Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 3, p. 377 - 378, (2005)
www.sbfisica.org.br

Uma aplicação do método da mínima restrição de Gauss

(A problem solved by the minimum constraint method of Gauss)

G.F. Leal Ferreira[1]

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil
Recebido em 4/2/2005; Aceito em 24/3/2005

O método da mínima restrição de Gauss é recapitulado e aplicado à solução do movimento de uma esfera sobre solo rugoso sob a ação de força (dentro de certas aproximações).
Palavras-chave: método da mínima restrição de Gauss, mecânica analítica.

The Gauss method of the minimum constraint is reviewed and applied to solve the problem of the forced motion of a sphere on a rough soil (under certain approximations).
Keywords: minimum constraint method of Gauss, analytical mechanics.

1. Introdução

O método de Gauss, ou da mínima restrição (constraint), recebe alguma atenção na literatura [1], principalmente por ter se constituido na base da mecânica 'sem força' de Hertz [2]. Neste artigo, faz-se uma recapitulação do método e divisa-se a sua aplicação a um problema (seção 4) em que há vinculação entre movimentos em diferentes direções. O método origina-se no Princípio de D 'Alembert [1]

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_i).\delta \mathbf{r}_i = 0, \tag{1}$$

onde $\mathbf{F}_i$ é a força aplicada sobre a partícula i, de massa m_i e aceleração $\mathbf{A}_i$, $\delta \mathbf{r}_i$ sendo um deslocamento virtual compatível com os vínculos. O termo $\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_i$ foi chamado por D'Alembert de 'força perdida' e a Eq. (1) diz que o trabalho virtual total das forças perdidas é nulo [3]. Sem alterar as direções e sentidos e as proporções relativas, vamos dividir todos os deslocamentos $\delta \mathbf{r}_i$ na Eq. (1) por um parâmetro infinitesimal δt (simulando o tempo que flui uniformemente em todos os pontos), definindo as velocidades virtuais $\delta \mathbf{v}_i$, e daí, por raciocínio análogo, pode-se chegar às acelerações virtuais $\delta \mathbf{A}_i$. Assim, a Eq. (1) se escreve também como

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_i).\delta \mathbf{A}_i = 0, \tag{2}$$

ou da seguinte forma

$$Q = \sum_i \frac{1}{m_i} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_i)^2 \quad \text{e} \quad \delta Q = 0, \tag{3}$$

em que a variação é realizada em relação às acelerações, mantendo-se as forças constantes. Q foi chamado por Gauss de restrição (constraint, em inglês) e a sua minimização em relação às componentes independentes das acelerações leva às equações de movimento.

2. Uma única partícula

No caso de uma única partícula temos

$$Q = (\mathbf{F} - m\mathbf{A})^2 \text{ e } \delta Q = 0. \tag{4}$$

Se $\mathbf{F}$ for igual a zero, isto é, partícula sem força aplicada mas sujeita a vínculo (restrição), temos que Q é o quadrado do módulo da aceleração, composta da aceleração tangencial e centrípeta. Mas como argumentado acima, só a componente tangencial deve ser considerada na variação de Q e a Eq. (4) leva à conservação da energia cinética. Se $\mathbf{F} \neq 0$, a Eq. (4) afirma que o quadrado do módulo, ou o próprio módulo da aceleração perdida se anula, ou mais sugestivamente que o módulo da aceleração, em presença do vínculo, é máxima.

3. Exemplos

Lanczos [1] exemplifica o emprego do método através do caso do movimento de uma partícula, sujeita à gravidade, sobre a superfície $z(x, y)$. Tomando a coordenada z como dependente, temos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z_x \dot{x} + z_y \dot{y} \text{ e} \\ \ddot{z} &= z_{xx} \dot{x}^2 + z_x \ddot{x} + z_{yy} \dot{y}^2 + z_y \ddot{y}, \end{aligned} \tag{5}$$

[1]E-mail: guilherm@if.sc.usp.br.

Copyright by the Sociedade Brasileira de Física. Printed in Brazil.

de forma que a Eq. (4) para Q é

$$Q = m^2\ddot{x}^2 + m^2\ddot{y}^2 + (-mg - m\ddot{z})^2, \tag{6}$$

que minimizada em relação a $\ddot{x}$ e a $\ddot{y}$ dá

$$\frac{\partial Q}{\partial \ddot{x}} = \ddot{x} + (-g - \ddot{z})z_x = 0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \ddot{y}} = \ddot{y} + (-g - \ddot{z})z_y = 0, \tag{7}$$

lembrando que as variações da aceleração $\delta\ddot{z}$ só os termos contendo as acelerações $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ aparecem, como já explicado. As Eqs.(7) são as duas equações que resultam da análise newtoniana quando a força normal de vínculo é substituida pelo seu valor tirado da equação em z, nas equações em x e y.

Não é necessário expressar a força e a aceleração em coordenadas cartesianas. No problema do pêndulo, podemos usar as coordenadas polares r e θ, contado da vertical. Como r é aqui constante, igual a L, comprimento do pêndulo, Q conterá somente o termo correspondente à coordenada θ e teremos

$$Q = (-mgsen\theta - mL\ddot{\theta})^2, \tag{8}$$

com

$$\delta Q = (-mgsen\theta - mL\ddot{\theta})\delta\ddot{\theta} \tag{9}$$

ou

$$L\ddot{\theta} = -mgsen\theta. \tag{10}$$

4. Um caso interessante

Vamos considerar o movimento principal de uma esfera em uma dimensão, sujeita a uma força horizontal, F, sobre solo rugoso. Além do movimento na direção da força, a esfera executará movimento oscilatório na vertical devido à rugosidade. O interesse está em se ver como a perturbação causada pela rugosidade, introduzindo pequeno movimento vertical, altera o movimento horizontal forçado. Vamos supor que esta seja em média representada pela função $z = asen(x/\lambda)$, com $a << \lambda$. O raio da esfera deve ser razoavelmente maior que λ, e, em princípio, a é função dele. Também os impulsos levando a pequenas rotações da esfera serão ignorados. Problema de certa forma análogo tem sido considerado na literatura, ou seja, o de uma partícula que está sujeita tanto a uma força de variação lenta como a outra de variação rápida no tempo [4]. Comparado com este último, nosso problema tem dois, e não um único grau de liberdade, relacionados por coordenadas espaciais e não pelo tempo.

As equações geradas pelo método de Gauss são mesmo mais simples do que aquelas do primeiro exemplo da seção anterior, já que temos uma única variável independente, x. Temos para Q

$$Q = (F - m\ddot{x})^2 + (-mg - m\ddot{z})^2, \tag{11}$$

e

$$\ddot{z} = z_{xx}\dot{x}^2 + z_x\ddot{x}. \tag{12}$$

Minimizando em relação à $\ddot{x}$ obtem-se

$$F = m\ddot{x}(1 + z_x^2) + mgz_x + mz_{xx}z_x\dot{x}^2. \tag{13}$$

Se o movimento é rápido, valores médios são representativos e as médias espaciais dos dois termos finais da Eq. (13) podem ser desprezados (supondo que a variação de $\dot{x}$ seja pequena para $\Delta x = \lambda$) . Então, aproximadamente,

$$F \simeq m\ddot{x}(1 + \frac{a^2}{2\lambda^2}). \tag{14}$$

Este resultado bem intuitivo indica que a massa efetiva é $(1 + a^2/2\lambda^2)$ vezes maior , incorporando na direção x, a média da inércia do movimento vinculado na direção z. Indica também que se F é nulo, o movimento será uniforme.

Agradecimento

O autor agradece ao árbitro pela sua competência e gentileza no julgamento do trabalho.

Referências

[1] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* (Dover Public., New York, 1970), cap. IV.

[2] H. Hertz, *Principles of Mechanics Presented in a New Form* (Dover Public., New York, 1956).

[3] J. D'Alembert, *Traité de Dynamique* (Gauthier-Villars, Paris, 1921).

[4] L. Landau e E. Lifchitz, *Mécanique* (Éditions de la Paix, Moscou, 1960).