2),”two.sided”=round(nma,2)))}
}
    
```

O *script* a seguir calcula o limite de controle  $h$  do gráfico CUSUM individual segundo a aproximação de Siegmund (1985).

```
h.siegmund<- function (k,nma0) {
  if (k < 0)
    stop("k has to be non-negative")
  if (nma0 < 1)
    stop("L0 is too small")
  f <- function (h) nma0-(exp(2*k*(h+1.166))-2*k*(h+1.166)-1)/(2*k^2)
  f1<- function (h) 2*nma0-(exp(2*k*(h+1.166))-2*k*(h+1.166)-1)/(2*k^2)
  h.res <- uniroot(f,c(0,20))
  h.res1 <- uniroot(f1,c(0,20))
  structure(list("h.one.sided"=round(h.res$root,2),"h.two.sided"=round(h.res1$root,2)))
}
h.siegmund(0.5,462.5)
```

O *script* a seguir calcula os valores de NMA do gráfico CUSUM individual segundo a aproximação de Siegmund (1985), apresentados na Tabela 1.

```
d=c(0,0.25,0.5,0.75,1,1.25,1.5,1.75,2,2.25,2.5,2.75,3)
k=c(0.25,0.5,0.75,1)
h=c(8.01,4.77,3.32,2.49)
```

```
valor.nma<-matrix(c(0),ncol=4,nrow=length(d))
for (i in 1:length(d)){ valor.nma[i,1]<-nma.siegmund(d[i],k[1],h[1])$two.sided}
for (i in 1:length(d)){ valor.nma[i,2]<-nma.siegmund(d[i],k[2],h[2])$two.sided}
for (i in 1:length(d)){ valor.nma[i,3]<-nma.siegmund(d[i],k[3],h[3])$two.sided}
for (i in 1:length(d)){ valor.nma[i,4]<-nma.siegmund(d[i],k[4],h[4])$two.sided}
valor.nma
```

## Apêndice B – Construção do gráfico combinado Shewhart-CUSUM.

O *script* a seguir constrói o gráfico combinado Shewhart-CUSUM, apresentado na Figura 6. Para geração do gráfico é necessário carregar o pacote qcc do R.

```
combinado<-function(dados,h=5,lsc=3.5,k=0.5){
  library(qcc)
  pos<-cusum(dados,decision.interval = h, se.shift = 1,center=9.783,plot=F)$pos
  neg<-cusum(dados,decision.interval = h, se.shift = 1,center=9.783,plot=F)$neg
  plot((rowMeans(dados)-mean(rowMeans(dados)))/sd(rowMeans(dados)),type="b",pch=21,ylim=c(min(1.1*neg,1.1*(-h)),max(1.1*pos,1.1*h)),xlab="Amostras",ylab="Médias subgrupos")
  abline(h=h,lty=3)
  abline(h=-h,lty=3)
  abline(h=lsc,lty=2)
  abline(h=-lsc,lty=2)
  abline(h=0,col="gray")
  lines(pos,type="b",pch=21,bg=ifelse(pos>h,"darkgray","black"))
  lines(neg,type="b",pch=21,bg=ifelse(neg<-h,"darkgray","black"))
  text(1.5,1.1*h,paste("h=",h))
  text(1.5,1.1*(-h),paste("h=", -h))
  text(1.5,1.1*lsc,paste("LCS=",lsc))
  text(1.5,1.1*(-lsc),paste("LCI=", -lsc))
}
combinado(dados=dados3)
abline(v=25,col="gray")
legend(35,3.4, c(expression( paste(C^{ "+" })),paste(C^{ "-" })), "Médias subgrupos"),
pch=c(21,21,21),lty=c(1,1,1),pt.bg=c("black","black","white"))
```

O *script* a seguir calcula o  $NMA_0$  do gráfico combinado Shewhart-CUSUM, a partir da Equação 18.

```
nmaCOMB<-function(nmaCUSUM,nmaSHEWHART){
ac<- 1/nmaCUSUM
as<- 1/nmaSHEWHART
acs<-ac+as-ac*as
nmaCOMB<-1/acs
structure(list(nmaCOMB=nmaCOMB,alfaCOMB=acs))}
# $NMA_0$  do gráfico combinado Shewhart-Cusum
nmaCOMB(462.5,1846)
```

O *script* a seguir calcula o  $NMA_0$  dos gráficos individuais Shewhart e CUSUM.

```
nmaCOMB.1<-function(nmaCOMB,nmaIND=NULL){
acomb<- 1/nmaCOMB
if (is.null(nmaIND))
{
d<-seq(0.05,1,by=0.05)
nmaIND<- (1+d)*nmaCOMB
alfa1<- 1/nmaIND
alfa2<-(acomb-alfa1)/(1-alfa1)
nma2<-1/alfa2
nma1<-nmaIND
nma.IND.1<-round(cbind(nma1,nma2),1)
alfa.IND.1<-cbind(alfa1,alfa2)
}
else
{
alfa1<- 1/nmaIND
alfa2<-(acomb-alfa1)/(1-alfa1)
nma.IND.1<-1/alfa2
alfa.IND.1<-alfa2
}
structure(list(nmaIND=nma.IND.1,alfaIND=alfa.IND.1))
}
# $NMA_0$  dos gráficos individuais, LSC e h (com  $k=0,5$ )
#define faixa de valores de  $NMA_0$  para gráficos individuais CUSUM e SHEWHART
nmaCOMB.1(370)
```