Tensões

Elysio R. F. Ruggeri

Furnas Centrais Elétricas SA
Centro Tecnológico de Engenharia Civil - Goiânia - GO
E-mail: ruggeri@furnas.com.br

Resumo

Esse artigo amplia a exposição ordinária da teoria das tensões para os casos em que o sistema de coordenadas curvilíneas utilizado na solução de um problema não é ortogonal. Nesse caso, sendo possível associar quatro matrizes distintas ao diádico de tensões do ponto, interpreto fisicamente os elementos de todas essas matrizes. Isto acarreta uma generalização do princípio clássico da reciprocidade das tensões tangenciais em planos ortogonais.

Na parte restante do artigo, deduzo os resultados clássicos relativos a autovalores e autovetores do diádico das tensões.

Palavra-chave: Tensões.

Abstract

In this paper I broaden the common text about stress theory for cases when the system of curvilinear coordinates used for the solution of a problem is not orthogonal.

In this case, as it is possible to associate four different matrices to the stress dyadic of a point, I physically interpret the elements of all these matrices. That implies generalizing the classical principle of reciprocity of the tangential stress in orthogonal planes.

In the remaining part of this paper I derive the main classical results related to eigenvalues and eigenvectors of the stress dyadic.

***Keyword**: Stress.*

1. O vetor tensão

Quando um corpo deformável é submetido à ação de forças (concentradas ou distribuídas), aplicadas sobre a sua superfície, os efeitos dessas forças são transmitidas para cada ponto do seu interior. Resulta disso uma alteração das posições relativas dos seus elementos físicos. Tal como as "forças mássicas", as quais agem em cada elemento de volume proporcionalmente à massa do corpo (as forças gravitacionais, por exemplo), também as "forças de superfície" agem num ponto interno, P, através de uma porção de superfície imaginária, qualquer, aberta, que contenha P. Seja, em torno de P, o vetor (superficial) de área, $\hat{\mathbf{n}}\Delta S$, em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o unitário (de sentido arbitrário) da normal à superfície. A força resultante $\Delta\mathbf{f}$, que age sobre ΔS, é a medida da ação da parte do corpo situada do mesmo lado do unitário em relação à superfície, digamos parte I, sobre a parte II do mesmo corpo, oposta da primeira. A razão $\Delta\mathbf{f}/\Delta S$ é o vetor tensão média sobre ΔS. Se o limite desse quociente existe quando $\Delta S \to 0$ (para $\hat{\mathbf{n}}$ fixo), escrevemos:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{f}}{dS} = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}), \qquad (1)$$

e chamamos **t** o **vetor tensão** em P relativo à direção $\hat{\mathbf{n}}$.

Pela lei de Newton (da ação e reação), a parte II exerce sobre a parte I força igual em módulo e de sentido oposto à que I exerce sobre II, isto é

$$\mathbf{t}(-\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}), \qquad (2)$$

A validade de (1) está diretamente relacionada com uma hipótese fundamental, indiretamente admitida: é o "princípio de Cauchy", isto é, o vetor tensão (1) é independente da superfície utilizada para a sua definição. Essa hipótese nos permite substituir forças entre elementos físicos por uma força que depende de apenas de cinco parâmetros, ou seja, das três coordenadas do ponto e de duas das três coordenadas do unitário $\hat{\mathbf{n}}$.

Resulta, ainda, de (1) que a força resultante que age sobre uma superfície finita, S, no interior do corpo é determinada pela integral

$$\int_S \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})\, dS, \qquad (3)$$

Essa integral se anulará se S for uma superfície fechada, desde que no volume do corpo contido em S não estejam agindo forças mássicas (as forças inerciais nelas incluídas). Se forças mássicas estão presentes, assumimos que as forças de superfície transmitidas para o corpo (contínuo) estão, a todo momento, em equilíbrio com as forças mássicas.

2. O diádico das tensões em redução trinomial

A equação (1) não especifica a natureza da função $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})$. Entretanto essa pode ser determinada procurando-se conhecer a distribuição das forças superficiais nas vizinhanças do ponto na ausência de forças corporais.

Se o corpo está em equilíbrio sob a ação das forças de superfície, assim também estará um elemento infinitesimal de volume nas vizinhanças do ponto. Para a análise do problema de uma forma bem geral, escolhemos como elemento um tetraedro curvilíneo qualquer, T_*, associado a um sistema conveniente de coordenadas curvilíneas (X^1, X^2, X^3)[1] utilizado para o estudo do problema[2]. Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é a base natural do ponto P nesse sistema de coordenadas (vetores esses tangentes às linhas do sistema)[3], os vetores $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, e $\mathbf{e}^3$ da base recíproca são ortogonais às faces curvilíneas do tetraedro T_* (Figura 1).

Como ao sistema de coordenadas curvilíneas (X^1, X^2, X^3) corresponde univocamente, em todo o domínio do corpo, um sistema de coordenadas curvilíneas recíproco (porque em todo ponto P existem bases recíprocas, por hipótese), nas vizinhanças de P existe um segundo tetraedro (recíproco do primeiro), T^*, cujas arestas (curvilíneas) são pequenos arcos das coordenadas curvilíneas recíprocas, a cujas faces os vetores $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, e $\mathbf{e}^3$ são ortogonais. Podemos considerar, portanto, que os dois tetraedros existem simultaneamente, pois são *duais*.

Os vetores-área relativos às faces de vértice P comum, em T_*, podem ser escritos nas formas

$$dS_1\, \mathbf{e}^1, \quad dS_2 \mathbf{e}^2, \quad \text{e} \quad dS_3 \mathbf{e}^3$$

Se $\hat{\mathbf{n}}dS$ é o vetor-área relativo à face 123, podemos escrever (por ser T_* um tetraedro muito pequeno, quase retilíneo)

$$\hat{\mathbf{n}}\, dS = dS_1\, \mathbf{e}^1 + dS_2 \mathbf{e}^2 + dS_3 \mathbf{e}^3 = dS_i \mathbf{e}^i$$

porque, conforme propriedade clássica, a soma dos vetores-área (exteriores) de um tetraedro é igual a zero. Então,

$$dS\, \hat{\mathbf{n}}.\mathbf{e}_1 = \frac{dS_1}{|\mathbf{e}^1|}, \quad dS\, \hat{\mathbf{n}}.\mathbf{e}_2 = \frac{dS_2}{|\mathbf{e}^2|}$$

$$\text{e} \quad dS\, \hat{\mathbf{n}}.\mathbf{e}_3 = \frac{dS_3}{|\mathbf{e}^3|} \qquad (5)$$

De outro lado devemos considerar também que é nula a soma das forças atuantes no tetraedro (a matéria dentro do tetraedro está em equilíbrio), isto é,

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})\, dS = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i)\, dS_i \qquad (6)$$

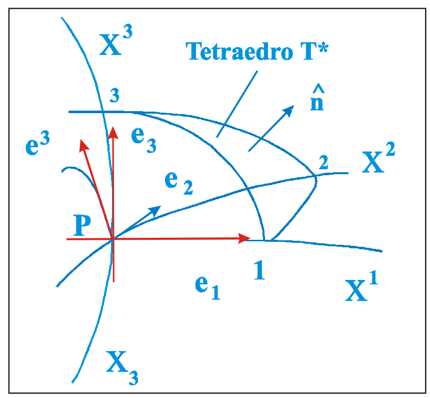

Figura 1 - Representa a base natural do ponto P no sistema de coordenadas curvilíneas X^1, X^2, X^3 ao qual está associado o tetraedro elementar T*. Do sistema de coordenadas curvilíneas recíproco: X_1, X_2, X_3 (ao qual está associado o tetraedro T*), apenas a coordenada X_3 e respectivo vetor de base $\mathbf{e}^3$ estão indicados.

---

[1] Essa representação é arbitrária, as letras podemo receber índices em nível inferior.
[2] Apenas a prática, combinada com um certo tirocínio, mostra o sistema a adotar.
[3] A escolha das coordenadas com sobreíndices sugere indicar os vetores de base com subíndices.

expressão em que $\hat{\mathbf{e}}^i$ representa o unitário de $\mathbf{e}^i$. Então, considerando (5) podemos escrever (6) na forma diádica

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \; . \; [\mathbf{e}_i \bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i)] = [\bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i)\mathbf{e}_i] \; . \; \hat{\mathbf{n}} \quad (07)$$

onde

$$\bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i) = |\mathbf{e}^i| \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i) \quad (7')$$

Por essa expressão vê-se que $\bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i)$ representa $|\mathbf{e}^i|$ vezes o vetor tensão $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i)$ na superfície coordenada de normal $\hat{\mathbf{e}}^i$ (no ponto P). Fazendo o volume do tetraedro tender para zero, a face de normal $\hat{\mathbf{n}}$, no limite, conterá P, e o vetor $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})$ será o vetor tensão em P relativo a $\hat{\mathbf{n}}$. As equações (7) e (7') mostram que é suficiente conhecer o vetor tensão de cada uma de três faces não concorrentes num ponto P do corpo deformado para conhecer-se o vetor tensão relativo a qualquer outra superfície cuja normal em P seja um dado vetor $\hat{\mathbf{n}}$.

Deduções análogas podem ser feitas com relação ao tetraedro T_* de P cuja quarta face tenha por normal o (mesmo) unitário $\hat{\mathbf{n}}$. Seria

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \; . \; [\mathbf{e}^i \underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i)] = [\underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i)\mathbf{e}^i] \; . \; \hat{\mathbf{n}} \quad (7.a)$$

onde

$$\underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i) = |\mathbf{e}_i| \underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i) \quad (7'.a)$$

Como $\hat{\mathbf{n}}$ é arbitrário, vê-se por (7) e (7.a) que

$$\mathbf{e}_i \; \bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i) = \mathbf{e}^i \; \underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i)] \quad (8')$$

O diádico representado nas formas (8') é denominado *diádico das tensões* no ponto P, e o representamos por Σ. Assim, em redução trinomial,

$$\Sigma = \mathbf{e}_i \; \bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i) = \mathbf{e}^i \; \underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i)], (i = 1, 2, 3) \quad (8).$$

Com essa representação, (7.a) é escrita na forma

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \; . \Sigma = \Sigma^T . \hat{\mathbf{n}} \quad (9)$$

sendo Σ^T o transposto de Σ. De (8) deduzimos imediatamente

$$\mathbf{e}^i \; . \; \Sigma = \bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i) = \Sigma^T \; . \; \mathbf{e}_i \quad (10)$$

Nos casos até abundantes em que as coordenadas curvilíneas são ortogonais - casos esses em que é nulo o ângulo dos recíprocos homólogos no ponto P e $|\mathbf{e}^i||\mathbf{e}_i|=1=$... - podemos fazer

$$\mathbf{e}_1 = |\mathbf{e}_1| \hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{|\mathbf{e}^1|} \hat{\mathbf{i}}, \text{ ou } \mathbf{e}^1 = |\mathbf{e}^1| \hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{|\mathbf{e}_1|} \hat{\mathbf{i}}, \text{ etc}$$

Nesses casos, então

$$\Sigma = \hat{\mathbf{i}} \; \mathbf{t}(\hat{\mathbf{i}}) + \hat{\mathbf{j}} \; \mathbf{t}(\hat{\mathbf{j}}) + \hat{\mathbf{k}} \; \mathbf{t}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (11)$$

3. Tensões normais e tangenciais

Podemos decompor o vetor tensão $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i)$ em duas componentes: uma, na direção do próprio $\hat{\mathbf{e}}^i$, ou da normal à face, componente essa denominada vetor tensão normal à face, de valor

$$[\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i).\hat{\mathbf{e}}^i]\hat{\mathbf{e}}^i = (\hat{\mathbf{e}}^i . \Sigma . \hat{\mathbf{e}}^i)\hat{\mathbf{e}}^i \quad (12)$$

outra, na direção da tangente à face (curvilínea) em P, componente essa denominada *vetor tensão de cisalhamento* ou *tangencial* à face, de valor

$$\hat{\mathbf{e}}^i \wedge \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i) \wedge \hat{\mathbf{e}}^i \quad (12')$$

expressão em cujo primeiro membro o uso dos parênteses (para estabelecer a ordem com que os vetores entram na operação) é irrelevante. Representando por $\mathbf{t}_n$ e $\mathbf{t}_S$, respectivamente, os vetores tensão normal e tangencial sobre a face 123, escreveríamos, analogamente,

$$\mathbf{t}_n = (\hat{\mathbf{n}}. \Sigma . \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} \;\text{ e }\; \mathbf{t}_S = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{t}_n \quad (12'')$$

Se Σ de P é um diádico completo, então $\mathbf{t}_n \neq \mathbf{o}$ para qualquer $\hat{\mathbf{n}}$. Pois, se fosse $\Sigma.\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{o}$, pré-multiplicando ambos os membros por Σ^{-1} teríamos $\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{o}$, o que é um absurdo.

4. A simetria de Σ

Consideremos agora um elemento finito de volume V e superfície S. O campo de força mássica (as inerciais incluídas), por unidade de volume, que atua na vizinhança do ponto genérico r desse elemento[4], no instante t, é $\rho\mathbf{f}(\mathbf{r},t)$, sendo ρ a sua massa específica nesse ponto. A força de superfície atuante em $\mathbf{r}$ através de uma área d S (arbitrária) de normal $\hat{\mathbf{n}}$, onde o diádico de tensões é Σ no instante t, é $\hat{\mathbf{n}}.\Sigma d S$. Estando o elemento finito em equilíbrio (dinâmico) sob a ação dessas forças devem ser verificadas simultaneamente as equações relativas à soma nula de forças,

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \, . \Sigma \, d\, S + \int_V \rho \, \mathbf{f} \, d\, V = \mathbf{o} \quad (13)$$

e soma nula de momentos,

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \, . \Sigma \wedge \mathbf{r} \, d\, S + \int_V \rho \, \mathbf{f} \wedge \mathbf{r} \, d\, V = \mathbf{o} \quad (13')$$

Transformando as integrais de superfície em integrais de volume aplicando a fórmula diádica de Gauss, isto é,

$$\forall \phi: \quad \oint_S \hat{\mathbf{n}} \, . \phi \, d\, S = \int_V \operatorname{div}\phi \, d\, V,$$

temos, de (13),

$$\int_V (\operatorname{div}\Sigma + \rho \, \mathbf{f}) \, d\, V = \mathbf{o},$$

e de (13'),

$$\int_V [\operatorname{div}(\Sigma \wedge \mathbf{r}) + \rho \, \mathbf{f} \wedge \mathbf{r}] \, d\, V = \mathbf{o}.$$

Como V é arbitrário resulta da primeira integral

$$\operatorname{div}\Sigma + \rho \, \mathbf{f} = \mathbf{o} \quad (14)$$

Da segunda integral, já considerando (14), vem:

$$\operatorname{div}(\Sigma \wedge \mathbf{r}) - (\operatorname{div}\Sigma) \wedge \mathbf{r} = \mathbf{o}$$

A fórmula geral

$$\forall \phi, \mathbf{u}: \; \operatorname{div}(\phi \wedge \mathbf{u}) = (\operatorname{div}\phi) \wedge \mathbf{u} + (\phi^T . \nabla \mathbf{u})_V$$

particularizada para $\phi = \Sigma$ e $\mathbf{u} = \mathbf{r}$ (caso em que $\nabla r = I$) é

$$\operatorname{div}(\Sigma \wedge \mathbf{r}) = (\operatorname{div}\Sigma) \wedge \mathbf{r} - \Sigma_V$$

Então

$$\Sigma_V = \mathbf{o}, \text{ ou seja, } \Sigma = \Sigma^T, \quad (15)$$

pois a condição necessária e suficiente para um diádico seja simétrico é que seu vetor seja nulo.

[4] O vetor $\mathbf{r}$ é posicional em relação a um ponto arbitrário e fixo.

5. Interpretação das coordenadas cartesianas de Σ

Ao diádico das tensões podemos dar quatro representações em relação às bases recíprocas do ponto, divididas em dois pares, cada par correspondendo-se com um dos tetraedros recíprocos. Podemos escrever, conforme a teoria dos vetores recíprocos,

$$\bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i) = [\bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i).\mathbf{e}_j]\mathbf{e}^j = [\bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i).\mathbf{e}^j]\mathbf{e}_j \quad \text{e}$$
$$\underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i) = [\underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i).\mathbf{e}_j]\mathbf{e}^j = [\underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i).\mathbf{e}^j]\mathbf{e}_j \tag{16}$$

Pondo

$$\bar{T}^i{}_j = \bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i).\mathbf{e}_j, \quad \bar{T}^{ij} = \bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i).\mathbf{e}^j \quad \text{e}$$
$$\underline{T}_{ij} = \underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i).\mathbf{e}_j, \quad \underline{T}_i{}^j = \underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_i).\mathbf{e}^j \tag{16'}$$

e considerando as (8), podemos escrever o diádico das tensões nas formas correspondentes

$$\bar{\Sigma} = \bar{T}^i{}_j\, \mathbf{e}_i\, \mathbf{e}^j = \bar{T}^{ij}\, \mathbf{e}_i\, \mathbf{e}_j = \underline{T}_{ij}\, \mathbf{e}^i\, \mathbf{e}^j = \underline{T}_i{}^j\, \mathbf{e}^i\, \mathbf{e}_j \tag{17}$$

às quais estão associadas as matrizes

$$[\Sigma^*{}_*] = \begin{bmatrix} \bar{T}^1{}_1 & \bar{T}^1{}_2 & \bar{T}^1{}_3 \\ \bar{T}^2{}_1 & \bar{T}^2{}_2 & \bar{T}^2{}_3 \\ \bar{T}^3{}_1 & \bar{T}^3{}_2 & \bar{T}^3{}_3 \end{bmatrix}, \quad [\Sigma^{**}] = \begin{bmatrix} \bar{T}^{11} & \bar{T}^{12} & \bar{T}^{13} \\ \bar{T}^{21} & \bar{T}^{22} & \bar{T}^{23} \\ \bar{T}^{31} & \bar{T}^{32} & \bar{T}^{33} \end{bmatrix},$$

$$[\Sigma_{**}] = \begin{bmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} & \bar{T}_{13} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} & \bar{T}_{23} \\ \bar{T}_{31} & \bar{T}_{32} & \bar{T}_{33} \end{bmatrix} \text{ e } [\Sigma_*{}^*] = \begin{bmatrix} \bar{T}_1{}^1 & \bar{T}_1{}^2 & \bar{T}_1{}^3 \\ \bar{T}_2{}^1 & \bar{T}_2{}^2 & \bar{T}_2{}^3 \\ \bar{T}_3{}^1 & \bar{T}_3{}^2 & \bar{T}_3{}^3 \end{bmatrix} \tag{17'}$$

tais que, por ser $\Sigma=\Sigma^T$,

$$[\Sigma^*{}_*]=[\Sigma_*{}^*]^T, \qquad [\Sigma^{**}]=[\Sigma^{**}]^T, \qquad [\Sigma_{**}]=[\Sigma_{**}]^T \tag{17''}$$

devendo-se observar que as matrizes mistas ($\Sigma_*{}^*$ e $\Sigma^*{}_*$) não são simétricas.

Ponhamos, ainda,

$$T^i{}_j = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i).\hat{\mathbf{e}}_j, \quad T^{ij} = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i).\hat{\mathbf{e}}^j \quad \text{e}$$
$$T_{ij} = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_i).\hat{\mathbf{e}}_j, \quad T_i{}^j = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_i).\hat{\mathbf{e}}^j \tag{18}$$

Sendo $\bar{T}^i{}_j = \underline{T}_j{}^i$, tem-se

$\bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}^i).\mathbf{e}_j = |\mathbf{e}^i|\,|\mathbf{e}_j| T^i_j = \underline{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{e}}_j).\mathbf{e}^i = |\mathbf{e}_j||\mathbf{e}^i| T_j{}^i$, isto é,

$T^i{}_j = T_j{}^i$; e reciprocamente, como é fácil demonstrar. Então

$$\bar{T}^i{}_j = \underline{T}_j{}^i \quad \Leftrightarrow \quad T^i{}_j = T_j{}^i \tag{19}$$

Da mesma forma podemos demonstrar que

$$\bar{T}^{ij} = \bar{T}^{ji} \Leftrightarrow T^{ij} = T^{ji} \quad \text{e} \quad \bar{T}_{ij} = \bar{T}_{ji} \Leftrightarrow T_{ij} = T_{ji}, \tag{20}$$

Ora, $T^{ii} = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i).\hat{\mathbf{e}}^i$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i)$ na direção de $\mathbf{e}^i$; T^{ii} é, pois, a *tensão normal* sobre essa faceta do tetraedro T_* em grandeza e sinal. No tetraedro T^*, da mesma forma, à faceta de normal $\mathbf{e}_i$ corresponde, em grandeza e sinal, a tensão normal $T_{ii} = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_i).\hat{\mathbf{e}}_i$.

Em T_*, considerando a primeira das relações (20) para $i \neq j$, $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i).\hat{\mathbf{e}}^j = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^j).\hat{\mathbf{e}}^i$. Analogamente, com relação à segunda das relações (20) em T^*, para $i \neq j$, $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_i).\hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_j).\hat{\mathbf{e}}_i$. Concluímos:

> *a projeção (ortogonal) da tensão total em uma faceta de um tetraedro na direção da normal a uma segunda faceta desse mesmo tetraedro é igual à projeção (ortogonal) da tensão total dessa faceta na direção da normal à primeira.*

Esse é o *princípio generalizado da reciprocidade das tensões* num mesmo tetraedro, mas essas tensões não são tangenciais (exceto se as coordenadas curvilíneas são ortogonais).

Em T_*, $T^i_j = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i).\hat{\mathbf{e}}_j$ para $i \neq j$ é a projeção ortogonal de $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}^i)$ na direção do vetor de base $\mathbf{e}_j$ contido na faceta de normal $\mathbf{e}^i$, isto é, T^i_j é uma *tensão de cisalhamento* nessa faceta; similarmente $T_j^i = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_j).\hat{\mathbf{e}}^i$ para $i \neq j$ é tensão de cisalhamento na direção $\mathbf{e}^i$ contida na faceta de T^* ortogonal à direção $\mathbf{e}_j$. Em vista de (19), concluímos:

> *a projeção (ortogonal) do vetor tensão total relativo a uma faceta de um tetraedro na direção da normal a uma faceta qualquer do tetraedro recíproco é igual à projeção (ortogonal) do vetor tensão total relativo a essa face desse tetraedro na direção da normal à faceta considerada do primeiro.*

Esse é o *princípio generalizado da reciprocidade das tensões tangenciais em tetraedros recíprocos.*

Quando as coordenadas curvilíneas são ortogonais, os dois princípios acima se fundem num só: o princípio clássico das ações tangenciais em planos ortogonais, pois, nesse caso, e apenas nesse caso, os tetraedros recíprocos se confundem.

6. Tensões e direções principais

As tensões dadas por (19) e (20) dependem dos tetraedros recíprocos do ponto, isto é, dependem dos vetores de base, que, diretamente, dependem das coordenadas curvilíneas adotadas. Mas, como comprovado, a simetria do diádico das tensões independe dessas coordenadas. Ora, a todo diádico simétrico estão associados três autovalores reais, A, B e C, aos quais correspondem, respectivamente, três autovetores de unitários $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ mutuamente ortogonais; são denominadas as *tensões principais* e as *direções principais* das tensões do ponto. Podemos, então, escrever, em relação a essas direções e seus unitários:

$$\Sigma = A\,\hat{\mathbf{i}}\,\hat{\mathbf{i}} + B\,\hat{\mathbf{j}}\,\hat{\mathbf{j}} + C\,\hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{k}} \tag{21}$$

com

$$[\Sigma]_{ijk} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \qquad (21_1)$$

Como Σ é função do ponto concluímos que existe um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais em relação ao qual o diádico das tensões pode ser escrito na forma diagonal (21). Nesse sistema, o tetraedro do ponto é o *tetraedro principal* do ponto. Como as interpretações dos elementos das matrizes associadas ao diádico das tensões independem do sistema de coordenadas, vê-se que nas facetas do tetraedro principal do ponto, e apenas nessas facetas, só atuam tensões normais, sendo nulas todas as tangenciais.

Seja, em relação aos unitários dos autovetores de Σ, o unitário variável $\hat{\mathbf{n}}$,

$$\hat{\mathbf{n}} = \alpha\,\hat{\mathbf{i}} + \beta\,\hat{\mathbf{j}} + \gamma\,\hat{\mathbf{k}}, \quad \text{com} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Tem-se:

$$N = \hat{\mathbf{n}}\,.\Sigma\,.\hat{\mathbf{n}} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = (A - C)\alpha^2 + (B - C)\beta^2 + C$$

e

$$\mathbf{t}_n{}^2 = \hat{\mathbf{n}}\,.\Sigma^2.\hat{\mathbf{n}} = A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2 =$$

$$= (A^2 - C^2)\alpha^2 + (B^2 - C^2)\beta^2 + C^2$$

Os extremados de N são obtidos para

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = 0 = 2(A - C)\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial \beta} = 0 = 2(B - C)\beta$$

ou seja, $\alpha = 0 = \beta$ se $A \neq B \neq C$; nesse caso $\gamma = \pm 1$ e $N = C$. Se exprimirmos N em função de β e γ, teremos novos valores relativos a extremados: $\gamma = 0 = \beta$ e $\alpha = \pm 1$ e $N = A$; analogamente, teremos, ainda, o caso $\gamma = 0 = \alpha$ com $\beta = \pm 1$ e $N = B$. Esses resultados mostram que às direções principais correspondem tensões normais extremadas.

As variáveis que extremam $\mathbf{t}_S{}^2 = \mathbf{t}_n{}^2 - N^2$ estão ligadas pela condição $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Segundo o método dos multiplicadores de Lagrange, devemos extremar

$$F = \mathbf{t}_S{}^2 = \lambda\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

onde λ é um escalar, como se F fosse um extremado livre. Então, devendo ser

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0 \text{ isto é,}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{t}_n{}^2}{\partial \alpha} - 2N\dfrac{\partial N}{\partial \alpha} - 2\lambda\alpha = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{t}_n{}^2}{\partial \beta} - 2N\dfrac{\partial N}{\partial \beta} - 2\lambda\beta = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{t}_n{}^2}{\partial \gamma} - 2N\dfrac{\partial N}{\partial \gamma} - 2\lambda\gamma = 0, \end{cases}$$

devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2A\alpha(A - 2N) - 2\lambda\alpha = 0 \\ 2B\beta(B - 2N) - 2\lambda\beta = 0 \\ 2C\gamma(C - 2N) - 2\lambda\gamma = 0. \end{cases}$$

Esse sistema mostra que α, β e γ não podem ser simultaneamente não nulos porque, se fossem, seria
$A\,(A - 2N) = B\,(B - 2N) = C\,(C - 2N)$
de onde deduzimos, após transformações elementares, que $A = B = C$ para todo ponto, necessariamente; o que não é verdade. Se, então, $\gamma = 0$, o sistema fica reduzido às duas primeiras equações, das quais deduzimos, facilmente
(se $A \neq B$) : $2N = A + B = 2\,(A\alpha^2 = B\beta^2)$. Como $\alpha^2 = \beta^2 = 1$, vem:

$$\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \beta$$

isto é, $\hat{\mathbf{n}}$ é bissetriz das direções principais $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$. Nesse caso, então,

$$|\mathbf{t}_S| = \frac{1}{2}|A - B|$$

Resultados análogos seriam obtidos se considerássemos $\beta = 0$ e depois $\alpha = 0$.

Com uma representação adequada dos unitários das direções principais (representação essa arbitrária) podemos considerar que $A \geq B \geq C$. Concluiremos, então, que $\frac{1}{2}|A - C|$ é o valor máximo das tensões cisalhantes em P, ou seja:

> *A maior tensão cisalhante num ponto é igual à semidiferença entre a maior e a menor das tensões normais principais desse ponto, e agem num plano que é bissetor do diedro dos planos aos quais correspondem as tensões normais extremas.*

7. Diádico de Poisson e diádico desvio

Quando os três autovalores do diádico das tensões de um ponto são iguais, ele recebe o nome particular de *diádico escalar*, *diádico isotrópico* ou, ainda, *diádico esférico*[5]; nesse caso, se essas tensões são de compressão, o diádico é denominado também de *compressivo*, ou *hidrostático*; se são de tração, *trativo* ou *expansivo*.

Quando um, e apenas um, dos autovalores do diádico das tensões de um ponto é nulo, esse diádico (incompleto) é uniplanar e seu plano é ortogonal à direção segundo a qual a tensão normal é nula. Nesse caso, se os outros dois autovalores têm o mesmo módulo mas sinais diferentes (tração numa direção, compressão na outra), o diádico é denominado *cisa-*

[5] A sua matriz mista associada (em relação aos autovetores) é uma matriz escalar.

lhante puro ou, ainda, *diádico de Poisson*[6]; as tensões de mesmo módulo de um diádico de Poisson são denominadas a tensão normal do diádico. Em relação às direções principais $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ do ponto, esse diádico seria escrito na forma $M(\hat{\mathbf{i}}\,\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{k}})$ se à direção $\hat{\mathbf{j}}$ correspondesse a tensão normal nula; sua matriz associada nessa base seria, então,

$$[\Sigma]_{ijk} = M\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Posto que

$$\forall\, \Sigma: \qquad \Sigma = \frac{1}{3}\Sigma_E I + \Sigma - \frac{1}{3}\Sigma_E I,$$

com

$$\Sigma_E = \overline{T}^1{}_1 + \overline{T}^2{}_2 + \overline{T}^3{}_3 = \underline{T}_1{}^1 + \underline{T}_2{}^2 + \underline{T}_3{}^3 = A + B + C$$

vemos que todo diádico de tensões[7] pode ser decomposto na soma de um diádico escalar, cujo escalar é a média das tensões principais, com um diádico que representa o desvio desse diádico em relação à sua parte escalar (isto é, em relação à média dos valores extremos das tensões). Por isso mesmo o diádico $\frac{1}{3}\Sigma_E I$ será denominado a *parte escalar principal de* Σ (ou *tensão média de* Σ) e $\mathrm{dev}\,\Sigma = \Sigma - \frac{1}{3}\Sigma_E I$, o *diádico desvio de* Σ em relação à sua parte escalar principal[8]. O diádico desvio é evidentemente simétrico e em relação aos unitários dos seus autovetores podemos escrever:

$$\Sigma = \frac{1}{3}\Sigma_E I + \frac{1}{3}(2A - B - C)\,\hat{\mathbf{i}}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}(-A + 2B - C)\,\hat{\mathbf{j}}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}(-A - B + 2C)\,\hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{k}}$$

Por essa representação vemos que os unitários $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ são também autovetores de $\mathrm{dev}\Sigma$, aos quais correspondem, respectivamente, os autovalores

$$\frac{1}{3}(2A - B - C), \quad \frac{1}{3}(-A + 2B - C) \quad \text{e} \quad \frac{1}{3}(-A - B + 2C)$$

Observando que também podemos escrever

$$\mathrm{dev}\,\Sigma = \frac{1}{3}(A - B)\,(\hat{\mathbf{i}}\,\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}\,\hat{\mathbf{j}}) + \frac{1}{3}(B - C)(\hat{\mathbf{j}}\,\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{k}}) + \frac{1}{3}(C - A)(\hat{\mathbf{i}}\,\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{k}})$$

vemos que $\mathrm{dev}\Sigma$ é a soma de três diádicos de Poisson cujas tensões normais valem os 2/3 dos módulos das tensões principais de cisalhamento do ponto e cujos planos (onde atuam) são pares de facetas principais do ponto. Assim, por exemplo, ao diádico de Poisson seguinte

$$\frac{1}{3}(C - A)(\hat{\mathbf{i}}\,\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{k}}) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}(C - A)(\hat{\mathbf{i}}\,\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{k}}) = \frac{2}{3}\tau_{max}$$

corresponde um estado de tensão no ponto com uma tensão normal de tração igual aos 2/3 da maior tensão de cisalhamento (no ponto) na direção do autovetor $\hat{\mathbf{i}}$ e uma tensão normal de compressão do mesmo valor na direção de autovetor $\hat{\mathbf{k}}$.

---

[6] A nomenclatura cisalhamento puro, embora aceitável, não é adequada porque sugere a existência de cisalhamento que, de fato, não existe. Diádico de Poisson é uma nomenclatura mais sugestiva porque tração e compressão em planos ortogonais aumentam o chamado efeito Poisson que fatalmente ocorre.

[7] Essa propriedade é característica de todo e qualquer diádico.

[8] Esses conceitos podem ser generalizados para poliádicos quaisquer de valência par.

Referências bibliográficas

1 - BEM-MENAHEM, A., SINGH J. S. ***Seismic waves and sources***. New York: Springer-Verlag. 1981. 1108 p.

2 - CHOU, P. C., PAGANO, N. J. ***Elasticity*** (tensor, dyadic and engineering approaches). Toronto: D. Van Nostrand Company, 1967. 290 p.

Artigo recebido em 15/10/2002

e aprovado em 12/12/2002.