

A entropia de Hawking para buracos negros: um exercício de análise dimensional a partir de um texto de divulgação

(Hawking's entropy calculation for black holes: an exercise of dimensional analysis from a divulgation text)

Jenner Barretto Bastos Filho¹ e Roberto Moreira Xavier de Araújo²

¹Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Campus da Cidade Universitária, Maceió, AL, Brasil

²Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Recebido em 12/7/2007; Aceito em 21/8/2007

A expressão matemática da entropia de um fenômeno que seja, a um só tempo, quântico, relativístico e gravitacional deve conter explicitamente a constante de Planck \hbar , a velocidade da luz no vácuo c e a constante da gravitação universal de Newton G . Além disso, a entropia enquanto conceito termodinâmico e estatístico também deve conter explicitamente a constante de Boltzmann k . Partindo dessas idéias diretrizes obtemos a fórmula da entropia de Hawking para buracos negros em N dimensões, lançando mão: (i) dos métodos da análise dimensional; (ii) da conexão entre entropia e informação; e, (iii) do princípio holográfico.

Palavras-chave: entropia de Hawking, análise dimensional, buracos negros.

The mathematical expression of the entropy valid for a quantum, relativistic and gravitational phenomenon must explicitly contain the Planck constant \hbar , the velocity of light in vacuum c and Newton gravitational constant G . Besides this the entropy, as a thermodynamics and statistical concept, must also explicitly contain Boltzmann constant k . Starting from these ideas we are able to calculate Hawking's entropy valid for black holes in N dimensions. In order to calculate Hawking's entropy we use the following ingredients: (i) the methods of dimensional analysis; (ii) the connection between entropy and information; and (iii) the holographic principle.

Keywords: Hawking's entropy, dimensional analysis, black holes.

1. Introdução

A despeito das lacunas, incompletezas e indecidibilidades, que são características inerentes à essencial inegotabilidade do conhecimento, há nas ciências físicas conquistas cognitivas sólidas cuja profundidade e cuja abrangência não parecem pertencer ao mundo da efemeridade e dos modismos.

Inscrevem-se neste contexto fórmulas como as relações de Planck-Einstein $E = h\nu$ e de Broglie $p = h/\lambda$, onde h é a constante de Planck, que são elementos basilares de toda a mecânica quântica, e a relação massa-energia de Einstein $E = Mc^2$, onde c é a velocidade da luz no vácuo, que constitui um dos resultados mais importantes da teoria da relatividade.

Freeman Dyson [1] argumenta que a fórmula de Hawking [2] expressando a relação entre a entropia e a área do buraco negro constitui-se numa dessas fórmulas cujo estatuto, enquanto caráter fundamental é comparável aos estatutos das conquistas que já foram incorporadas como patrimônios sólidos das ciências físicas. Diríamos que um outro exemplo que pode ser aduzido

como pertencente ao estatuto de conquista fundamental do conhecimento humano na esfera da realidade física é o número de Avogadro no contexto da realidade molecular.

O nosso objetivo aqui é o de escrever a fórmula da entropia de Hawking, válida para os buracos negros, como um exercício de análise dimensional a partir de um texto de divulgação do próprio Hawking. Para tal, lançaremos mão: (i) dos métodos gerais da análise dimensional; (ii) da conexão conceitual entre entropia e informação; e, (iii) do princípio holográfico. Os métodos da análise dimensional nos permitem também estender o resultado para o caso de um espaço de N dimensões. Este trabalho constitui uma considerável ampliação de uma breve comunicação sobre o tema [2].

Vejam agora duas citações de Hawking que são excertos de um de seus famosos livros de divulgação:

A entropia é uma medida do número de estados internos (maneiras de se configurar por dentro) que o buraco negro poderia ter sem parecer diferente para um obser-

¹E-mail: jenner@fis.ufal.br.

vador externo, que pode apenas observar sua massa, rotação e carga. Essa entropia do buraco negro é dada por uma fórmula muito simples que descobri em 1974. Ela iguala a área do horizonte do buraco negro: há um bit de informação sobre o estado interno do buraco negro para cada unidade fundamental de área de superfície do horizonte. Isso mostra que há uma relação profunda entre gravidade quântica e a termodinâmica, a ciência do calor (que inclui o estudo da entropia). Indica também que a gravidade quântica pode exibir o que se denomina holografia [3, p. 63-64].

A percepção de que a área de superfície do horizonte em volta do buraco negro mede a entropia do buraco negro levou algumas pessoas a defender que a entropia máxima de qualquer região fechada do espaço nunca pode exceder um quarto da área da superfície que a circunscreve. Como a entropia não passa de uma medida das informações totais contidas em um sistema, isso indica que as informações associadas a todos os fenômenos no mundo tridimensional podem ser armazenadas em seu contorno bidimensional, como uma imagem holográfica. Em certo sentido, o mundo seria bidimensional [3, p. 64].

Nesse livro, Hawking apresenta a sua famosa fórmula para a entropia do buraco negro [3, p. 63].

$$S = \frac{Akc^3}{4\hbar G},$$

onde A é a área de horizonte de eventos do buraco negro, $\hbar = h/2\pi$, k é a constante de Boltzmann e G é a constante gravitacional de Newton.

Ora, seguindo a linha de raciocínio de Dyson, a constante de Planck presente na relação de Planck-Einstein pode ser interpretada como a taxa com a qual energia e frequência se intercambiam. De acordo com tal raciocínio, o quadrado da velocidade da luz no vácuo equivale à taxa com a qual energia e massa se intercambiam; por extensão, a constante de Hawking seria interpretada como a taxa com que entropia e área do horizonte de eventos do buraco negro se intercambiam, ou seja, esta estupenda e colossal taxa de produção de entropia (medida em calorias por grau Kelvin) por cada unidade de centímetro quadrado de área.

Dyson escreveu o seguinte:

Tudo o que podemos afirmar com certeza é que a equação de Hawking é uma pista para o enigma dos buracos negros. De algum modo, podemos estar certos, essa

equação irá emergir como o aspecto central da teoria não nascida que irá unir a gravitação, a mecânica quântica e a termodinâmica [1, p. 32].

2. Obtenção da fórmula de Hawking

Queremos escrever um valor característico para a entropia S de um sistema físico que seja, a um só tempo, *quântico, relativístico, gravitacional e, evidentemente, estatístico e termodinâmico* uma vez que a entropia [4] é uma grandeza física tanto termodinâmica quanto estatística.

Seja \hbar um parâmetro característico fundamental dos sistemas quânticos, c um parâmetro característico fundamental dos sistemas relativísticos, G um parâmetro característico fundamental dos fenômenos exibindo interações gravitacionais, e k um parâmetro característico fundamental dos fenômenos tratados pela física estatística, então a expressão de nossa entropia S representativa e típica desses sistemas físicos exibirá uma forma tal que contenha explicitamente todas essas quatro constantes, o que simbolicamente representamos por

$$S = S(\hbar, c, G, k). \quad (1)$$

Tendo em vista que S e k são grandezas que têm, ambas, a mesma dimensão física de Energia/Temperatura e que as outras três constantes, \hbar , c , e G são expressas em função das unidades fundamentais de comprimento L , de tempo T e de massa M , então a única maneira de eliminar a temperatura na fórmula pesquisada é assumir a relação de “proporcionalidade” direta entre S e k , ou dito mais apropriadamente, a fórmula que estamos pesquisando conterá, necessariamente, a constante de Boltzmann elevada à potência um, ou seja

$$S \sim k. \quad (2)$$

Combinando a Eq. (1) com a Eq. (2) teremos

$$\left(\frac{S}{k}\right) = f(\hbar, c, G). \quad (3)$$

Na Eq. (3), obviamente, ambos os membros são adimensionais e f é uma fórmula na qual comparecem \hbar , c , e G . Se procurarmos uma fórmula tal que,

$$\text{Grandeza adimensional} = f(\hbar, c, G) = \hbar^p c^q G^u, \quad (4)$$

na qual os expoentes p , q e u devem ser procurados e, \hbar , c , e G têm dimensões físicas, respectivamente

$$\hbar = M L^2 T^{-1}; \quad c = L T^{-1}; \quad G = M^{-1} L^3 T^{-2}, \quad (5)$$

então chegaremos à conclusão que tal procedimento nos leva a um resultado trivial e completamente sem interesse, como veremos a seguir. Ao combinar as Eqs. (4) e (5) teremos

$$\begin{aligned} &\text{Grandeza adimensional} = \\ &(ML^2T^{-1})^p(LT^{-1})^q(M^{-1}L^3T^{-2})^u. \end{aligned} \quad (6)$$

Tendo em vista que

$$\text{Adimensional} = L^0T^0M^0, \quad (7)$$

e igualando a Eq. (6) à Eq. (7), o que é o mesmo que igualar os correspondentes expoentes das bases em ambos os membros da expressão resultante, então formamos o seguinte sistema de três equações lineares e três incógnitas

$$\begin{cases} 0 = 2p + q + 3u \\ 0 = -p - q - 2u \\ 0 = p - u, \end{cases} \quad (8)$$

cuja solução trivial $p = q = u = 0$ de nada nos adiantaria, pois não exibiria explicitamente as constantes fundamentais \hbar , c , e G , pois $\hbar^0 = c^0 = G^0 = 1$.

No entanto, se pressupusermos as Eqs. (1) e (2) e, além disso, supusermos, ao invés da Eq. (3) que como vimos leva a um resultado trivial e completamente destituído de interesse, uma relação *ansatz* do tipo

$$\left(\frac{S}{k}\right) L^{-x} = f(\hbar, c, G) = \hbar^y c^z G^w, \quad (9)$$

então obteremos, ao usar a Eq.(5) na Eq. (9) e efetuar os procedimentos usuais da análise dimensional, a expressão

$$T^0 M^0 L^{-x} = (ML^2T^{-1})^y(LT^{-1})^z(M^{-1}L^3T^{-2})^w. \quad (10)$$

Comparando membro a membro os correspondentes expoentes de cada uma das bases, obteremos o seguinte sistema de três equações e quatro incógnitas,

$$\begin{cases} 0 &= -y - z - 2w \\ 0 &= y - w \\ -x &= 2y + z + 3w, \end{cases}$$

que nos permite construir uma relação de recorrência que gera uma família infinita de fórmulas, todas elas, em princípio, aceitáveis e compatíveis com as Eqs. (1), (2) e (9). O sistema leva a

$$\{y = w; \quad z = -3w; \quad x = -2w\}. \quad (11)$$

A partir da Eq. (11), concluímos que se $x = n$, obteremos, $y = -n/2$; $z = 3n/2$; $w = -n/2$, logo a família de fórmulas aceitável e compatível com as Eqs. (1), (2) e (9) será dada por

$$S = L^n k \Lambda^{n/2}, \quad (12)$$

onde

$$\Lambda = \frac{c^3}{\hbar G}. \quad (13)$$

Se $x = 2$, então $y = -1$; $z = 3$ e $w = -1$.

Neste caso, então, a Eq. (9) (ou equivalentemente a Eq. (12) com a definição da Eq. (13)) nos fornecerá

$$S = \frac{L^2 k c^3}{\hbar G}. \quad (14)$$

A fórmula acima, a menos de um fator adimensional que a análise dimensional não pode explicitar, já é a fórmula de Hawking para a entropia do buraco negro. Voltaremos um pouco mais adiante a este assunto onde à luz do conceito de *entropia de informação* e do *princípio holográfico* identificaremos, - dentre a família de infinitas fórmulas possíveis - qual deve ser a fórmula mais aceitável.

Mas a família de fórmulas (12), com a definição (13), compatível com as Eqs. (1), (2) e (9), não se constitui na única família em acordo com a análise dimensional.

Do ponto de vista estrito da análise dimensional e em completa analogia com a Eq. (9), nada nos impede de estudar outro *ansatz* como

$$\left(\frac{S}{k}\right) T^{-a} = g(\hbar, c, G) = \hbar^r c^s G^v. \quad (15)$$

Mutatis mutandis ao que foi realizado para a Eq. (9) obtemos mais uma família de infinitas fórmulas, desta vez em compatibilidade com as Eqs. (1), (2) e (15), família essa que é expressa por

$$S = T^n k \Gamma^{n/2}, \quad (16)$$

onde

$$\Gamma = \frac{c^5}{\hbar G}. \quad (17)$$

Se, além disso, propusermos mais um terceiro *ansatz* compatível com as Eqs. (1) e (2) e dado por

$$\left(\frac{S}{k}\right) M^{-b} = j(\hbar, c, G) = \hbar^t c^m G^p, \quad (18)$$

e novamente, *mutatis mutandis*, obteremos

$$S = M^n k \Omega^{n/2}, \quad (19)$$

onde

$$\Omega = \frac{G}{\hbar c}. \quad (20)$$

Faz-se mister afirmar que, do ponto de vista estrito da análise dimensional, todas as três famílias de infinitas fórmulas, respectivamente as Eqs. (12), (16) e (19), são válidas para quaisquer valores de n pertencentes ao campo real \mathbb{R} ou até mesmo para quaisquer valores de n pertencentes ao campo complexo \mathbb{C} , onde $n = \alpha + \beta i$, e α e β são números pertencentes ao campo \mathbb{R} dos reais e $i = (-1)^{1/2}$.

A demonstração disso é simples e direta. Para tal, basta que sigamos os seguintes passos: (a) passemos a

constante de Boltzmann k para o denominador do primeiro membro de cada uma das fórmulas (12), (16) e (19) e; (b) verifiquemos que ambos os membros das correspondentes expressões resultantes são adimensionais para quaisquer que sejam os valores de n independentemente se pertencem ao campo dos números reais ou ao campo dos números complexos.

Além das famílias de infinitas fórmulas respectivamente (12), (16) e (19), todas elas compatíveis com os pressupostos (1) e (2), nada nos impede de estudar a validade, ou não, de outro *ansatz* contendo outras combinações possíveis. No entanto, essas três famílias de infinitas fórmulas possíveis, respectivamente (12), (16) e (19), já são suficientes para os nossos propósitos aqui.

À luz dos textos de Hawking exibidos acima e do exposto sobre a análise dimensional é mais do que natural interpretarmos que apenas um dentre os três conjuntos, cada um deles de infinitas fórmulas, seja compatível com a associação do conceito de *entropia* ao de *informação* mediada pelo princípio holográfico. Segundo este último princípio, os pontos da superfície de um corpo tridimensional podem ser mapeados - como o resultado de uma interferência - e gravados em células de uma superfície bidimensional.

Ora, nem o conjunto da Eq. (16) nem o conjunto da Eq. (19) são boas escolhas para este mapeamento. Isso porque *nem tempo nem massa* constituem-se em conceitos adequados para a aplicação do princípio holográfico.

Tendo em vista isto, o conjunto da Eq. (12) é o mais adequado. Como se trata de um mapeamento numa superfície holográfica bidimensional a escolha

$$n = 2, \quad (21)$$

parece-nos ser a mais adequada e conveniente. Assim discriminamos a fórmula (14) dentre a infinidade de fórmulas possíveis ensejadas pela relação de recorrência (12).

Agora, para que o conjunto de pontos de uma superfície disposta em um espaço tridimensional seja a expressão de uma entropia de informação mapeada numa superfície bidimensional plana, é conveniente evocar o exemplo da superfície de uma esfera de área A ,

$$A_{\text{esfera}} = 4\pi R^2, \quad (22)$$

onde R é o raio da esfera.

A área de um círculo máximo da esfera (que é a área do disco visível da esfera) é dada por

$$A_{\text{círculo máximo da esfera}} = \pi R^2 \quad (23)$$

A razão entre as Eqs. (23) e (22) é a razão entre a área do mapeamento e a área mapeada; esta razão é igual a $1/4$.

$$\frac{\text{Área do círculo máximo da esfera}}{\text{Área da superfície esférica}} = \frac{1}{4}. \quad (24)$$

Este é o fator adimensional que deve aparecer explicitamente na fórmula. Evidentemente, ele é *ad hoc* em relação aos métodos da análise dimensional, mas ele parece ser um fator natural a comparecer na fórmula se intervirmos na nossa análise o conceito de *entropia* associado à *informação* (não subjetiva) e o *princípio holográfico*. Em outras palavras, ao associarmos o conceito de entropia ao de informação e os relacionarmos ao princípio holográfico, a fórmula da entropia sem o fator $1/4$ constitui uma redundância, ou seja, apareceria o quádruplo da informação devida.

A fórmula resultante, a mais aceitável e compatível com as Eqs. (1), (2) e com o conceito de *entropia de informação* e com o *princípio holográfico* é, portanto,

$$S = \frac{1}{4} \frac{L^2 k c^3}{\hbar G}. \quad (25)$$

Para

$$A = L^2 \quad (26)$$

torna-se idêntica à fórmula de Hawking,

$$S_{\text{Hawking}} = \frac{1}{4} \frac{A k c^3}{\hbar G}. \quad (27)$$

Façamos agora uma avaliação em termos de ordem de grandeza. Tomemos os seguintes valores correspondentes às grandezas físicas fundamentais aqui referidas: $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ J.s; $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/grau Kelvin; $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m²/kg² e $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Se escrevermos a fórmula (27) na forma

$$S_{\text{Hawking}} = C_{\text{Hawking}} A, \quad (28)$$

então

$$C_{\text{Hawking}} = \frac{1}{4} \frac{k c^3}{\hbar G}. \quad (29)$$

Tendo em vista os valores numéricos acima, ficamos com

$$\begin{aligned} C_{\text{Hawking}} &\approx 4,4 \times 10^{45} \text{ J}/(\text{grau Kelvin} \times \text{m}^2) \\ &= 4,4 \times 10^{41} \text{ J}/(\text{grau Kelvin} \times \text{cm}^2). \end{aligned}$$

Tendo em vista que 1 cal = 4,18 J, então podemos escrever alternativamente,

$$C_{\text{Hawking}} \approx 10^{41} \text{ cal}/(\text{grau Kelvin} \times \text{cm}^2).$$

A constante de Hawking acima representa uma produção de entropia por centímetro quadrado realmente espantosa e superior, em muitas ordens de grandeza, aos valores típicos para sistemas físicos mais habituais. Isso revela que a própria associação de grandezas físicas envolvendo as constantes k , \hbar , c e G implica esses valores colossais. A associação dessas constantes expressa um fenômeno físico que recebe o nome de *buraco negro*.

3. Crítica ao procedimento acima

Aduziríamos o seguinte comentário crítico aos nossos procedimentos. Perguntaríamos a propósito:

Ora, se os métodos da análise dimensional não são capazes de explicitar a constante adimensional que aparece na fórmula da entropia, então que sentido faria procurar justificar o fator $1/4$, uma vez que a constante adimensional advinda de um método teórico mais rigoroso e informativo pode nos fornecer um valor maior ou menor que $1/4$?

A crítica é, de fato, pertinente, pois pressupusemos que essa constante adimensional seja da ordem de grandeza muito próxima da unidade, mas, de fato, esse pressuposto pode não se verificar e, conseqüentemente, a nossa avaliação da entropia pode variar de algumas poucas ordens de grandeza. Contudo, não é irrelevante o exercício de análise dimensional pois, para qualquer valor numérico a conexão entre os conceitos de entropia, informação e o princípio holográfico nos instrui, ao seguirmos os argumentos de Hawking, que o fator multiplicativo $1/4$ deve aparecer para eliminar a redundância, pois o valor calculado foi correspondente a um valor quádruplo daquele devido.

4. Cálculo da entropia de Hawking para um espaço N -dimensional

Nesta seção, nos inspiramos no princípio heurístico de Gaston Bachelard [5] que justifica a sua epistemologia da complexidade no confronto com a epistemologia cartesiana da simplicidade: o simples é muito melhor compreendido através do complexo. Isso ilustra bem mais as relações sobre o próprio simples² (ver discussão na Ref. [6]).

Podemos generalizar o cálculo acima para um espaço N -dimensional (ver os métodos utilizados em ensaios anteriores [7, 8]). Aqui, nos ateremos ao número real N positivo, se bem que do ponto estrito da análise dimensional o procedimento também é válido para um número complexo N .

Como a constante de Planck \hbar e a velocidade da luz c não dependem de lei de força, então as suas respectivas dimensionalidades físicas são as mesmas independentemente de dimensionalidade do espaço. No entanto, tal não se dá para a constante G que depende de lei de força. Para um espaço N -dimensional a lei de força³ em função do afastamento d de uma massa pontual é dada por $F \sim d^{-N+1}$ o que acarreta que G depende

explicitamente de N e o valor contido na fórmula (5) tem que ser alterado. Neste caso as dimensionalidades de \hbar , c e G serão, respectivamente,

$$\hbar = M L^2 T^{-1}; c = L T^{-1}; G(N) = M^{-1} L^N T^{-2}. \quad (30)$$

Evidentemente, quando $N = 3$, teremos a situação do espaço tridimensional $G(3)$ que na notação das seções precedentes equivale a $G \equiv G(3)$.

Faz-se mister dizer que a constante k , que é uma constante termodinâmica, também mantém a sua dimensionalidade física independentemente de dimensionalidade do espaço. Evidentemente, as Eqs. (1) e (2) continuam a valer.

Adotando um procedimento, inteiramente análogo ao realizado até então, tipo *mutatis mutandis*, as expressões anteriores, respectivamente, (9) correspondente ao primeiro *ansatz*, (15) correspondente ao segundo *ansatz* e (18) correspondente ao terceiro *ansatz* darão lugar às expressões, respectivamente,

$$\left(\frac{S}{k}\right) L^{-n} = f(\hbar, c, G(N)) = \hbar^y c^z [G(N)]^w \quad (31)$$

$$\left(\frac{S}{k}\right) T^{-n} = g(\hbar, c, G(N)) = \hbar^r c^s [G(N)]^v \quad (32)$$

$$\left(\frac{S}{k}\right) M^{-n} = j(\hbar, c, G(N)) = \hbar^t c^m [G(N)]^p, \quad (33)$$

onde n , y , z , w , r , s , v , t , m e p são expoentes que deverão ser calculados.

A partir da expressão (31) podemos escrever

$$T^0 M^0 L^{-n} = (M L^2 T^{-1})^y (L T^{-1})^z (M^{-1} L^N T^{-2})^w. \quad (34)$$

Comparando membro a membro os expoentes das bases correspondentes, obtemos o seguinte sistema de 3 equações e 4 incógnitas

$$\begin{cases} -y - z - 2w = 0 \\ y - w = 0 \\ 2y + z + Nw = -n, \end{cases}$$

cujas soluções requer as relações de recorrência

$$y = w; z = -3w; n = -(N - 1)w,$$

ou explicitando de forma exatamente equivalente,

$$y = \frac{-n}{(N - 1)}; z = \frac{3n}{(N - 1)}; w = \frac{-n}{(N - 1)},$$

que substituídos na Eq. (31) nos fornecem

$$S = L^n k(\Lambda(N))^{n/(N-1)}, \quad (35)$$

²Bachelard se refere ao exemplo do átomo de hidrogênio que é o mais simples. Ele assevera que a compreensão do átomo de hidrogênio, que é o átomo mais simples, é tanto maior quando estudamos os átomos complexos. Em outras palavras, o estudo do complexo ilumina relações sobre o simples que não seriam vistas se nos ativéssemos apenas ao simples.

³Poder-se-ia aduzir que este argumento é restrito ao contexto newtoniano e deste modo não se justificaria do ponto de vista do cálculo de uma grandeza relativista como a entropia de Hawking para o buraco negro. No entanto, do ponto de vista da análise dimensional, o argumento é igualmente válido quer se trate do contexto newtoniano, quer se trate do contexto relativista.

onde

$$\Lambda(N) = \frac{c^3}{\hbar G(N)}. \quad (36)$$

Reparemos que para $N = 3$ (espaço tridimensional) as fórmulas, respectivamente (35) e (36) darão lugar às fórmulas, respectivamente, (12) e (13), pois, como vimos o nosso $G(3)$ desta seção é exatamente igual ao G das seções anteriores. No caso em que os conceitos de entropia e de informação estejam conectados com o princípio holográfico, teremos as escolhas: $N = 3$, correspondente ao espaço tridimensional, e $n = 2$ correspondente à projeção holográfica.

Por uma questão de completeza, o leitor poderá muito facilmente verificar que para o segundo *ansatz*, dado pela Eq. (32), teremos, *mutatis mutandis*, as expressões correspondentes

$$S = T^n k [\Gamma(N)]^{n/N-1} \quad (37)$$

$$\Gamma(N) = \frac{c^{N+2}}{\hbar G(N)}. \quad (38)$$

Como podemos verificar, as expressões (37) e (38), respectivamente, dão vazão às expressões (16) e (17), respectivamente, para $N = 3$.

Relativamente ao terceiro *ansatz*, dado pela Eq. (33), teremos, *mutatis mutandis*, as expressões correspondentes

$$S = M^n k [\Omega(N)]^{n/N-1} \quad (39)$$

$$\Omega(N) = \frac{G(N)c^{N-4}}{\hbar^{N-2}}. \quad (40)$$

Como podemos facilmente verificar, as expressões (39) e (40) dão vazão às expressões, respectivamente, (19) e (20) para $N = 3$.

Um resultado que nos parece relevante, e que foi obtido a partir desta abordagem, é que para $N = 1$ todas as fórmulas da entropia se transformam em uma singularidade matemática. Isso nos leva forçosamente à conclusão de que não faz sentido se falar em entropia de um sistema unidimensional que seja, a um só tempo, quântico, relativístico e gravitacional na base $\{\hbar, c, G\}$.

Uma crítica que pode ser aduzida a esta abordagem é análoga àquela a qual nos referimos na seção 3 deste artigo. Além disso, há um possível agravante, pois um mapeamento holográfico de um espaço N -dimensional em um espaço $(N - 1)$ dimensional pode implicar em uma constante adimensional que contenha explicitamente a dimensionalidade N e isto pode implicar em alguma informação adicional sobre singularidades das dimensões do espaço. Uma investigação deste ponto requereria métodos matemáticos mais rigorosos e sofisticados do que aqueles até então empregados e não serão considerados aqui.

5. Comentários finais e conclusões

Resultado relevante aqui nesta abordagem é que a simples associação de quatro constantes fundamentais, a saber, \hbar , c , G e k , nos garante que o fenômeno seja, a um só tempo, quântico, relativístico, gravitacional e termodinâmico. Isso permite-nos concluir que, uma vez válida a associação entre os conceitos de entropia, informação e o princípio holográfico, então essa associação somente é possível numa faixa de energia estupefa e colossal tal como a que foi explicitada acima, ou seja, num domínio de muitas e muitas ordens de grandeza acima daquele correspondente a quaisquer outros fenômenos com os quais estamos habituados.

Outra característica a nosso ver relevante do trabalho diz respeito à questão da dimensionalidade do espaço. Nas seções precedentes, não foi necessário pressupor um espaço de dimensões extras maiores do que três a fim de que obtivéssemos a fórmula da entropia de Hawking. Na nossa abordagem, tudo se passa num *espaço tridimensional* onde vale o princípio holográfico. Nesse sentido estrito, - uma vez que as informações objetivas relativas a pontos que se situam em uma superfície presente num espaço tridimensional podem ser mapeadas numa superfície holográfica bidimensional - então o universo poderá ser considerado, pelo menos para esses propósitos, como sendo bidimensional.

Como último comentário neste artigo, daremos ênfase à importância do ensino da análise dimensional nos currículos de física. A importância e a abrangência da análise dimensional não se circunscrevem apenas ao fato deste capítulo da física constituir-se em um bom controle das fórmulas matemáticas que aparecem nas teorias físicas. Argumentamos que, quando em associação com conteúdos relevantes oriundos de outros ramos da física, a análise dimensional pode propiciar um formidável atalho a cálculos que seriam muito difíceis se fossem feitos à luz de teorias mais rigorosas e complexas. Tal circunstância, asseveramos com todas as letras, constitui expediente pedagógico de não desprezível relevância, pois permite interpretar um texto de divulgação que urge ser esclarecido.

Temos a convicção de que este trabalho pode ensejar discussões proveitosas para estudantes, professores e pesquisadores.

Referências

- [1] F. Dyson, *Infinito em Todas as Direções (Do Gene à Conquista do Universo)* (Editora Best Seller, São Paulo, 1988).
- [2] J.B. Bastos Filho e R.M. Xavier de Araújo, *Atas do XX Encontro de Físicos do Norte e Nordeste*, v. único (2002), p. 27.
- [3] S. Hawking, *O Universo numa Casca de Noz* (Editora Mandarim, São Paulo, 2002).

- [4] L. Landau and E. Lifchitz, *Physique Statistique* (Editions Mir, Moscou, 1967).
- [5] G. Bachelard, *Le Novel Esprit Scientifique* (Presses Universitaires de France, Paris, 1934).
- [6] J.B. Bastos Filho, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **25**, 125 (2003).
- [7] J.B. Bastos Filho e R.M. Xavier de Araújo, *Scientia* **4**, 7 (1993).
- [8] J.B. Bastos Filho e R.M. Xavier de Araújo, in *Advances in Fundamental Physics*, editado por M. Barone and F. Selleri (Hadronic Press, Palm Harbor, 1995), p. 11-22.