



O problema de coleta e entrega com janelas de tempo na indústria petrolífera: modelos e métodos *branch-and-cut*

The pickup and delivery problem with time windows in the oil industry: model and branch-and-cut methods

Maria Gabriela S. Furtado¹
Pedro Munari¹
Reinaldo Morabito¹

Resumo: Este trabalho trata do problema de roteamento e programação de navios que transportam óleo cru das plataformas *offshore* (localizadas no oceano) até os terminais costeiros, motivado por um estudo de caso feito em uma empresa brasileira que realiza essa operação. Com base nesse estudo, propõe-se um modelo de programação inteira mista que é uma extensão do problema clássico de coleta e entrega com janelas de tempo. Esse problema pertence à classe NP-difícil, sendo sua resolução bastante desafiadora na prática. Ao problema da literatura foram agregadas outras restrições práticas relacionadas ao caso em estudo, o que torna a formulação ainda mais desafiadora para resolução direta por meio de *softwares* de otimização. Em vista disso, dois métodos de solução exatos do tipo *branch-and-cut* são propostos neste trabalho, os quais usam desigualdades válidas específicas para o problema em estudo. Os resultados de experimentos computacionais realizados com instâncias reais fornecidas pela empresa mostram que os métodos *branch-and-cut* propostos resolveram uma quantidade maior de instâncias em comparação com a resolução direta do modelo por meio de *software* de otimização.

Palavras-chave: Problema de coleta e entrega; Roteamento e programação de navios; Indústria petrolífera; Método *branch-and-cut*.

Abstract: *This paper addresses the routing and scheduling problem of vessels that collect crude oil from offshore platforms (located in the ocean) and transport it to terminals on the coast. This problem is motivated by a case study carried out in an oil company that operates in Brazil. Based on this study, we propose a mixed integer programming model that extends the classical pickup and delivery problem with time windows. This problem belongs to the NP-hard class and its solution is very challenging in practice. To model specific features of the addressed case, we include new constraints in the classical formulation, which makes it even more challenging for general purpose optimization solvers. To overcome this, we propose two branch-and-cut methods that use valid inequalities especially developed for the oil company case. Computational results performed with a real data set provided by the company show that the proposed branch-and-cut methods are effective and able to solve more instances than a state of the art general purpose optimization solver.*

Keywords: *Pickup and delivery problem; Ship routing and scheduling; Oil industry; Branch-and-cut method.*

1 Introdução

O transporte marítimo tem crescido bastante nos últimos anos e a indústria marítima vem recebendo maiores investimentos e maior atenção do ponto de vista acadêmico (Christiansen et al., 2004). Em particular, um dos setores marítimos de grande destaque nos últimos anos é o setor petrolífero. No Brasil, a capacidade de produção de petróleo é de cerca de 2,1 milhões de barris diários. As exportações de óleo cru chegam a 3,54 milhões de toneladas (Brasil, 2011) e as maiores

reservas estão na plataforma continental, em águas profundas.

Este estudo trata do problema de roteamento e programação de navios com coleta e entrega e com janelas de tempo, baseando-se em um caso real de uma empresa brasileira que realiza a extração e o transporte de óleo cru. Os navios coletam óleo cru das plataformas *offshore* (localizadas no oceano) e o transportam até os terminais localizados na costa

¹ Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, Rod. Washington Luís, Km 235, SP-310, CEP 13565-905, São Carlos, SP, Brasil, e-mail: gabisfurtado@gmail.com; munari@dep.ufscar.br; morabito@ufscar.br

Recebido em Maio 18, 2015 - Aceito em Dez. 03, 2015

Suporte financeiro: Apoio financeiro da FAPESP (processos 2014/22542-2 e 2014/00939-8), da CAPES, da Petrobras e da Agência Nacional de Petróleo (ANP).

brasileira. O transporte deve ser realizado de acordo com os prazos determinados por janelas de tempo impostas em plataformas e terminais.

Neste trabalho propõe-se um modelo de programação inteira mista para o problema da empresa em estudo. O modelo proposto pode ser visto como uma extensão do problema de coleta e entrega com janelas de tempo (Desaulniers et al., 2002; Ropke & Cordeau, 2009). Essa extensão difere dos demais problemas da literatura por conter restrições práticas relacionadas a roteamento e programação de navios petroleiros e ao ambiente da empresa em estudo. Devido à dificuldade de se resolver esse modelo de forma direta por meio de *softwares* de otimização, dois métodos do tipo *branch-and-cut* foram propostos, utilizando desigualdades válidas para melhorar a qualidade dos limitantes fornecidos pela relaxação linear do modelo, como também para garantir que restrições adicionais relacionadas a navios, plataformas e terminais de petróleo fossem respeitadas. Nesses métodos, algoritmos de separação são utilizados para analisar quando uma determinada desigualdade válida é violada e, assim, cortes são inseridos de forma ad hoc. Isso é feito por ser inviável enumerar todos os cortes a priori, já que o número total de cortes é exponencial em relação ao número de requisições de coleta e entrega.

Dessa forma, as principais contribuições deste trabalho são: um modelo de programação matemática capaz de representar adequadamente o problema da empresa em estudo; métodos de solução que resolvem o modelo de forma mais efetiva quando comparados à sua resolução diretamente por *softwares* de otimização.

O restante deste texto está estruturado da seguinte maneira: na seção 2 é apresentada uma breve revisão bibliográfica para o problema de coleta e entrega na indústria petrolífera, juntamente com métodos do tipo *branch-and-cut*. Na seção 3, o problema da indústria petrolífera é detalhado, juntamente com o modelo de programação inteira mista proposto. Os métodos *branch-and-cut* são descritos na seção 4, seguidos pelos resultados computacionais, na seção 5. Por fim, as conclusões e perspectivas para pesquisa futura são apresentadas na seção 6.

2 Revisão da literatura

Essa seção tem o intuito de revisar brevemente os problemas de roteamento e programação de navios e o problema de coleta e entrega com janelas de tempo (Pickup and Delivery Problem with Time Windows – PDPTW), bem como a resolução desses problemas por métodos *branch-and-cut*.

No problema de coleta e entrega, os locais com demandas a serem coletadas e entregues são tipicamente representados por nós. A cada nó i temos que uma quantidade q_i deve ser coletada. Essa mesma quantidade deve ser entregue no nó $n + i$, que possui demanda $q_{n+i} = -q_i$, representando a respectiva entrega. Com isso, o número de coletas deve ser igual ao número de

entregas. Toda coleta deve ser realizada antes de sua respectiva entrega (restrição de precedência) e ambas devem estar na rota de um mesmo veículo (restrição de pareamento). Alguns estudos dessa variação do problema de roteamento de veículos (Vehicle Routing Problem – VRP) podem ser encontrados, por exemplo, em Berbeglia et al. (2007), Ropke et al. (2007), Nowak et al. (2008), Ropke & Cordeau (2009) e Hennig et al. (2012).

Para o PDPTW, Dumas et al. (1991) propõem um algoritmo exato baseado em geração de colunas e restrições de caminho mínimo para o subproblema. Lu & Dessouky (2004) propuseram um algoritmo *branch-and-cut* para resolver o PDPTW com quatro classes de desigualdades válidas. Baldacci et al. (2011) propuseram um algoritmo exato para o PDPTW, baseando-se no modelo de particionamento de conjuntos. Alguns *surveys* relevantes podem ser encontrados em Savelsbergh & Sol (1995), Desaulniers et al. (2002), Berbeglia et al. (2007), Cordeau et al. (2008), Parragh et al. (2008a, b).

Ropke et al. (2007) propuseram dois modelos para o PDPTW com variáveis de 2-índices. A frota de veículos é ilimitada e homogênea e deve respeitar as restrições de capacidade e janelas de tempo. O objetivo é minimizar os custos relacionados às viagens. Nos modelos propostos, o número de restrições é exponencial em relação ao número de requisições de coleta e entrega, tornando inviável enumerar todas as restrições. Assim, os modelos são resolvidos por meio de um algoritmo *branch-and-cut*. Várias famílias de desigualdades válidas foram implementadas, sendo que duas delas foram propostas especificamente para o PDPTW. Os autores resolveram várias instâncias por meio dos diferentes métodos *branch-and-cut* propostos e apresentaram uma comparação do desempenho de cada método. Em continuidade a esse trabalho, Ropke & Cordeau (2009) propuseram um método *branch-and-cut-and-price* para o problema de coleta e entrega com janelas de tempo. O método utiliza as desigualdades válidas apresentadas em Cordeau (2006), Ruland & Rodin (1997) e Ropke et al. (2007) e os resultados mostraram que o método é capaz de resolver instâncias de tamanho grande em tempo computacional razoável. Cabe ressaltar que o modelo clássico da literatura apresentado por Ropke & Cordeau (2009) para o PDPTW nos serviu de base para desenvolvermos o modelo específico para a indústria petrolífera, ao qual incorporamos diversas restrições adicionais e no qual adotamos uma função objetivo diferente.

São muitos os trabalhos na literatura relacionados ao problema de roteamento e programação de veículos que envolvem modelagem matemática e métodos de solução. Porém a literatura (ou os trabalhos) que envolve especificamente roteamento e programação de navios não é extensa. Segundo Christiansen et al. (2007), isto se deve a alguns fatores, como menor visibilidade e estruturação do setor de transporte marítimo, maior

incerteza na tomada de decisões, dificuldade para se inserir novas ideias no setor, por ser mais antigo que os demais setores de transporte, entre outros fatores.

Um dos trabalhos pioneiros a abordar o problema de programação de navios foi o de Dantzig & Fulkerson (1954), em que se estudou o problema de programação de navios da marinha americana usados para o transporte de combustível. Os autores propuseram um modelo de programação linear e um método de solução exato para resolvê-lo com o objetivo de minimizar o número de navios utilizados. Em Christiansen (1999), estudou-se o problema de roteamento e programação de navios com janelas de tempo em uma empresa que transportava amônia. O problema foi encontrar rotas com custos mínimos de transporte, de modo que a produção não parasse e ainda mantivesse os níveis de estoque desejáveis, ou seja, dentro de um limite para estoque mínimo e outro para estoque máximo. Sherali et al. (1999) estudaram a programação de navios para exportação de óleo cru e derivados do Kuwait para países na América do Norte, Europa e Japão. A frota é heterogênea, os navios podem carregar produtos diferentes e janelas de tempo são consideradas na coleta e entrega dos produtos. Uma heurística baseada no modelo foi apresentada utilizando horizonte de tempo rolante.

Christiansen et al. (2004) revisaram os problemas relacionados ao roteamento e programação de navios. O foco estava na literatura publicada na década de 1990. Essa revisão divide-se em algumas partes: problemas estratégicos, tático-operacionais e, por último, em aplicações navais. Rocha et al. (2009) apresentaram um modelo matemático para o problema de alocação de petróleo da Petrobras que envolvia decisões relacionadas à frota de navios, tipos de petróleo transportado e para qual terminal o petróleo deveria ser transportado. O objetivo era minimizar o custo total. Esse problema difere do problema do estudo de caso considerado neste trabalho, pois envolve a tomada de decisões em um nível hierárquico superior ao aqui considerado, ou seja, as decisões tomadas por Rocha et al. (2009) servem como dado de entrada para o problema aqui estudado.

Hoff et al. (2010) apresentam uma revisão da literatura que descreve os aspectos industriais, características do roteamento de navios, classificação dos problemas e detalhes de estratégias encontradas na literatura para resolver os problemas de roteamento e programação de navios. Outra revisão da literatura em transporte marítimo é o trabalho de Andersson et al. (2010), que enfatizou os processos e decisões relacionados à gestão de estoque e roteamento de navios e, principalmente, a combinação dessas atividades na perspectiva da pesquisa operacional. Outros trabalhos mais recentes que estudaram roteamento e programação de navios, alguns em óleo cru, e sua resolução por métodos exatos são Hwang et al. (2008), Brønmo et al. (2010), Stålhane et al. (2012), Hennig et al. (2012) e Fagerholt & Ronen (2013).

3 O problema de coleta e entrega na indústria petrolífera

Essa seção descreve o problema de roteamento e programação de navios na indústria petrolífera, bem como suas características e diferenças em relação aos problemas clássicos presentes na literatura. O foco deste trabalho é na atividade de transporte de óleo cru das plataformas até os terminais. O problema de roteamento e programação de navios está inserido em contexto em que origens e destinos estão pré-fixados, ou seja, em um planejamento anterior, a empresa decide o quanto de óleo cru deve ser transportado de cada plataforma para cada terminal. Para a logística, o problema é decidir qual navio fará cada atividade e em qual momento.

3.1 Caracterização do problema

Cada navio começa e termina sua rota em seu “depósito próprio”, que nada mais é que a posição (coordenadas de latitude e longitude) que o navio ocupa no exato momento de início e término de suas atividades dentro do horizonte de planejamento. A princípio, trata-se de um problema multiproduto, ou seja, cada plataforma produz um óleo diferente e cada terminal demanda quantidades de óleo de cada plataforma especificamente. Entretanto, por ser modelado aqui como um problema de coleta e entrega, em que cada nó de coleta é pareado com um único nó de entrega, não se faz necessário considerar os múltiplos produtos de forma explícita no modelo a ser proposto. Cada terminal demanda uma quantidade específica de cada plataforma, o que pode ser garantido por meio do pareamento entre coleta e entrega, sem a necessidade de variáveis com índices adicionais para o tipo de produto.

As rotas são designações de como uma ou mais demandas serão atendidas por um navio e, assim, determinam qual navio atende a qual demanda, tendo também que obedecer a um sequenciamento de escalas e cumprir determinadas operações. A Figura 1 representa um exemplo ilustrativo de uma rota de um navio na costa brasileira. Os nós 1 e 6 representam os depósitos inicial e final do navio, respectivamente, note-se que são nós artificiais criados apenas para representar as posições inicial e final do navio. Note-se também que os nós 2 e 4 representam a mesma plataforma, com latitude e longitude iguais, porém com janelas de tempo e demandas diferentes. Sendo assim, a rota do navio inicia-se no nó artificial inicial 1, segue para a plataforma 2, em que coleta o petróleo que será entregue logo em seguida no terminal 3. Depois, passa pela plataforma 4 e coleta o óleo cru que será entregue no terminal 5 e, então, o navio termina sua rota no nó artificial final 6.

Em relação ao estudo de caso, são cerca de 50 plataformas *offshore* e aproximadamente 10 terminais com diversos berços para atracação dos navios. A frota



Figura 1. Exemplo de rota de um navio. Fonte: Rodrigues et al. (2016).

de navios é heterogênea, cada navio possui capacidade e tamanho diferentes e outras características distintas que serão abordadas mais adiante nessa seção. Além disso, não é em qualquer plataforma ou terminal que um navio pode atracar, por exemplo, devido a questões físicas de calado (que é a parte do navio que fica submersa na água) e LOA (Length Overall – comprimento do navio). Mais informações sobre as características físicas dos navios considerados no caso em estudo podem ser encontradas em Rodrigues et al. (2016).

Os níveis de estoque nas plataformas e terminais devem satisfazer algumas restrições. Por exemplo, as plataformas devem possuir um estoque mínimo, em geral relacionado ao lastro da plataforma, e um estoque máximo, relacionado à capacidade de armazenagem da plataforma. Devido ao alto custo de oportunidade associado, a plataforma não pode parar sua produção em função das limitações de estoque, pois representa um grande investimento da empresa. A empresa controla os níveis de estoque das plataformas e terminais por meio das janelas de tempo. O horizonte de planejamento é de poucas semanas de operação, o que corresponde a aproximadamente algumas dezenas de solicitações. Portanto, esse problema pode ser modelado como um problema de coleta e entrega com janelas de tempo, múltiplos depósitos e frota heterogênea, além de outras restrições específicas. Esse problema possui as restrições clássicas do PDPTW e também restrições específicas para o estudo caso, que são descritas a seguir:

- Impossibilidade de atracação: Alguns navios não podem atracar em certos pontos operacionais, sejam plataformas ou terminais, devido às restrições físicas de calado e LOA;
- Calado flexível: Mesmo quando há a exigência de que um navio k não deva atracar em um determinado ponto operacional (i.e., plataforma ou terminal), digamos i , em alguns casos é

possível que esse navio k tenha permissão em i se estiver apenas parcialmente carregado, ou seja, somente com uma porcentagem de sua capacidade máxima a bordo. Isto é aqui denominado de restrição de calado flexível;

- Posicionamento dinâmico: Alguns navios e alguns navios-plataforma (que são navios adaptados para a exploração de petróleo) possuem um sistema operacional denominado posicionamento dinâmico (DP – Dynamic Positioning). Esse sistema controla automaticamente a posição de um navio, permitindo uma resposta rápida às mudanças nas condições climáticas. As plataformas e navios que possuem esse sistema estão sujeitos a determinadas regras para que a atracação seja possível:

➤ Se a plataforma é uma plataforma com posicionamento dinâmico:

✓ Se é um navio que possui DP, então esse navio pode ter a bordo carga correspondente a até 50% de sua capacidade para atracar;

✓ Se o navio for convencional (sem DP), então esse navio pode ter a bordo uma carga correspondente a até 30% de sua capacidade para atracar.

➤ Se a plataforma é convencional (sem DP):

✓ Se o navio possui DP, então a embarcação pode ter uma carga a bordo correspondente a até 50% de sua capacidade para atracar;

✓ Se o navio for convencional, não pode atracar nesta plataforma.

- Cada navio deve iniciar sua rota em seu “depósito inicial” e terminar em seu “depósito final” no horizonte de planejamento. Sendo assim, cada navio tem um nó de partida (predefinido) e um nó de chegada, os quais são nós artificiais que indicam a latitude e longitude de cada navio no instante do início e do término do horizonte de planejamento;
- Penalidade por visitas consecutivas: Sempre que um navio visitar uma plataforma e, em seguida, visitar outra plataforma que seja diferente da primeira, isso deve ser penalizado na função objetivo. O intuito é fazer com que o navio colete e entregue óleo, procurando-se evitar visitas consecutivas a duas plataformas diferentes, o que seria indesejável para os operadores da empresa devido às questões organizacionais e também de segurança. Isso não foi modelado como uma restrição e sim como uma penalidade na função objetivo, pois para algumas instâncias é infactível proibir duas visitas consecutivas a plataformas diferentes.

3.2 Modelagem matemática

Essa subseção tem por objetivo descrever a modelagem matemática para o problema descrito anteriormente de coleta e entrega com janelas de tempo na indústria petrolífera. Um estudo preliminar foi realizado com esse problema em Rodrigues (2014), no qual o autor desenvolveu um modelo matemático que serviu de ponto de partida para o modelo deste trabalho. O problema é representado por uma rede $G(N, A)$, em que N representa um conjunto de nós e A um conjunto de arcos. Os conjuntos, parâmetros e variáveis do modelo são dados a seguir.

Conjuntos

K conjunto de navios;

$P = \{1, 2, \dots, n\}$ conjunto de nós de coleta (origens);

$D = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ conjunto de nós de entrega (destinos);

$ST = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ conjunto de nós que indicam o depósito inicial de cada navio;

$EN = \{en_1, en_2, \dots, en_n\}$ conjunto de nós que indicam o depósito final de cada navio;

$N = P \cup D \cup ST \cup EN$ conjunto de todos os nós da rede;

$A = \{(i, j) : i, j \in N\}$ conjunto de todos os arcos da rede.

Parâmetros

$n = |P| = |D|$ número total de coletas (ou entregas);

t_{ij} tempo de deslocamento em horas do nó i para o nó j ;

d_i tempo de serviço em horas para o nó i ;

e_i instante de início da janela de tempo em horas do nó i ;

l_i instante de término da janela de tempo em horas do nó i ;

Cap_k capacidade do navio k em m^3 ;

q_i demanda do nó i em m^3 ;

cm_k consumo de combustível do navio k em movimento;

cs_k consumo de combustível do navio k enquanto está parado;

ca_j custo por atracação do nó j em reais;

v velocidade média do navio em nós (devido às curtas distâncias, por simplicidade considera-se que os navios têm a mesma velocidade média);

$dist_{ij}$ distância em milhas náuticas entre o nó i e o nó j ;

A_{ik} é igual a 1 se o navio k não pode atracar em i , e 0 caso contrário;

CF_{ik} é positiva se k pode atracar com no máximo $CF_{ik}\%$ a bordo (calado flexível);

C_{DP_i} é igual a 1 se a plataforma i é convencional (sem DP) e 0 se a plataforma possui DP;

K_{DP_k} é igual a 1 se o navio k possui DP e 0 caso contrário;

α_1 porcentagem de carga para o navio com DP atracar em qualquer plataforma;

α_2 porcentagem de carga para o navio sem DP atracar em uma plataforma com DP;

β penalização por visitas consecutivas a duas plataformas diferentes;

$M_{ij} \in M$ números suficientemente grandes.

Variáveis

x_{ijk} é igual a 1 se o navio $k \in K$ percorre o arco $(i, j) \in A$ e 0 caso contrário;

B_{ik} instante de início de serviço no nó $i \in N$ pelo navio $k \in K$;

Q_{ik} quantidade de carga no navio $k \in K$ no instante após sua visita ao nó $i \in N$;

VC_{ijk} é igual a 1 se o navio $k \in K$ visita a plataforma $j \in P$ logo após visitar a plataforma $i \in P$ (com $dist_{ij} > 0$) e 0 caso contrário.

O modelo completo do problema de coleta e entrega de óleo cru com janelas de tempo e frota heterogênea é dado por:

$$\text{Minimize} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} (cm_k - cs_k) \frac{dist_{ij}}{v} x_{ijk} + \sum_{i \in N} \sum_{j \in P \cup D} \sum_{k \in K} ca_j x_{ijk} + \sum_{i \in D} \sum_{j \in EN} \sum_{k \in K} ca_j x_{ijk} + \sum_{i \in P} \sum_{j \in P} \sum_{k \in K} \beta * VC_{ijk} \quad (1)$$

s.a

$$\sum_{j \in (P \cup D \cup EN)} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in (ST \cup P \cup D) \quad (2)$$

$$\sum_{i \in (P \cup D \cup ST)} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in (P \cup D \cup EN) \quad (3)$$

$$\sum_{j \in (P \cup \{en_k\})} x_{s_k j k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{i \in (\{s_k\} \cup D)} x_{ien_k k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 0 \quad \forall j \in ST \quad (6)$$

$$\sum_{j \in N} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 0 \quad \forall i \in EN \quad (7)$$

$$\sum_{i \in (P \cup D \cup \{s_k\})} x_{ihk} - \sum_{j \in (P \cup D \cup \{en_k\})} x_{hjk} = 0 \quad \forall h \in P \cup D; \forall k \in K \quad (8)$$

$$e_i \left(\sum_{j \in N} x_{jik} \right) \leq B_{ik} \leq l_i \left(\sum_{j \in N} x_{jik} \right) \quad \forall i \in (P \cup D \cup EN); \forall k \in K \quad (9)$$

$$e_i \left(\sum_{j \in N} x_{ijk} \right) \leq B_{ik} \leq l_i \left(\sum_{j \in N} x_{ijk} \right) \quad \forall i \in ST; \forall k \in K \quad (10)$$

$$x_{ijk} (B_{ik} + t_{ij} + d_i - B_{jk}) \leq 0 \quad \forall i \in (ST \cup P \cup D); \forall j \in (P \cup D \cup EN); \forall k \in K \quad (11)$$

$$B_{n+h,k} \geq B_{h,k} \quad \forall h \in P; \forall k \in K \quad (12)$$

$$Q_{jk} \geq (Q_{ik} + q_j) x_{ijk} \quad \forall i \in (ST \cup P \cup D); \forall j \in (P \cup D \cup EN); \forall k \in K \quad (13)$$

$$x_{ijk} = 0 \quad \forall i, j \in N; \forall k \in K : A_{jk} = 1; CF_{ik} \leq 0 \quad (14)$$

$$\sum_{i \in (ST \cup P \cup D)} x_{ihk} = \sum_{j \in N} x_{j(n+h)k} \quad \forall h \in P; \forall k \in K \quad (15)$$

$$Q_{jk} \leq Cap_k \sum_{i \in (\{s_k\} \cup P \cup D)} x_{ijk} \quad \forall k \in K; \forall j \in (P \cup D \cup \{en_k\}) \quad (16)$$

$$Q_{s_k k} + Q_{en_k k} = 0 \quad \forall k \in K \quad (17)$$

$$Q_{jk} \leq \left(CF_{jk} Cap_k + q_j \right) \left(1 - \sum_{i \in (P \cup D \cup \{s_k\})} x_{ijk} \right) M \quad \forall j \in D; \forall k \in K : A_{jk} = 1 \quad (18)$$

$$Q_{jk} \leq (\alpha_1 Cap_k + q_j) + (1 - \alpha_1) Cap_k \left(1 - \sum_{i \in (P \cup D \cup \{s_k\})} x_{ijk} \right) \quad \forall k \in K : K_{DP_k} = 1; \forall j \in P \quad (19)$$

$$Q_{jk} \leq (\alpha_2 Cap_k + q_j) + (1 - \alpha_2) Cap_k \left(1 - \sum_{i \in (P \cup D \cup \{s_k\})} x_{ijk} \right) \quad \forall k \in K : K_{DP_k} = 0; \forall j \in P : C_{DP_j} = 0 \quad (20)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ijk} = 0 \quad \forall k \in K : K_{DP_k} = 0; \forall j \in P : C_{DP_j} = 1 \quad (21)$$

$$x_{ijk} \leq VC_{ijk} \quad \forall i, j \in P : dist_{ij} > 0; \forall k \in K \quad (22)$$

$$VC_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j \in N; \forall k \in K \quad (23)$$

$$Q_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N; k \in K \quad (24)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in (ST \cup P \cup D); j \in (P \cup D \cup EN); \forall k \in K \quad (25)$$

$$B_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in N; \forall k \in K \quad (26)$$

A função objetivo (1) corresponde à otimização dos critérios definidos pelos operadores da empresa. É composta pelos custos associados ao consumo de combustível (considerando o tempo que o navio se movimenta e o tempo que fica parado no horizonte de planejamento) e à quantidade de atracções realizadas,

além de penalizar duas visitas consecutivas a plataformas diferentes (conforme desejado pelos operadores da empresa). Mais detalhes e justificativas dessa função objetivo podem ser obtidos em Rodrigues et al. (2016). As restrições (2) asseguram que existe exatamente um arco que sai de i e as restrições (3) garantem que existe exatamente um arco que entra em j ; ambas garantem que todos os nós sejam visitados. Em (4) e (5) é assegurado que todos os navios saiam de seus depósitos iniciais e retornem aos seus depósitos finais. Todo navio parte de seu nó inicial e não pode mais retornar a ele, conforme imposto pela restrição (6). De forma análoga, um navio não pode partir de seu depósito final, o que é garantido pela restrição (7). A restrição (8) garante a conservação de fluxo dos navios.

As janelas de tempo são asseguradas pelas restrições (9) e (10). Em (11) é imposto que o instante de início de serviço no nó j tem que ser maior ou igual ao instante de início de serviço no nó i , mais o tempo de serviço no nó i e o tempo de viagem entre os dois nós, se o navio k viaja de i para j . O navio k deve coletar primeiro no nó h antes de entregar a devida demanda respectiva no nó $n + h$, o que é garantido em 12. As restrições 13 garantem o atendimento da demanda pelo navio e a (14), que o navio não atraca em pontos operacionais em que existe alguma restrição física. A (15) assegura-se que se o navio k visita o nó de coleta h , então ele precisa entregar a carga no nó da entrega respectiva $n + h$. A capacidade máxima do navio é imposta em (16). A (17) assegura-se que o navio começa e termina vazio. A (18) garante que se navio não autorizado a atracar em um determinado ponto operacional tiver seu calado flexibilizado, permite-se que ele atraque caso possua até uma determinada porcentagem de carga a bordo. Com (19)-(21) garante-se que o posicionamento dinâmico seja respeitado. Na restrição (22) contabilizam-se duas visitas consecutivas a plataformas diferentes. Por fim, as restrições (23)-(26) garantem o domínio das variáveis de decisão.

Essa formulação é não linear pelas restrições (11) e (13). As linearizações dessas restrições são dadas pelas seguintes inequações, respectivamente:

$$\begin{aligned} B_{jk} &\geq B_{ik} + && \forall i \in (ST \cup P \cup D); \\ d_i + t_{ij} + && \forall j \in (EN \cup P \cup D); \\ (x_{ijk} - 1)M_{ij} && \forall k \in K \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} Q_{jk} &\geq Q_{ik} + q_j + (x_{ijk} - 1)M_{ij} && \forall i \in (ST \cup P \cup D); \\ && \forall j \in (EN \cup P \cup D); \forall k \in K \end{aligned} \quad (28)$$

4 Métodos *branch-and-cut* para o problema da empresa em estudo

O modelo apresentado na seção anterior corresponde a uma formulação compacta, isto é, que pode ser resolvida diretamente por meio de um *software* de otimização de propósito geral, sem exigir que o usuário

desenvolva algoritmos específicos. Os principais *softwares* de otimização disponíveis atualmente são baseados em métodos do tipo *branch-and-cut* que utilizam cortes de propósito geral. Esses cortes são gerados e inseridos no problema de forma automatizada pelo *software*, com o intuito de melhorar os limitantes fornecidos por relaxações lineares.

Embora os cortes de propósito geral atualmente disponíveis nos *softwares* de otimização tenham se mostrado bastante eficazes na prática, recorrer a cortes específicos para o problema que se deseja resolver pode contribuir significativamente para um melhor desempenho. Conforme observado em diversos trabalhos da literatura, desigualdades válidas específicas para problemas de roteamento de veículos são determinantes para se obterem métodos *branch-and-cut* mais eficazes. Entretanto é importante salientar que os cortes específicos tipicamente exigem que o usuário implemente seus próprios algoritmos de separação, bem como gerencia a inserção desses cortes nas relaxações do problema. Assim, os modelos não são mais resolvidos de forma direta pelos *softwares* de otimização, o que exige um esforço maior de implementação.

Nessa seção são propostos dois métodos *branch-and-cut* baseados em desigualdades válidas específicas para o problema de coleta e entrega aqui tratado. Essas desigualdades são adicionadas a variações do modelo (1)-(26), com o propósito de melhorar o limitante fornecido por sua relaxação linear e, assim, resolver o problema de forma mais eficaz. Além disso, algumas desigualdades têm também o propósito de garantir a factibilidade das soluções ótimas, quando relaxações combinatórias do modelo são usadas. Conforme poderá ser observado mais à frente nessa seção, é inviável simplesmente enumerar e inserir todas essas desigualdades válidas a priori no problema, pois resultam em um número de cortes que é exponencial em relação ao número de requisições de coleta e entrega. Assim, esses cortes são inseridos de forma ad hoc, ou seja, para cada família de desigualdades válidas implementada, algoritmos de separação são utilizados para analisar se um corte é violado por uma dada solução. Assim, os cortes são gerados e inseridos apenas quando necessário.

4.1 Descrição dos métodos propostos

O primeiro método proposto é baseado em uma adaptação do modelo (1)-(26), denominado Modelo 1. A adaptação é realizada de modo que todos os navios iniciam sua rota em um depósito comum inicial (s_0) e terminam sua rota em um outro depósito comum a todos os navios (en_0). A motivação de colocar mais dois depósitos comuns a todos os navios nesse modelo é para que os cortes propostos na literatura sejam válidos também para essa variação de modelagem.

Sendo assim, além dos depósitos artificiais de cada navio dados pelos conjuntos ST e EN temos mais dois nós artificiais, s_0 e en_0 , um para o depósito inicial e outro para o depósito final, que são comuns a todos os veículos. O Modelo 1 é dado por:

Minimizar (1)

s.a

(2)-(26)

$$\sum_{j \in ST} x_{s_0jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (29)$$

$$\sum_{i \in EN} x_{ien_0k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (30)$$

$$\sum_{j \in N} x_{jik} - \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in P \cup D; \forall k \in K \quad (31)$$

As restrições (29)-(31) são acrescentadas, pois as desigualdades válidas consideradas neste trabalho exigem que todos os navios saiam de um depósito comum (depósito s_0) e retornem a um depósito comum (depósito en_0).

O segundo método proposto baseia-se em outro modelo (Modelo 2) que também é uma variação do modelo (1)-(26). Assim como no Modelo 1, todos os navios também iniciam sua rota em um depósito comum e terminam sua rota em um depósito final comum a todos os navios. A diferença está na eliminação, no modelo, de todas as restrições relacionadas à atracação, calado flexível e posicionamento dinâmico para, então, adicioná-las de forma ad hoc por meio de cortes, os quais se tornam agora obrigatórios para a garantia de factibilidade das soluções. Assim, o Modelo 2 é baseado em uma relaxação combinatória do modelo (1)-(26), sendo definido por:

Minimizar (1)

s.a

(2)-(13)

(15)-(17)

(22)-(26)

(29)-(31)

4.2 Desigualdades válidas

As desigualdades válidas descritas na sequência são específicas para o problema em estudo e são a base dos métodos *branch-and-cut* aqui propostos.

Note que as desigualdades relacionadas a atracar, calado flexível e posicionamento dinâmico são obrigatórias para que o Método 2 tenha a garantia de uma solução factível. O Método 1 não possui nenhuma desigualdade que seja obrigatória para se ter a garantia de factibilidade e, portanto, essas são adicionadas aos modelos apenas com o propósito de melhorar seus limitantes inferiores.

As seguintes desigualdades válidas são consideradas: restrições de precedência, capacidade, eliminação de sub-rota, restrições de ordem generalizadas (*generalized order constraints*), caminhos inactíveis e restrições de alcance (*reachability*). Para todas as famílias de desigualdades válidas, considera-se que $x_{ij} = \sum_{k \in K} x_{ijk}$. Com isto, adaptamos as desigualdades clássicas da literatura, originalmente apresentadas para modelos de coleta e entrega com variáveis de 2-índices (Ropke & Cordeau, 2009) de modo a serem válidas também para os métodos *branch-and-cut* baseados nos modelos com variáveis de 3-índices.

4.2.1 Restrições de precedência

Essas restrições foram propostas para uma formulação do PDPTW com variáveis com 2-índices em Ropke et al. (2007). Antes de apresentar essa família de desigualdades válidas cabe detalhar algumas definições importantes. Seja S um conjunto que contém todos os subconjuntos de nós $S \subset N$ tais que $s_0 \in S$, $en_0 \notin S$ e existe pelo menos uma coleta i em que $i \notin S$ e $n+i \in S$, ou seja, existe uma requisição tal que a entrega está em S mas a coleta não está em S . O conjunto S impõe as relações de precedência para o modelo apresentado em Ropke et al. (2007). Sendo assim, as restrições de precedência são dadas por:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 2 \quad \forall S \in \mathcal{S} \quad (32)$$

4.2.2 Restrições de capacidade

As restrições de capacidade implementadas nos algoritmos *branch-and-cut* foram propostas por Ropke et al. (2007) para formulações com variáveis de 2-índices para o PDPTW. Seja o subconjunto $S \subseteq P \cup D$, em que $q(S) = \sum_{i \in S} q_i$. Denote por $r(S)$, para qualquer conjunto $S \subseteq N \setminus \{s_0, en_0\}$, o conjunto mínimo de veículos necessários para atender a todos os nós de S , sem considerar os depósitos inicial e final. A solução de $r(S)$ pode ser substituída pelo seu limitante inferior dado por $\max \left\{ 1, \frac{q(S)}{Cap} \right\}$. Então, as restrições de capacidade válidas para o PDPTW são dadas por:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - \max \left\{ 1, \frac{|q(S)|}{Cap} \right\} \quad \forall S \subseteq N \setminus \{s_0, en_0\}, |S| \geq 2 \quad (33)$$

4.2.3 Eliminação de sub-rotas

Considere as clássicas inequações de eliminação de sub-rotas propostas primeiramente para o problema do caixeiro viajante (Traveling Salesman Problem – TSP) por Fisher & Jaikumar (1981):

$$x(S) \leq |S| - 1 \quad (34)$$

em que $S \subseteq P \cup D$ e $x(S) = \sum_{i,j \in S} x_{ij}$. Esta inequação é válida para o VRP e também para o PDPTW (Cordeau, 2006). Além disso, essa inequação pode ser melhorada considerando-se que cada nó i possui apenas um sucessor e um predecessor. Ainda, o nó i deve ser visitado antes do nó $n + i$ e pelo mesmo veículo. Para cada conjunto $S \subseteq P \cup D$ e seu complementar $N \setminus S$, seja $\pi(S) = \{i \in P \mid n + i \in S\}$ o conjunto de predecessores de S e $\sigma(S) = \{n + i \in D \mid i \in S\}$ o conjunto de sucessores de S . Cordeau (2006) provou que as próximas inequações são válidas para o PDPTW:

$$x(S) + \sum_{i \in N \setminus S} \sum_{j \in S} x_{ij} + \sum_{i \in N \setminus S} \sum_{j \in S} x_{ji} \leq |S| - 1 \quad S \subseteq P \cup D \quad (35)$$

$$x(S) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \setminus S} x_{ij} + \sum_{i \in S} \sum_{j \in N \setminus S} x_{ji} \leq |S| - 1 \quad S \subseteq P \cup D \quad (36)$$

4.2.4 Restrições de ordem generalizadas

As restrições de ordem generalizadas foram propostas por Ruland & Rodin (1997) para o problema de coleta e entrega. Cordeau (2006) provou que essas inequações eram válidas também para o PDPTW. Sejam $U_1, \dots, U_s \subset N$ subconjuntos mutuamente disjuntos e sejam $i_1, \dots, i_s \in P$ requisições em que $s_0, en_0 \notin U_l$ (depósitos inicial e final, respectivamente) e $i_l, n + i_{l+1} \in U_l$ para $l = 1, \dots, s$, em que $i_{s+1} = i_s$. Sendo assim, as seguintes inequações são válidas para o PDPTW:

$$\sum_{l=1}^s x(U_l) \leq \sum_{l=1}^s |U_l| - s - 1 \quad (37)$$

Essas inequações podem ser melhoradas por inequações similares, nomeadas de precedência com quebra de ciclo (*precedence cycle breaking*), propostas por Balas et al. (1995) para o TSP assimétrico. Cordeau (2006) provou que as próximas inequações são válidas para o PDPTW:

$$\sum_{l=1}^s x(U_l) + \sum_{l=2}^{s-1} x_{i_l, i_l} + \sum_{l=3}^s x_{i_l, n+i_l} \leq \sum_{l=1}^s |U_l| - s - 1 \quad (38)$$

$$\sum_{l=1}^s x(U_l) + \sum_{l=2}^{s-2} x_{n+i_l, i_l} + \sum_{l=3}^{s-1} x_{n+i_l, i_l} + \sum_{l=1}^{s-1} x_{n+i_l, n+i_l} \leq \sum_{l=1}^s |U_l| - s - 1 \quad (39)$$

4.2.5 Caminhos infactíveis

Seja \mathcal{R} o conjunto de todos os caminhos infactíveis em relação às janelas de tempo. Para um dado conjunto $R \in \mathcal{R}$, sejam $A(R)$ e $N(R)$ os conjuntos de arcos e nós, respectivamente. $A(R)$ corresponde aos arcos que estão nesse caminho. As próximas restrições de caminhos infactíveis foram propostas por Ropke et al. (2007):

$$\sum_{(i,j) \in A(R)} x_{ij} \leq |A(R)| - 1 \quad \forall R \in \mathcal{R} \quad (40)$$

Essas inequações foram propostas para garantir que as janelas de tempo fossem respeitadas para uma formulação do PDPTW (Ropke et al., 2007). A cada caminho encontrado em uma solução, a violação das janelas de tempo é verificada. Caso haja violação de alguma delas, então o caminho será usado para adicionar um novo corte ao modelo, do tipo 40. Para o caso em estudo, essas inequações são verificadas em relação às janelas de tempo, atracação, calado flexível e posicionamento dinâmico. Com isto, adaptamos o Método 2 apresentado nessa seção, para que esse garanta que, para qualquer solução inteira encontrada, as questões relacionadas ao problema da empresa (atracação, calado flexível e posicionamento dinâmico) sejam respeitadas, garantindo que a solução seja factível.

4.2.6 Restrições de alcance

As restrições de alcance foram primeiramente propostas por Lysgaard (2006) para o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo. Ropke et al. (2007) afirmaram que essas inequações são válidas também para o PDPTW. Seja $\delta(S) = \delta^+(S) \cup \delta^-(S)$, em que $\delta^+(S) = \{(i, j) \in A \mid i \in S, j \notin S\}$ e $\delta^-(S) = \{(i, j) \in A \mid i \notin S, j \in S\}$. Ainda, para cada nó $i \in N$, seja $A_i^- \subset A$ o conjunto mínimo de arcos tal que qualquer caminho factível de s_0 a i utilize somente arcos de A_i^- . Seja A_i^+ o conjunto mínimo de arcos, em que qualquer caminho factível de i a en_0 utilize somente arcos de A_i^+ . Considere-se

o conjunto de nós T em que cada nó em T deva ser visitado por um veículo diferente (define-se T como conjunto de nós conflitantes). Sendo assim, para cada conjunto T , sejam $A_T^- = \bigcup_{i \in T} A_i^-$ e $A_T^+ = \bigcup_{i \in T} A_i^+$. Para cada conjunto $S \subseteq P \cup D$ e qualquer conjunto $T \subseteq S$ as próximas inequações são válidas:

$$x(\delta^-(S) \cap A_T^-) \geq |T| \quad (41)$$

$$x(\delta^+(S) \cap A_T^+) \geq |T| \quad (42)$$

5 Resultados computacionais

Essa seção compara os resultados do modelo matemático proposto na seção 3 com os resultados dos métodos *branch-and-cut* propostos na seção 4. Nos métodos propostos foram incluídas as seis famílias de desigualdades válidas descritas na subseção 4.2. Os algoritmos de separação foram implementados conforme descritos em Cordeau (2006), para as restrições de eliminação de sub-rotas e de ordem generalizadas; e em Ropke et al. (2007), para as restrições de precedência, capacidade, caminhos infactíveis e alcance.

Os experimentos computacionais utilizaram dados reais fornecidos pela empresa em estudo. Esses dados foram separados em dois casos, Caso 1 e Caso 2, resumidamente descritos na sequência. O primeiro caso é referente à produção de petróleo no mês de julho de 2013 e o segundo caso é referente à produção no mês de janeiro de 2013. O Caso 1 conta com 25 navios disponíveis e um total de 142 pares de coleta e entrega durante o mês de julho. O Caso 2 conta com 31 navios disponíveis e um total de 83 pares de coleta e entrega referentes ao mês de janeiro de 2013. Esses casos são ainda subdivididos em casos menores, dando origem às instâncias utilizadas para a realização dos experimentos. Essas instâncias seguem a nomenclatura $CxNy$, em que

x indica o caso que originou a instância e y , o número de pares de coleta e entrega na instância. Por exemplo, a instância C1N10 consiste em 10 pares de coleta e entrega do Caso 1, correspondentes às primeiras 10 requisições do horizonte de planejamento.

Cada instância foi resolvida de três formas diferentes: (i) usando-se o modelo 1-26 diretamente em um *software* de otimização (modelo puro); (ii) usando-se o método *branch-and-cut* baseado no Modelo 1, como definido na seção 4.1 (Método 1); (iii) usando-se o método *branch-and-cut* baseado no Modelo 2, como definido na seção 4.1 (Método 2). Conforme mencionado anteriormente, os dois métodos incluem de forma ad hoc as desigualdades válidas descritas na subseção 4.2, com o objetivo de melhorar os limitantes inferiores e/ou garantir a factibilidade das soluções. O *software* de otimização IBM CPLEX versão 12.6, em sua configuração padrão, foi utilizado para resolução do modelo puro, bem como para implementação dos métodos *branch-and-cut*. Os algoritmos de separação foram implementados em linguagem C e as desigualdades válidas são inseridas usando-se as funções do tipo Callback, disponibilizadas pela biblioteca Concert do *software* IBM CPLEX. A busca por cortes violados foi feita apenas nos 10 primeiros nós da árvore de busca, sendo incluídos nos modelos apenas 100 cortes por iteração e por desigualdade válida, dados pelos cortes mais violados. A ramificação foi feita de forma automatizada pelo *software* IBM CPLEX.

Em todas as três formas de resolução das instâncias foi realizado um pré-processamento com o intuito de eliminar arcos que certamente não compõem uma solução ótima. As regras utilizadas podem ser encontradas em Dumas et al. (1991) e Cordeau (2006). O computador utilizado foi um Dell Precision T7600 CPU E5-2680 2.70GHz com 192GB de memória RAM e sistema operacional Windows 7 Professional. O tempo máximo de execução para cada instância foi de 18.000 segundos (5 horas).

Tabela 1. Resultados computacionais para instâncias do Caso 1.

Instância	Método	UB	Gap (%)	Tempo (s)	LB
C1N10	Modelo	1677,84	0	6,49	1012,56
	Método 1	1677,84	0	10,76	1012,53
	Método 2	1677,84	0	8,84	1012,52
C1N15	Modelo	2311,98	0	20,62	1237,91
	Método 1	2311,98	0	16,17	1636,91
	Método 2	2311,98	0	14,99	1587,42
C1N20	Modelo	2748,36	0	2191,53	1364,30
	Método 1	2748,36	0	24,19	2100,76
	Método 2	2748,36	0	27,33	2069,51
C1N25	Modelo	3694,58	61,04	–	1288,23
	Método 1	3522,90	16,19	–	1930,27
	Método 2	3522,90	17,34	–	1906,81
C1N30	Modelo	–	–	–	1445,61
	Método 1	4818,55	28,13	–	2021,22
	Método 2	–	–	–	1992,46

As Tabelas 1 e 2 mostram os resultados obtidos com o modelo puro e com os métodos propostos para instâncias de diferentes tamanhos. A primeira coluna apresenta o nome de cada instância e a segunda mostra a abordagem de resolução usada, seguindo a discussão apresentada acima. A terceira coluna mostra o valor do limitante superior (Upper Bound – UB) seguido pela diferença relativa entre a melhor solução obtida e o limitante inferior (*gap*), que é calculado por $Gap = \frac{UB - LB}{UB}$ e dado em porcentagem. Por fim, é mostrado o tempo computacional, dado em segundos, seguido do limitante inferior (Lower Bound – LB). O símbolo ‘-’ indica que o tempo máximo permitido foi atingido e os espaçamentos em branco representam que o modelo puro ou os métodos propostos não encontraram solução factível no tempo estipulado.

Para o Caso 1, os métodos propostos tiveram melhor performance comparados ao modelo resolvido diretamente por um *software* de otimização para instâncias com até 30 pares de coleta e entrega. Para a instância C1N10, o resultado do modelo e dos métodos é similar, pois encontram a solução ótima em poucos segundos. Para a instância C1N15, a performance dos três métodos também é similar. Para C1N20, os métodos encontram a solução ótima em menor tempo (20 segundos) comparados ao modelo, que a encontrou em aproximadamente 2.000 segundos. Para C1N25, os métodos encontram uma melhor solução com menor *gap* comparado ao modelo resolvido diretamente por um *software*. Para C2N30, o Método 1 foi o único a encontrar solução factível, em 5 horas de processamento, com 28% de *gap*. Em relação à relaxação linear, os métodos *branch-and-cut* tiveram melhores resultados.

Para o Caso 2, os métodos propostos obtiveram melhores resultados comparados ao modelo para instâncias com até 25 pares de coleta e entrega. Para a instância C2N10, a performance das três abordagens foi semelhante. Para a instância C2N15, os métodos encontraram a solução ótima em poucos segundos (20 s), comparados ao modelo que encontrou a solução ótima mas não provou sua otimalidade em 5 horas

(17% de *gap*). Para C2N20, os métodos provaram a solução ótima em aproximadamente 450 segundos, comparados ao modelo que encontrou a solução ótima, mas novamente não provou sua otimalidade em 5 horas (47% de *gap*). Para C2N25, o modelo não encontrou a solução ótima no tempo estipulado, terminando com 59% de *gap*, enquanto que os métodos encontraram uma solução melhor com menor *gap*. Para as demais instâncias, no tempo limite, nenhuma solução factível foi encontrada.

Em geral, para os dois casos, os resultados indicaram que os métodos *branch-and-cut* têm melhores resultados comparados ao modelo. Os tempos computacionais foram melhores para as instâncias C2N15 e C2N20, nas quais somente os métodos provaram a otimalidade das soluções no tempo estipulado. Para as instâncias com mais de 30 pares de coleta e entrega nenhuma das abordagens encontrou solução factível no tempo total estipulado.

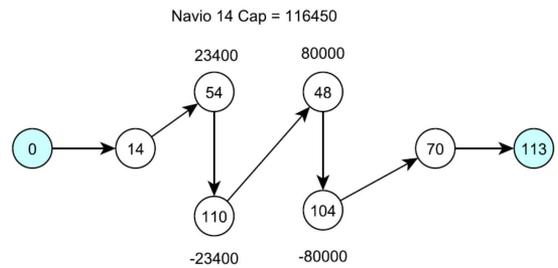


Figura 2. Rota do navio 14 para a instância C2N25 para o Método 1.

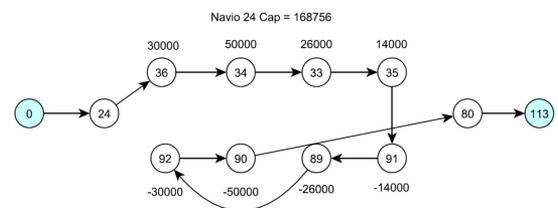


Figura 3. Rota do navio 24 para a instância C2N25 para o Método 1.

Tabela 2. Resultados computacionais para instâncias do Caso 2.

Instância	Abordagem	UB	Gap (%)	Tempo (s)	LB
C2N10	Modelo	1402,63	0	16,34	699,72
	Método 1	1402,63	0	16,38	1309,59
	Método 2	1402,63	0	16,72	1309,59
C2N15	Modelo	1708,51	17,13	–	607,31
	Método 1	1708,51	0	29,45	1225,55
	Método 2	1708,51	0	24,78	1225,55
C2N20	Modelo	2452,90	47,71	–	837,73
	Método 1	2452,90	0	445,33	1537,12
	Método 2	2452,90	0	498,23	1565,97
C2N25	Modelo	3300,28	59,84	–	1189,53
	Método 1	3240,60	0,93	–	2193,10
	Método 2	3240,60	1,46	–	2221,14

As Figuras 2 e 3 ilustram as rotas de dois navios da solução do C2N25 com o Método 1. O navio 14 coleta o produto no nó 54, entrega-o no nó 110 e, então, coleta o produto no nó 48. Os nós 54 e 48 correspondem a plataformas diferentes, então não há penalidade por visitas consecutivas. Para o navio 24, os nós 36, 34, 33 e 35 representam uma mesma plataforma, porém possuem demandas e janelas de tempo diferentes. Assim como no caso anterior, também não há penalidade por visita consecutiva desse navio.

Cabe dizer que outros métodos *branch-and-cut* foram testados nesta pesquisa, baseando-se na adaptação dos modelos clássicos de coleta e entrega com variáveis de 2-índices propostos por Ropke et al. (2007). Entretanto, ao contrário dos resultados observados para instâncias da literatura, esses métodos não foram eficazes para as instâncias reais fornecidas pela empresa. Os melhores métodos propostos foram os baseados em modelos com variáveis de 3-índices, mostrados neste trabalho. Sendo assim, os outros resultados não foram reportados por não atingirem o desempenho esperado.

6 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo estudar o problema de transporte de óleo cru entre plataformas *offshore* e terminais localizados na costa brasileira e propor métodos de solução exatos para resolver esse problema. Um estudo de caso foi realizado em uma empresa brasileira que realiza essa operação, o que motivou a proposta de um modelo matemático baseado na extensão do modelo clássico de coleta e entrega com janelas de tempo, de modo a representar adequadamente o problema da empresa. Além disso, foram propostos dois métodos *branch-and-cut* com desigualdades válidas específicas para o modelo proposto.

Ao modelo clássico da literatura foram adicionadas características relevantes do caso estudado, como múltiplos depósitos, atracação, calado flexível, posicionamento dinâmico, dentre outras. Os métodos *branch-and-cut* desenvolvidos basearam-se em variações do modelo proposto, inclusive as seguintes famílias de desigualdades válidas: precedência; restrição de capacidade; eliminação de sub-rotas; restrição de ordem generalizada; caminhos infactíveis para as questões de janelas de tempo, atracar, calado flexível e posicionamento dinâmico; e restrições de alcance. Os experimentos computacionais foram realizados com dados reais fornecidos pela empresa e mostraram que os métodos *branch-and-cut* propostos obtêm melhores resultados quando comparados à resolução por modelo, diretamente, por *software* de otimização.

Como proposta de pesquisa futura pretende-se investigar melhorias nos métodos *branch-and-cut* aqui apresentados como, por exemplo, pela inclusão de novas famílias de desigualdades válidas. Outro tópico interessante seria desenvolver um método do tipo *branch-and-price* para esse problema, comparando

seu desempenho com os métodos *branch-and-cut* aqui propostos.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores anônimos pelos úteis comentários e sugestões de revisão, e ao apoio financeiro da FAPESP (processos 2014/22542-2 e 2014/00939-8), da CAPES, CNPq, da Petrobras e da Agência Nacional de Petróleo (ANP) para o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- Andersson, H., Hoff, A., Christiansen, M., Hasle, G., & Løkketangen, A. (2010). Industrial aspects and literature survey: Combined inventory management and routing. *Computers & Operations Research*, 37(9), 1515-1536. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2009.11.009>.
- Balas, E., Fischetti, M., & Pulleyblank, W. R. (1995). The precedence-constrained asymmetric travelling salesman polytope. *Mathematical Programming*, 68(1-3), 214-265. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01585767>.
- Baldacci, R., Bartolini, E., & Mingozzi, A. (2011). An exact algorithm for the pickup and delivery problem with time windows. *Operations Research*, 59(2), 414-426. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1100.0881>.
- Berbeglia, G., Cordeau, J. F., Gribkovskaia, I., & Laporte, G. (2007). Static pickup and delivery problems: A classification scheme and survey. *Top*, 15(1), 1-31. <http://dx.doi.org/10.1007/s11750-007-0009-0>.
- Brasil. Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior – MDIC. (2011). Recuperado em 30 de abril de 2012, de <http://www.mdic.gov.br/sitio/>
- Brønmo, G., Nygreen, B., & Lysgaard, J. (2010). Column generation approaches to ship scheduling with flexible cargo sizes. *European Journal of Operational Research*, 200(1), 139-150. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2008.12.028>.
- Christiansen, M. (1999). Decomposition of a combined inventory and time constrained ship routing problem. *Transportation Science*, 33(1), 1-14. <http://dx.doi.org/10.1287/trsc.33.1.3>.
- Christiansen, M., Fagerholt, K., & Ronen, D. (2004). Ship routing and scheduling: status and perspectives. *Transportation Science*, 38(1), 1-18. <http://dx.doi.org/10.1287/trsc.1030.0036>.
- Christiansen, M., Fagerholt, K., Ronen, D., & Nygreen, B. (2007). Maritime transportation. In C. Barnhart & G. Laporte (Eds.), *Handbook in operations research and management science*. Amsterdam: Elsevier. 189-284 p.
- Cordeau, J. F. (2006). Branch-and-cut algorithm for the dial-a-ride problem. *Operations Research*, 54(3), 573-586. <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1060.0283>.
- Cordeau, J.-F., Laporte, G., & Ropke, S. (2008). Recent models and algorithms for one-to-one pickup and delivery problems. In B. Golden, S. Raghavan & E. Wasil (Eds.), *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (Operations Research/Computer Science Interfaces, 43, pp. 327-357). New York: Springer.

- Dantzig, G., & Fulkerson, D. (1954). Minimizing the number of tankers to meet a fixed schedule. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1(3), 217-222. <http://dx.doi.org/10.1002/nav.3800010309>.
- Desaulniers, G., Desrosiers, J., Erdmann, A., & Solomon, M. M. (2002). VRP with pickup and delivery. In P. Toth & D. Vigo (Eds.), *The vehicle routing problem* (pp. 225-242). Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Dumas, Y., Desrosiers, J., & Soumis, F. (1991). The pickup and delivery problem with time windows. *European Journal of Operational Research*, 54(1), 7-22. [http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(91\)90319-Q](http://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(91)90319-Q).
- Fagerholt, K., & Ronen, D. (2013). Bulk ship routing and scheduling: solving practical problems may provide better results. *Maritime Policy & Management*, 40(1), 48-64. <http://dx.doi.org/10.1080/03088839.2012.744481>.
- Fisher, M. L., & Jaikumar, R. (1981). A generalized assignment heuristic for vehicle routing. *Networks*, 11(2), 109-124. <http://dx.doi.org/10.1002/net.3230110205>.
- Hennig, F., Nygreen, B., Christiansen, M., Fagerholt, K., Furman, K. C., Song, J., Kocis, G. R., & Warrick, P. (2012). Maritime crude oil transportation - a split pickup and split delivery problem. *European Journal of Operational Research*, 218(3), 764-774. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2011.09.046>.
- Hoff, A., Andersson, H., Christiansen, M., Hasle, G., & Løkketangen, A. (2010). Industrial aspects and literature survey: fleet composition and routing. *Computers & Operations Research*, 37(12), 2041-2061. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2010.03.015>.
- Hwang, H., Visoldilokpun, S., & Rosenberger, J. M. (2008). A branch-and-price-and-cut method for ship scheduling with limited risk. *Transportation Science*, 42(3), 336-351. <http://dx.doi.org/10.1287/trsc.1070.0218>.
- Lu, Q., & Dessouky, M. (2004). An exact algorithm for the multiple vehicle pickup and delivery problem. *Transportation Science*, 38(4), 503-514. <http://dx.doi.org/10.1287/trsc.1030.0040>.
- Lysgaard, J. (2006). Reachability cuts for the vehicle routing problem with time windows. *European Journal of Operational Research*, 175(1), 210-223. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2005.04.022>.
- Nowak, M., Ergun, O., & White, C. C. 3rd (2008). Pickup and delivery with split loads. *Transportation Science*, 42(1), 32-43. <http://dx.doi.org/10.1287/trsc.1070.0207>.
- Parragh, S., Doerner, K., & Hartl, R. (2008a). A survey on pickup and delivery problems. Part I: transportation between customers and depot. *Journal für Betriebswirtschaft*, 58(1), 21-51. <http://dx.doi.org/10.1007/s11301-008-0033-7>.
- Parragh, S., Doerner, K., & Hartl, R. (2008b). A survey on pickup and delivery problems: Part II: Transportation between pickup and delivery locations. *Journal für Betriebswirtschaft*, 58(2), 81-117. <http://dx.doi.org/10.1007/s11301-008-0036-4>.
- Rocha, R., Grossmann, I. E., & Aragão, M. V. S. P. (2009). Petroleum allocation at PETROBRAS: Mathematical model and a solution algorithm. *Computers & Chemical Engineering*, 33(12), 2123-2133. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compchemeng.2009.06.017>.
- Rodrigues, V. P. (2014). *Uma abordagem de otimização para a roteirização e programação de navios: um estudo de caso na indústria petrolífera* (Dissertação de mestrado). Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.
- Rodrigues, V. P., Morabito, R., Yamashita, D. S., Silva, B. J., & Ribas, P. C. (2016). Ship routing with pickup and delivery for a maritime oil transportation system: MIP model and heuristics. *Systems*, 4(3), 31. <http://dx.doi.org/10.3390/systems4030031>.
- Ropke, S., & Cordeau, J. F. (2009). Branch-and-cut and price for the pickup and delivery problem with time windows. *Transportation Science*, 43(3), 267-286. <http://dx.doi.org/10.1287/trsc.1090.0272>.
- Ropke, S., Cordeau, J. F., & Laporte, G. (2007). Models and branch-and-cut algorithms for pickup and delivery problems with time windows. *Networks*, 49(4), 258-272. <http://dx.doi.org/10.1002/net.20177>.
- Ruland, K. S., & Rodin, E. Y. (1997). The pickup and delivery problem: Faces and branch-and-cut algorithm. *Computers & Mathematics with Applications*, 33(12), 1-13. [http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221\(97\)00090-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221(97)00090-4).
- Savelsbergh, M. W. P., & Sol, M. (1995). The general pickup and delivery problem. *Transportation Science*, 29(1), 17-29. <http://dx.doi.org/10.1287/trsc.29.1.17>.
- Sherali, H., Al-Yakoob, S., & Hassan, M. (1999). Fleet management models and algorithms for an oil-tanker routing and scheduling problem. *IIE Transactions*, 31(5), 395-406. <http://dx.doi.org/10.1080/07408179908969843>.
- Stålhane, M., Andersson, H., Christiansen, M., Cordeau, J.-F., & Desaulniers, G. (2012). A branch-price-and-cut method for a ship routing and scheduling problem with split loads. *Computers & Operations Research*, 39(12), 3361-3375. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2012.04.021>.