

# A aproximação de lente fina é sempre válida em experimentos para determinação de distâncias focais?

(*Is the thin-lens approximation always valid in experiments for focal distance determination?*)

N. Carlin<sup>1</sup>, E.M. Szanto<sup>1</sup>, F.O. Jorge<sup>1</sup>, F.A. Souza<sup>1</sup>, I.H. Bechtold<sup>2</sup> e W.A. Seale<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil*

<sup>2</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil*

Recebido em 7/8/2006; Revisado em 5/2/2007; Aceito em 7/3/2007.

Neste trabalho é discutida a validade da aproximação de lente fina em atividades experimentais que envolvem a determinação de distâncias focais. É utilizado o formalismo matricial para o estudo de trajetória de raios luminosos através de um sistema de lentes espessas, sendo introduzido o conceito de planos principais. Nesse contexto, é mostrado que para uma lente espessa típica utilizada nos laboratórios didáticos do Instituto de Física da USP, a aproximação de lente fina não é adequada.

**Palavras-chave:** óptica geométrica, formalismo matricial, lentes finas, lentes espessas.

In this work we discuss the validity of the thin-lens approximation in experiments for focal distance determination. We use the matrix formalism for the study of ray trajectories through a thick lens system and introduce the concept of principal planes. It is shown that for a typical lens used in the undergraduate laboratory at the University of São Paulo Physics Institute, the thin lens approximation is not valid.

**Keywords:** geometrical optics, matrix formalism, thin lenses, thick lenses.

## 1. Introdução

A aproximação que permite considerar a propagação da luz como retilínea, simplifica tanto o estudo do comportamento da luz, em certos casos, que compensa de sobra imprecisões que dela decorrem. O domínio da “óptica geométrica” é o conjunto de fenômenos para os quais essa aproximação é válida e é aquela em que os efeitos de difração (ou da natureza ondulatória da luz) podem ser desprezados. Isso ocorre quando o comprimento de onda da energia radiante é pequeno se comparado às dimensões físicas do sistema óptico com o qual ela interage.

Em outras palavras, a óptica geométrica é válida no limite em que o comprimento de onda da luz tende a zero. Além disso, ela permite a descrição da alteração controlada das frentes de onda pela interposição de aparatos que refletem e/ou refratam a luz, de uma maneira bem mais simplificada, desde que seja possível desprezar efeitos de interferência e difração.

Há um formalismo interessante que permite resolver o problema de traçar o caminho dos raios luminosos através de uma lente ou sistemas de lentes. É o formalismo que utiliza matrizes para prever o caminho de um

raio luminoso através de um sistema óptico, obedecendo à aproximação paraxial, Refs. [1-3]. Esse formalismo é particularmente útil para sistemas de lentes em que a resolução analítica convencional fica muito trabalhosa.

Em experimentos didáticos para determinação de distâncias focais de lentes, realiza-se normalmente um conjunto de medidas de distâncias objeto-lente e imagem-lente, obtendo-se a distância focal por meio da relação de Gauss. No procedimento experimental, as lentes, embora verdadeiramente espessas, são tratadas como finas, e as distâncias são em geral medidas a partir do centro da lente. Neste trabalho pretendemos testar sob que condições uma lente pode ser tratada como lente fina. Para tanto será necessário prever as trajetórias dos raios luminosos ao atravessarem a lente e verificar quando, dentro dos erros experimentais, é possível desprezar a espessura da mesma em experimentos para determinação de distâncias focais. Nesse sentido é introduzido o conceito de planos principais, a partir do formalismo matricial para o estudo de lentes. É estudado um caso particular de lente utilizada nos laboratórios didáticos do Instituto de Física da USP, para o qual a aproximação de lente fina mostra-se inadequada.

<sup>1</sup>E-mail: nelson.carlin@dfn.if.usp.br.

## 2. Formalismo matricial para estudo de lentes espessas

Antes da apresentação de resultados experimentais, descreveremos brevemente os principais conceitos que nos ajudarão no estudo da validade da aproximação de lente fina nos experimentos para determinação de distâncias focais.

A lente é um dispositivo refrator, isto é, que reconfigura a distribuição de energia que transmite, quer se trate de ondas eletromagnéticas (visíveis, ultravioleta, infravermelho, microonda, rádio), ou de ondas mecânicas como as ondas sonoras.

O tipo de lente que se pretende estudar é construído de tal maneira que tanto o ponto objeto (posição do objeto em relação à lente), como o ponto imagem (posição da imagem em relação à lente), se encontram fora do meio da lente. Vamos restringir nosso estudo a lentes imersas no ar, cujo índice de refração é considerado igual à unidade. O valor tabelado é igual a  $n_{ar} = 1,000293$ ; a 1 atm e 0 °C, medida realizada com luz de sódio  $\lambda = 589,29$  nm; [1].

Supondo que um raio de luz paraxial incida sobre um sistema óptico, vamos caracterizá-lo por dois parâmetros: a sua distância  $r$  em relação ao eixo óptico do sistema e o ângulo  $\varphi$  que ele perfaz com esse eixo. O sistema óptico, qualquer que seja ele, terá um plano de entrada e um plano de saída do raio de luz. Vamos supor que os valores dos parâmetros  $r$  e  $\varphi$  nesses planos sejam  $r_1, \varphi_1$  e  $r_2, \varphi_2$  respectivamente.

Na aproximação paraxial há uma relação linear entre esses parâmetros da forma

$$r_2 = Ar_1 + B\varphi_1, \quad (1)$$

$$\varphi_2 = Cr_1 + D\varphi_1. \quad (2)$$

ou usando a notação matricial

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

lembrando que estamos usando o índice 1 para assinalar a entrada e o índice 2 para a saída do raio luminoso.

A matriz da Eq. (3),

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (4)$$

é chamada de matriz de transferência do raio luminoso.

Essa matriz transforma o raio que incide no ponto  $P_1$  da lente, (ponto de entrada), no raio que emerge no ponto  $P_2$ , (ponto de saída). Portanto a matriz é um operador, ou seja, ela opera uma transformação sobre o raio luminoso.

Geralmente o determinante dessa matriz é igual a 1, como consequência do teorema de Liouville, [3]. Esse teorema diz que a área do feixe luminoso (que vem do objeto e vai definir a imagem) é conservada no espaço

de fase. No caso, o espaço de fase do feixe é definido pelas coordenadas  $(r, \varphi)$ , ou seja, um espaço bidimensional cujos eixos são a distância  $r$  do eixo óptico ao ponto onde o raio atinge a lente, e o ângulo  $\varphi$ , que é o ângulo que o raio faz com o eixo óptico da lente. Se a área no espaço de fase é conservada, pode ser demonstrado que o determinante da matriz de transferência,  $M$ , é igual a 1. Essa característica pode ser explorada como um teste de consistência sempre que se cria uma matriz de transferência. Uma condição necessária (mas não suficiente) é que seu determinante seja igual a 1, para que ela faça a transferência correta entre o raio que entra e o raio que sai do sistema óptico.

A Fig. 1 mostra a trajetória verdadeira de dois raios luminosos provenientes de um objeto no caso de uma lente espessa.

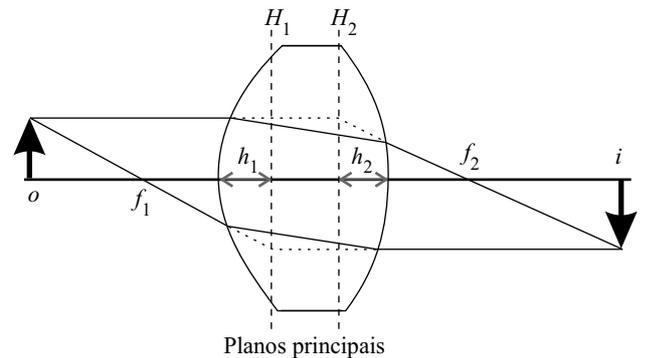


Figura 1 - Diagrama ilustrando a propagação de raios luminosos através de uma lente espessa. As grandezas  $H_1, H_2, h_1$  e  $h_2$  são referenciadas no texto.

Nessa figura fica evidente a dificuldade em relação à medida das distâncias focais e distâncias da imagem e do objeto em relação à lente. Na lente fina essas distâncias são medidas em relação ao plano que passa pelo centro da lente, ou seja, estamos considerando que as duas refrações, uma em cada superfície da lente, estão ocorrendo num só ponto que pertence ao plano que passa pelo centro da lente. Se a lente é suficientemente fina, o erro que se estará cometendo não é muito significativo. Mas, para uma lente espessa, as duas refrações, na primeira e na segunda superfície podem estar afastadas o suficiente uma da outra para não permitir que se considere que toda a refração ocorra num ponto do plano central. O erro que se estaria cometendo seria inaceitável.

Por outro lado seria interessante poder adaptar os conceitos que funcionam para a lente fina para o caso de lentes espessas. Será que é possível continuar afirmando, como fizemos, que o raio que entra paralelo ao eixo óptico emerge passando pelo foco?

Observando a Fig. 2 a seguir, podemos dizer que essa afirmação é correta se, ao invés de considerarmos que essa mudança de direção ocorre no plano central, dissermos que ela ocorre num ponto imaginário  $H_2$  que é o ponto de interseção dos prolongamentos do raio incidente na primeira superfície e do raio emergente da

segunda superfície. Esse ponto  $H_2$  pertence a um plano imaginário que recebe o nome de plano principal da lente e é perpendicular ao eixo óptico. Nota-se que quanto mais espessa for a lente mais esse plano estará afastado do plano central.

A mesma discussão se aplica para o raio que atinge a lente passando pelo foco e que deve emergir paralelo ao eixo óptico. Na Fig. 2 vemos que essa afirmação pode continuar válida se considerarmos que a mudança total de direção que o raio sofre ao atravessar a lente vai ocorrer num ponto imaginário, que é a interseção dos prolongamentos do raio incidente na primeira superfície e o raio emergente da segunda superfície. Esse ponto é o ponto  $H_1$  que pertence a um outro plano imaginário que também recebe o nome de plano principal da lente. Uma lente espessa tem, portanto, dois planos principais.

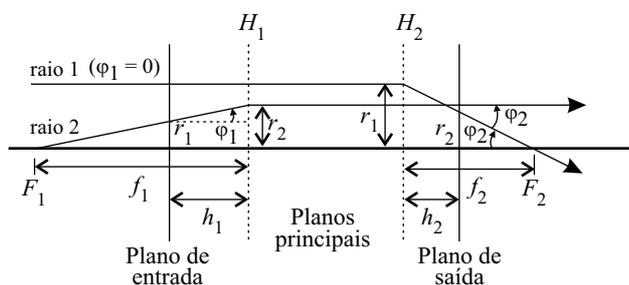


Figura 2 - Esquema da trajetória virtual de dois raios luminosos através de uma lente espessa, [2].

O raio que passa pelo primeiro ponto focal  $F_1$  vai emergir da lente paralelo ao eixo óptico. Um raio incidente paralelo ao eixo óptico que atinja a lente vai emergir dela passando pelo seu segundo ponto focal  $F_2$ . Esses dois raios, raio 1 e raio 2, que estão desenhados na Fig. 2 são chamados de raios principais do sistema óptico. A interseção dos planos principais com o eixo óptico define os pontos principais  $P_1$  e  $P_2$  para esse sistema.

Da mesma forma que para o caso das lentes finas, os pontos focais se encontram sobre o eixo óptico da lente.

Podemos agora definir os demais parâmetros para uma lente espessa:

- a distância  $f_1$  é a distância entre o primeiro ponto focal  $F_1$  e o primeiro plano principal; ela é chamada de primeira distância focal dessa lente;
- a distância  $f_2$  é a distância entre o segundo ponto focal  $F_2$  e o segundo plano principal; ela é chamada de segunda distância focal dessa lente;
- como a lente está imersa num meio isotrópico (o meio tem o mesmo índice de refração de cada lado da lente),  $f_1 = f_2$ ;
- $h_1$  é a distância entre o plano em que o raio atinge a lente, ou plano de entrada e o primeiro plano principal;

- $h_2$  é a distância entre o segundo plano principal e o plano em que o raio emerge da lente, ou plano de saída;
- a distância do objeto ao primeiro plano principal é chamada de  $o$ ;
- a distância da imagem ao segundo plano principal é chamada de  $i$ ;
- cada superfície esférica de uma lente tem um raio de curvatura  $R$ . O raio de curvatura será positivo se a superfície atingida pelo raio luminoso ao se propagar for côncava; e o raio de curvatura será negativo se a superfície atingida pelo raio luminoso em seu caminho for convexa. O raio de curvatura será infinito quando corresponder a uma face plana.

Pode-se construir as matrizes que descrevem essa trajetória virtual. Primeiramente vamos escrever a matriz do raio 1 que começa no ponto  $F_1$  e vai até  $H_1$ . Para esse raio,  $\varphi_2$  é igual a zero, ou seja,

$$r_2 = Ar_1 + B\varphi_1, \quad (5)$$

$$\varphi_2 = Cr_1 + D\varphi_1,$$

onde  $r_1$  é definido como a distância do eixo óptico ao ponto em que o raio atinge o plano de entrada da lente.  $\varphi_1$  é o ângulo que o raio incidente faz com o eixo óptico.  $r_2$  é a distância entre o eixo óptico e o ponto onde prolongamento do raio incidente cruza o primeiro plano principal da lente. Então, de acordo com a Fig. 2 (sempre dentro da aproximação paraxial) temos que

$$r_2 = r_1 + h_1\varphi_1, \quad (6)$$

$$\varphi_2 = Cr_1 + D\varphi_1 = 0,$$

mas, como podemos ver na Fig. 2,

$$\varphi_1 = \frac{r_1}{(f - h_1)}. \quad (7)$$

Por outro lado, para o raio 2,  $\varphi_1$  é igual a zero e sempre estamos trabalhando com a mesma notação para os parâmetros, ou seja,  $r_1$  e  $\varphi_1$  para a entrada e  $r_2$  e  $\varphi_2$  para a saída. Assim, na mesma Fig. 2, temos

$$r_2 = Ar_1, \quad (8)$$

$$\varphi_2 = Cr_1,$$

Deduz-se também que

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f}. \quad (9)$$

De acordo com o formalismo matricial, o elemento  $C$  é igual a  $-(1/f)$ , [2]. Da Eq. (6) podemos escrever

$$Cr_1 = -D\varphi_1, \quad (10)$$

substituindo a expressão (6) e  $C = -(1/f)$  na equação acima, vamos obter

$$h_1 = \frac{D-1}{C}. \quad (11)$$

Analogamente pode-se deduzir que  $h_2$  é dado por

$$h_2 = \frac{A-1}{C}. \quad (12)$$

Portanto, uma vez tendo a matriz de transferência da lente espessa, temos automaticamente as posições de seus dois planos principais, por meio de (11) e (12).

A matriz de transferência para uma lente espessa com espessura  $t$  é formada pelo produto de três matrizes geradas com a aplicação da lei de Snell e escrita com

$$M = M_3 M_2 M_1. \quad (13)$$

onde  $M_1$  é a matriz para a primeira superfície esférica atingida pelo raio luminoso,  $M_2$  é a matriz que descreve o caminho do raio luminoso no meio da lente (espessura  $t$ ), e  $M_3$  é a matriz que representa a segunda interface esférica.

Utilizando a definição de potência  $P$  de uma superfície refratora,  $P = (n-1)/R$  (onde  $R$  é o raio de curvatura da superfície, que se medido em metros fornece a potência  $P$  em  $\text{m}^{-1}$  ou dioptria), a matriz  $M$  fica dada por

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{tP_1}{n} & \frac{t}{n} \\ \frac{tP_1P_2}{n} - P_1 - P_2 & 1 - \frac{tP_2}{n} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Sabemos que a distância focal dessa lente está relacionada ao elemento inferior esquerdo da matriz de transferência, Ref. [2],

$$-\frac{1}{f} = \frac{tP_1P_2}{n} - P_1 - P_2, \quad (15)$$

$$f = \left[ P_1 + P_2 - \frac{tP_1P_2}{n} \right]^{-1}. \quad (16)$$

Sendo  $P_1 = (n-1)/R_1$  e  $P_2 = (1-n)/R_2$ , podemos substituí-los na Eq. (16) para obter a distância focal  $f$  em termos dos raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] + \frac{(n-1)^2}{n} \left[ \frac{t}{R_1R_2} \right]. \quad (17)$$

A espessura da lente é proporcional ao elemento superior direito da matriz de transferência que é  $(t/n)$ , onde  $t$  é, de fato, a espessura da lente.

As distâncias  $h_1$  (do plano de entrada ao primeiro plano principal da lente) e  $h_2$  (do segundo plano principal ao plano de saída da lente) podem agora ser calculadas, por meio das Eqs. (11) e (12) e da matriz de transferência Eq. (14)

$$h_1 = \frac{t}{n \left( 1 + \frac{P_1}{P_2} - t \frac{P_1}{n} \right)}, \quad (18)$$

$$h_2 = \frac{t}{n \left( 1 + \frac{P_2}{P_1} - t \frac{P_2}{n} \right)}. \quad (19)$$

### 3. Não validade da aproximação de lente fina

Normalmente quando se realizam experimentos simples para a determinação da distância focal de lentes convergentes ou divergentes, não se leva em consideração o fato de as mesmas serem espessas, ou seja, considera-se a mesmas como lentes finas. Sendo assim, para a utilização da relação de Gauss, medidas de distância lente-objeto e lente-imagem são em geral realizadas em relação ao centro da lente. Como vimos na seção anterior, para o caso de lentes espessas, na realidade deve-se levar em conta a existência dos planos principais e as distâncias devem ser medidas a partir desses e não a partir do centro. Até que ponto a medida a partir do centro da lente pode prejudicar o resultado final, considerando-se as incertezas experimentais?

Vamos utilizar como exemplo uma lente convergente típica utilizada nos laboratórios didáticos do Instituto de Física da USP em experimentos para determinação de distâncias focais. A lente em questão (fabricada com vidro *crown-leve*) é biconvexa e possui raios de curvatura  $R_1 = -R_2 = 10$  cm e espessura  $t = 1$  cm. Escrevendo-se os elementos da matriz de transferência, de acordo com a Eq. (14) e assumindo um valor médio para o índice de refração como  $n = 1,52$  (luz branca), Ref. [4], temos que

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9658 & 0,6579 \\ -0,1022 & 0,9658 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Com auxílio das expressões (11) e (12), pode-se determinar a posição dos planos principais para essa lente. Nesse caso obtém-se os valores  $h_1 = h_2 = 3,35$  mm. Portanto, os planos principais estão situados a uma distância  $d = 5 - 3,35 = 1,65$  mm do centro da lente. Logo, as distâncias lente-objeto e lente-imagem medidas experimentalmente estão nesse caso 1,65 mm maiores do que deveriam realmente ser. Notamos então que, se dentro das incertezas experimentais, esse valor for significativo, a distância focal obtida experimentalmente não estará corretamente determinada. Vale lembrar que a própria distância focal deve ser medida em relação aos planos principais e não em relação ao centro da lente. De acordo com a matriz  $M$ , tem-se que  $-1/f = -0,1022$ . Portanto, para essa lente  $f = 9,79$  cm, a ser medido a partir da posição dos planos principais, ou seja 9,96 cm em relação ao centro da lente.

Para a obtenção experimental da distância focal, utiliza-se um trilho de alumínio com uma trena (menor divisão de 1 mm) acoplada, sobre o qual coloca-se além da lente convergente, um objeto luminoso (no caso

uma lâmpada incandescente que ilumina uma fenda em forma de cruz revestida com papel vegetal) e um anteparo para projetar a imagem real e invertida (Fig. 3).

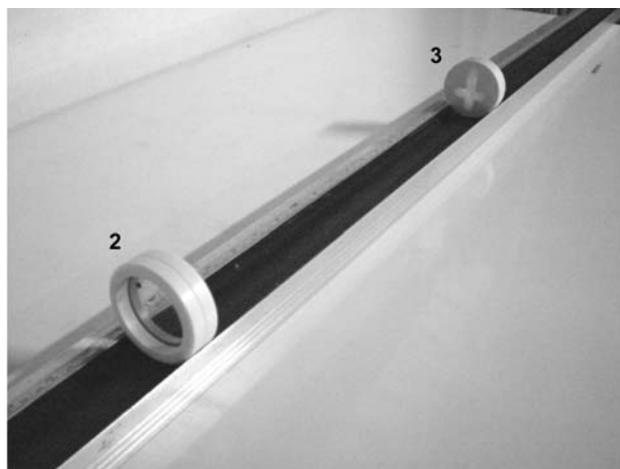
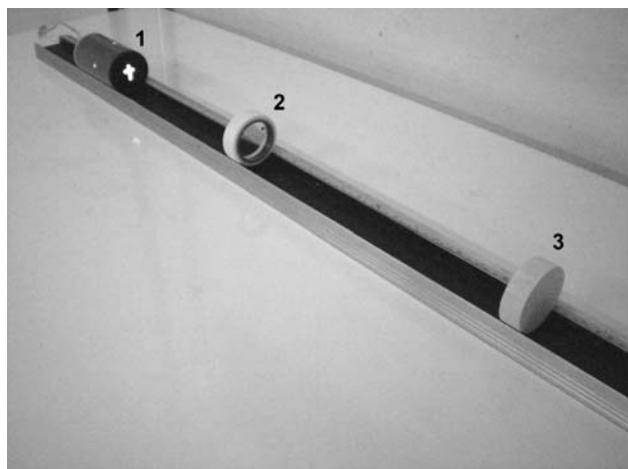


Figura 3 - Fotos mostrando o arranjo experimental utilizado para a medida da distância focal da lente convergente. À esquerda temos uma visão geral do banco óptico mostrando o objeto (1), a lente (2) e o anteparo para projeção da imagem (3). À direita pode-se ver um detalhe da lente (2) e da imagem real e invertida projetada no anteparo (3).

Para vários casos de distância objeto-lente, as respectivas distâncias imagem-lente são determinadas, sendo as medidas realizadas sempre a partir do centro da lente. A posição do objeto é medida na trena uma única vez. A determinação da posição da imagem não é imediata, pois existe uma dificuldade para se definir quando a imagem está corretamente focada no anteparo. Isso se deve essencialmente ao problema de aberração cromática, pelo fato de se utilizar luz branca como objeto. Sendo assim, para cada posição  $o$  do objeto, são realizadas 5 medidas da posição  $i$  da imagem. Foram realizadas 40 medidas de  $i$  e  $o$  e a partir da relação de Gauss  $1/f = (1/o) + (1/i)$ , o resultado experimental é  $f = 9,89 \pm 0,05$  cm. Levando-se em consideração a incerteza experimental, nota-se que quando se realiza um experimento com um número significativo de medidas, o valor obtido não é comparável ao esperado pelo formalismo matricial. Para verificação, subtraímos o valor da distância dos planos principais ao centro da lente de todos os valores medidos e recalculamos o valor de  $f$ . Nesse caso obtém-se  $f = 9,78 \pm 0,05$  cm, compatível com o valor calculado a partir do formalismo matricial. Portanto, nesse caso particular a aproximação de lente fina não é adequada levando-se em conta as incertezas experimentais. Deve-se notar também que se as medidas experimentais fossem realizadas a partir da borda da lente, o erro cometido no caso estudado aqui seria ainda maior, pois nesse caso as distâncias obtidas seriam 3,35 mm menores.

É importante ressaltar que para outras lentes com

espessuras e distâncias focais diferentes, os planos principais podem estar mais próximos do centro da lente, e dentro das incertezas experimentais, a aproximação pode permanecer válida. Como exemplo, podemos citar uma outra lente convergente biconvexa também utilizada nos laboratórios didáticos do Instituto de Física da USP. A lente possui raios de curvatura  $R_1 = -R_2 = 26,5$  cm e espessura  $t = 0,57$  cm. Nesse caso, os valores para os planos principais são  $h_1 = h_2 = 1,88$  mm. Logo, os planos principais estão situados a uma distância  $d = 2,85 - 1,88 = 0,97$  mm do centro da lente, ou seja, significativamente mais próximos do centro quando comparados à lente anterior.

#### 4. Conclusões

Neste trabalho é discutida a validade da aproximação de lente fina em atividades experimentais que envolvem a determinação de distâncias focais com auxílio da relação de Gauss. Para tal é utilizado o formalismo matricial para o estudo de trajetória de raios luminosos através de um sistema de lentes espessas, sendo introduzido o conceito de planos principais. Para o caso de uma lente convergente espessa típica utilizada nos laboratórios didáticos do Instituto de Física da USP, dentro das incertezas experimentais inerentes ao banco óptico utilizado, a aproximação de lente fina mostrou-se inadequada. Entretanto, em medidas com lentes e arranjos experimentais diferentes deve-se ter em mente que nem sempre esse é o caso, sendo importante recorrer

ao conceito de planos principais e suas implicações na determinação experimental correta de distâncias focais.

## Referências

- [1] E. Hecht, *Optics* (Addison Wesley Longman, Inc., Reading, 1998).
- [2] J.H. Moore, C.C. Davis e M.A. Coplan, *Building Scientific Apparatus* (Addison Wesley Publ. Company, MA, 1983).
- [3] A.P. Banford, *The Transport of Charged Particle Beams* (E. & F. Spon Limited, London, 1966), cap. 2.
- [4] The Physics Factbook, Ed. Glenn Elert, <http://hypertextbook.com/facts/2005/JustinChe.shtml>.