

A capacitância de um condensador com placas planas não paralelas

(The capacitance of a capacitor with not parallel plane plates)

Jürgen W. Precker¹ e Wilton P. da Silva

Departamento de Física, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande,
Campina Grande, PB, Brasil

Recebido em 22/8/2005; Revisado em 18/12/2005; Aceito em 3/1/2006

Analisamos neste artigo três métodos para obter a capacitância de um condensador com placas planas não paralelas: a solução por integração, a solução por limites e uma solução proposta. Apesar de cada uma das soluções envolver aproximações diferentes, as três capacitâncias obtidas são coerentes.

Palavras-chave: capacitores, capacitância, campo elétrico, diferença de potencial.

We analyze in this article three different methods to obtain the capacitance of a capacitor with not parallel plane plates: a solution by integration, a solution by limits and a proposed solution. In spite of the fact that each of the solutions involves different approximations, the three capacitances obtained are coherent.

Keywords: capacitors, capacitance, electric field, potential difference.

1. Introdução

Recentemente, um novo método para calcular a capacitância de um condensador com placas planas, mas não paralelas, foi abordado na Rev. Bras. Ens. Fis. [1]. Duas soluções para o problema foram apresentadas no citado trabalho: a solução por integração encontrada em livros-texto e uma nova solução por limites. Nas duas soluções, a curvatura das linhas de força do campo elétrico entre as placas é desprezada.

Apresentamos neste trabalho mais uma solução que leva em conta a curvatura das linhas de força, e comparamos os três resultados obtidos para o capacitor com placas planas não paralelas. Destacamos neste trabalho também as aproximações usadas em cada uma das três soluções.

Nosso ponto de partida é o capacitor de placas planas e paralelas com a capacitância C_o dada por:

$$C_o = \frac{A\epsilon_o}{d}, \quad (1)$$

no sistema SI, onde A é a área das placas, d a distância entre elas e $\epsilon_o = 8,85$ pF/m é a permissividade do vácuo. Efeitos de borda não são considerados na Eq. (1) e também não nas deduções feitas a seguir.

¹E-mail: jurgenp@uol.com.br.

2. Solução por integração

Este método já foi exposto em [1], mas apresentamo-lo novamente, destacando as aproximações nele envolvidas. O campo elétrico \mathbf{E} , criado numa superfície condutora por uma carga superficial σ , é perpendicular a ela e dado por:

$$\mathbf{E} = (\sigma/\epsilon_o)\mathbf{n}, \quad (2)$$

onde \mathbf{n} é o vetor ortonormal a superfície. A diferença de potencial ΔV entre as placas do capacitor é constante e dada pela integral de linha:

$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int \vec{E} \cdot (\hat{i}dx + \hat{j}dy) = - \int E_x dx - \int E_y dy. \quad (3)$$

Na placa, em $x = 0$, o campo elétrico tem apenas o componente E_x (ver Fig. 1), e a integração sobre dx vai de $x_1 = 0$ até a placa inclinada, descrita pela equação $y = (l/2\delta)x - ld/2\delta$, ou $x_2 = (2\delta/l)y + d$:

$$\begin{aligned} \int E_x dx &= \int \frac{\sigma(y)}{\varepsilon_o} dx \\ &= \frac{\sigma(y)}{\varepsilon_o} \int_0^{x_2} dx = \frac{\sigma(y)}{\varepsilon_o} \left[\frac{2\delta}{\ell} y + d \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

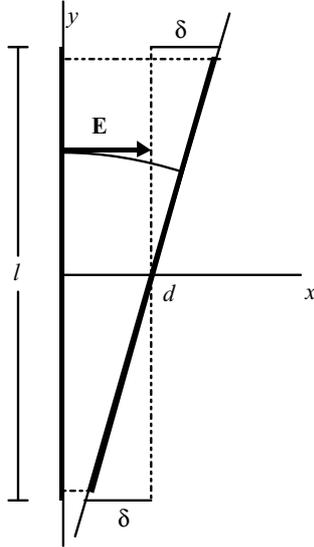


Figura 1 - Capacitor com placas não paralelas. Observe que a projeção da placa inclinada sobre a placa situada em $x = 0$ é menor que l .

Note que a validade de $E_x = \sigma(y)/\varepsilon_o$, que é correto na superfície da placa em $x = 0$, é estendida na integração para todos os x sem justificativa. Observe também que y varia de $-l/2$ até $l/2$, mas perto das extremidades da placa situada em $x = 0$ não há uma placa inclinada ao lado oposto, e não podemos efetuar a integral na Eq. (4) de $x = 0$ até a placa inclinada (ver Fig. 1). Ignoramos este obstáculo como primeira aproximação.

Faltaria elaborar a integral sobre a variável y . Como σ é uma função de y , o componente E_y do campo elétrico depende também de y . E aí vem a segunda aproximação desta solução: desprezamos a contribuição de E_y , quer dizer, fazemos:

$$\int E_y dy = 0, \quad (5)$$

e escrevemos para a diferença de potencial:

$$\Delta V = - \int E_x dx = - \frac{\sigma(y)}{\varepsilon_o} \left[\frac{2\delta}{\ell} y + d \right]. \quad (6)$$

No próximo passo calculamos a carga q na placa situada em $x = 0$,

$$q = \int \sigma(y) dA. \quad (7)$$

Podemos obter a densidade superficial de carga $\sigma(y)$ da Eq. (6), e o elemento de área dA é dado por $dA = l dy$, onde l é a largura da placa com a superfície A , e, portanto, $A = l^2$. Substituindo as devidas expressões na integral da Eq. (7), temos:

$$q = - \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{\Delta V \varepsilon_o}{\frac{2\delta}{\ell} y + d} l dy = - \frac{\varepsilon_o A \Delta V}{2\delta} \ln \frac{d + \delta}{d - \delta}. \quad (8)$$

A capacitância C é definida por $q = C \Delta V$, e daí

$$C_1 = |q| / |\Delta V| = \frac{\varepsilon_o A}{2\delta} \ln \frac{d + \delta}{d - \delta} = C_o \frac{d}{2\delta} \ln \frac{d + \delta}{d - \delta}. \quad (9)$$

3. Solução por limites

Segundo os autores, “este método consiste em aproximar a placa inclinada por uma escada composta de n capacitores de área A/n . Quando n tender a infinito, a escada tende a uma reta inclinada” [1]. O resultado, deduzido detalhadamente em [1], é:

$$C_2 = C_o \left(1 + \frac{\delta^2}{3d^2} \right). \quad (10)$$

Nesta abordagem, as placas são sempre paralelas e o campo elétrico tem apenas um componente E_x (ver Fig. 2), evitando assim a complicação com o componente E_y criada pela mudança na direção de \mathbf{E} com x crescente na solução anterior. Por outro lado, a placa inclinada com comprimento inicial l cresceu para um comprimento l' tal que sua projeção sobre o eixo y é igual a l . Aceitamos este efeito como consequência da aproximação.

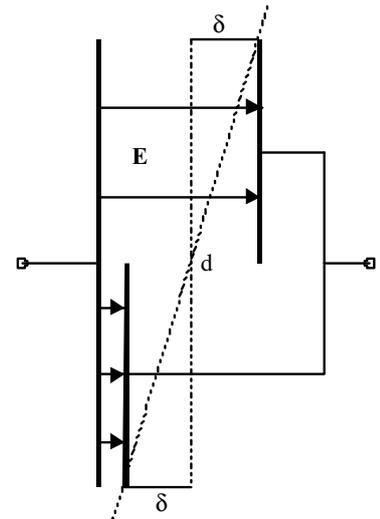


Figura 2 - Dois capacitores de placas paralelas como primeira aproximação do capacitor com placas não paralelas. Em cada um dos capacitores, o campo elétrico é uniforme e paralelo.

4. Solução proposta

Nesta abordagem, deslocamos a placa inclinada um pouco, como mostra a Fig. 3. Neste deslocamento, não há trabalho realizado (na aproximação de se desprezar efeitos de borda), pois o campo é perpendicular à placa. Logo, como a carga e a energia do condensador não são alteradas neste deslocamento, sua capacidade deve se manter constante. Uma vez aceita esta pequena modificação do capacitor como aproximação, o cálculo é exato (desprezando, como sempre, efeitos de borda). Nesta nova configuração, as linhas de força do campo são círculos, perpendiculares às duas placas equipotenciais. Usando coordenadas polares (r, θ) , o campo elétrico na superfície da placa em $x = 0$ é dado pela Eq. (2) na forma:

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right) \mathbf{n} = \left[\frac{\sigma(r)}{\varepsilon_0} \right] \mathbf{e}_\theta = E_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad (11)$$

onde \mathbf{e}_θ é o vetor unitário na direção θ . O componente angular do campo elétrico na direção θ , E_θ , é, por simetria, apenas uma função de r e a integral de linha na Eq. (3) torna-se agora:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \vec{E} \cdot \hat{e}_\theta r d\theta = r E_\theta \int_0^{\theta_0} d\theta = r E_\theta \theta_0, \quad (12)$$

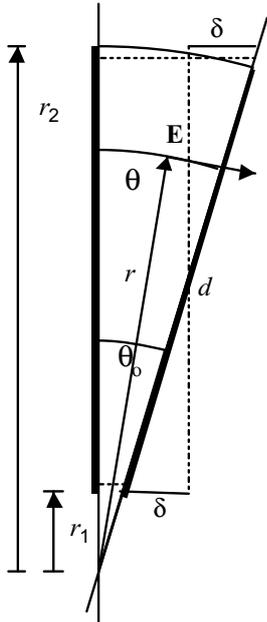


Figura 3 - Uma pequena manipulação cria uma simetria circular no capacitor de placas não paralelas.

A diferença de potencial é, portanto, dada por:

$$\Delta V = \frac{-\sigma(r)r\theta_0}{\varepsilon_0}. \quad (13)$$

Este resultado, baseado na geometria da Fig. 3, envolve nenhuma aproximação (desprezando efeitos de borda) e representa a solução exata do problema.

Calculamos a carga q na placa por:

$$q = \int \sigma(r) dA = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\Delta V \varepsilon_0}{\theta_0 r} \ell dr = - \frac{\Delta V \varepsilon_0 \ell}{\theta_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (14)$$

e a capacitância segue como:

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 \ell}{\theta_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (15)$$

onde $\tan \theta_0 = 2\delta/l$. Da Fig. 3 temos $r_1 = l(d/\delta - 1)/2$, $r_2 = r_1 + l = l(d/\delta + 1)/2$ e $r_2/r_1 = (d + \delta)/(d - \delta)$. Reescrevendo a Eq. (15), temos:

$$C_3 = C_0 \frac{d}{\ell \theta_0} \ln \frac{d + \delta}{d - \delta}. \quad (16)$$

Chegamos, então, a três soluções diferentes para o mesmo problema, que discutiremos a seguir.

5. Discussão e conclusões

A razão $\delta/d = 3/4$, mostrada na Fig. 1, fere a condição $\delta \ll d$, imposta nas soluções discutidas em [1]. Mesmo assim, é interessante calcular as capacitâncias C_1 , C_2 e C_3 , usando a geometria da Fig. 1:

$$C_1 = C_0 \frac{2}{3} \ln \frac{3,5}{0,5} = 1,30 C_0$$

e

$$C_2 = C_0 \frac{1 + (3/4)^2}{3} = 1,19 C_0.$$

Para calcular C_3 , temos $\tan \theta_0 = 2\delta/l = 3/10$ e $\theta_0 = \arctan(3/10) = 0,2915$ rad. Portanto,

$$C_3 = C_0 \frac{2}{10 \theta_0} \ln 7 = 1,34 C_0.$$

A capacitância C_2 é menor que as outras, pois foram desprezados, na dedução da Eq. (10), termos numa expansão em potências de δ/d , que não é adequado no caso $\delta/d = 3/4$. Levando mais termos em consideração, o valor de C_2 aumentará.

Com a expansão:

$$\ln \frac{1 + \delta/d}{1 - \delta/d} = 2 \left[\frac{\delta}{d} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{d} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\delta}{d} \right)^5 + \dots \right], \quad (17)$$

podemos reescrever as capacitâncias C_1 e C_3 como:

$$C_1 = C_0 \frac{d}{2\delta} 2 \left[\frac{\delta}{d} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{d} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\delta}{d} \right)^5 + \dots \right] \approx C_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{3d^2} \right), \quad (18)$$

resultado idêntico a C_2 na Eq. (10). Se $\delta/d \ll 1$ na Eq. (16) para C_3 , $\tan \theta_o \approx \theta_o = 2\delta/l$, e

$$C_3 = C_o \frac{d}{\ell} \frac{\ell}{2\delta} 2 \left[\frac{\delta}{d} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{d} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{\delta}{d} \right)^5 + \dots \right] \approx C_o \left(1 + \frac{\delta^2}{3d^2} \right), \quad (19)$$

mais uma vez o mesmo resultado. Observe que as três expressões para C_1 , C_2 e C_3 recuperam C_o no limite $\delta \rightarrow 0$. Do ponto de vista didático, achamos interessante, como três abordagens tão diferentes para o mesmo problema fornecem resultados tão consistentes.

Podemos ainda perguntar: porque a capacidade do condensador com placas planas não paralelas aumenta, e não diminui ou permanece constante? A inclinação da placa é simétrica, e, intuitivamente, podíamos esperar que a capacitância não mudasse. Um argumento simples é fornecido pela solução dos limites.

Como mostra a Fig. 2, a primeira aproximação da placa inclinada consiste em dois capacitores C_+ e C_- em paralelo, com as capacitâncias:

$$C_+ = \frac{\varepsilon_o A}{2} \frac{1}{d+\delta} = \frac{C_o}{2} \frac{1}{1+\delta/d} = \frac{C_o}{2} \left[1 - \frac{\delta}{d} + \left(\frac{\delta}{d} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{d} \right)^3 + \dots \right] \quad (20)$$

e

$$C_- = \frac{\varepsilon_o A}{2} \frac{1}{d-\delta} = \frac{C_o}{2} \frac{1}{1-\delta/d} = \frac{C_o}{2} \left[1 + \frac{\delta}{d} + \left(\frac{\delta}{d} \right)^2 + \left(\frac{\delta}{d} \right)^3 + \dots \right]. \quad (21)$$

Levando em conta apenas termos lineares nas expansões, obtemos para a capacitância total:

$$C = C_+ + C_- \approx \frac{C_o}{2} \left[1 - \frac{\delta}{d} \right] + \frac{C_o}{2} \left[1 + \frac{\delta}{d} \right] = C_o, \quad (22)$$

que é o resultado esperado intuitivamente. Mas o cálculo exato de C fornece:

$$C = \frac{C_o}{2} \frac{1}{1+\delta/d} + \frac{C_o}{2} \frac{1}{1-\delta/d} = \frac{C_o}{1 - (\delta/d)^2}, \quad (23)$$

e mostra que C é realmente maior que C_o , sendo, portanto, um efeito de segunda ordem: o ganho de capacitância na aproximação de placas supera a perda no afastamento (ver Fig. 4).

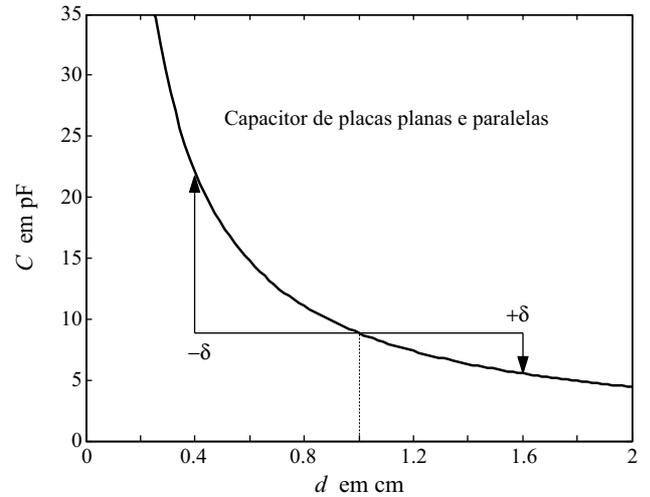


Figura 4 - Uma variação simétrica da distância d entre as placas implica numa variação assimétrica da capacitância C . A área usada no cálculo de C é $A = 100 \text{ cm}^2$.

Referências

- [1] A.C. Bertuola e M.V. Figueredo, Rev. Bras. Ens. Fís. **26**, 161 (2004).