

Osciladores forçados: harmônico e paramétrico

(Damping forced oscillator: harmonic and parametric)

Vicente Pereira de Barros¹

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil

Recebido em 19/6/2007; Aceito em 13/8/2007

O objetivo deste trabalho é mostrar como uma análise comparativa das várias técnicas de resolução de equações diferenciais pode ser uma importante ferramenta didática no aprendizado de ressonância em mecânica. São estudados os osciladores harmônico e paramétrico forçados pelo método da variação dos parâmetros e pelo método de Green. A importância de suposições a priori na resolução de equações diferenciais também é discutida.

Palavras-chave: oscilações mecânicas, ressonância, métodos matemáticos aplicados à física.

The goal of this work is show how the comparative study of several techniques to solve differential equations can be a important teaching tool in the learning of a mechanical resonance phenomenon. The forced damped harmonic and parametric oscillator are studied by method of variation of parameters and Green's method. The importance of a priori suppositions is also discussed.

Keywords: mechanical oscillations, resonance, applied mathematical methods in physics.

1. Introdução

O estudo de oscilações em mecânica é muito importante tanto para a formação matemática do estudante quanto para resolução de problemas do dia-a-dia nas mais diversas áreas.

Um tópico muito interessante em oscilações é o fenômeno da ressonância que é um comportamento diferente do oscilador quando é aplicada uma frequência específica. Nos cursos de mecânica da graduação é comum o estudo de osciladores harmônicos, forçados, amortecidos e até mesmo acoplados. Com menor frequência são estudadas as oscilações paramétricas e suas aplicações, nos cursos de pós-graduação, por exemplo, é utilizada como exemplo para uma visão geral de caos [1].

O estudo do oscilador harmônico apresenta uma ampla faixa de aplicações pedagógicas, um oscilador harmônico em um trilho de correr pode apresentar diversos limites da fenomenologia das oscilações [3]. O oscilador harmônico forçado estudado à luz do teorema trabalho-energia pode prover um excelente trabalho de aprendizado com ferramentas computacionais [4].

O clássico oscilador harmônico que oscila em uma frequência característica ao ser perturbado por uma força oscilante com a mesma frequência característica do oscilador apresentará oscilações onde a amplitude

das oscilações aumentarão linearmente com o tempo [2], quando se tem esta situação o oscilador está em ressonância. Este fenômeno é muito útil, um exemplo é a quebra da ponte sobre o estreito de Tacoma, um caso de ressonância.

O estudo das oscilações também é uma interessante aplicação de métodos matemáticos na física. O oscilador harmônico amortecido ou forçado solucionado pelo método de Green apresenta um interessante exemplo físico do uso deste método [5].

As oscilações paramétricas surgem em um sistema onde um dos parâmetros do oscilador varia com uma determinada coordenada. Em circuitos ocorre oscilações paramétricas quando um dos parâmetros do sistema, a capacitância, varia com o tempo periodicamente [6]. Em física de partículas os campos são descritos por equações diferenciais nas quais a ressonância paramétrica funciona como um mecanismo de produção de matéria [7]. Em sólitons formados em condensados de Bose-Einstein ocorre ressonância paramétrica na distância relativa entre dois sólitons para a oscilações no potencial de armadilhamento do condensado [8].

O teorema de Floquet que é um importante resultado teórico no estudo das oscilações paramétricas e pode ser usado de maneira didática com demonstrações simples como um pêndulo paramétrico [9].

Os métodos de resolução de equações diferenciais

¹E-mail: vpbarros@if.usp.br.

aplicados ao estudo de ressonâncias são muito variados. Nos cursos de mecânica da graduação muitas vezes os métodos de resolução são apresentados sem uma comparação entre suas vantagens e limitações. Diante desta falha muitas vezes o aluno não sabe até que ponto seu conhecimento é aplicável na resolução de problemas práticos e qual técnica utilizar em sua pesquisa científica por exemplo.

Desta forma muitas vezes os métodos são “decorados” para a prova resultando em um conhecimento com fim no próprio ambiente escolar [10].

Neste trabalho o oscilador harmônico sob a ação de uma força periódica é tratado pelos métodos da variação dos parâmetros e Green, as vantagens e limitações de cada método são discutidas, posteriormente de forma semelhante o oscilador paramétrico forçado é resolvido. A discussão sobre o uso de suposições em física também é levantada.

2. O oscilador harmônico

Qualquer sistema sob a ação de uma força restauradora pode ser descrito como um oscilador harmônico. Imagine um corpo ligado à uma mola de constante k como ilustra a Fig. 1. A equação de movimento pode ser escrita por

$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, que é conhecida como frequência natural do oscilador.

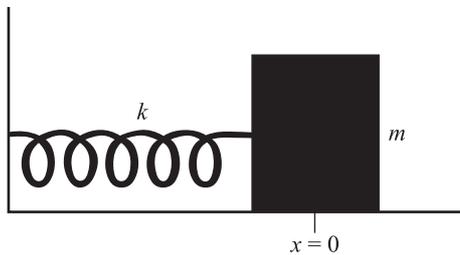


Figura 1 - Ilustração de um oscilador harmônico

Quando este corpo é submetido a uma força externa $f(t)$ a Eq. (1) é modificada para

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t), \quad (2)$$

onde $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Este problema é muito importante pois descreve o comportamento de vários fenômenos da natureza do cristal que vibra em uma determinada frequência a ponte que balança com a marcha de um pelotão de soldados, todos são fenômenos de oscilações forçadas por forças externas. Naturalmente a escolha de uma força $f(t)$ periódica está associada ao fato de ser mais fácil o tratamento do problema além de que muitos fenômenos na natureza são periódicos.

Pelo estudo de equações diferenciais sabe-se que a solução completa do problema é a soma das soluções

homogênea e particular $x(t) = x_p + x_h$, a solução homogênea é a solução da Eq. (1) e a solução particular é a solução da Eq. (2) [11].

Encontrar a solução da equação homogênea é a parte mais simples, o problema consiste em se encontrar a solução da particular. Uma forma mais comum usada para explicar este problema [12] é supor que a solução particular $x_p(t)$ seja oscilante como a força, no entanto, não se sabe a sua amplitude, em função disto um parâmetro é usado para ajustar a solução.

Assim, supondo $x_p(t) = C \cos(\omega t)$ onde C é o parâmetro a ser ajustado, substituindo na Eq. (2), será encontrado

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(\omega^2_0 - \omega^2)} \cos(\omega t), \quad (3)$$

Usando as condições iniciais de que o corpo está em repouso ($\dot{x}(0) = 0$) no momento em que se inicia a ação da força e que a posição inicial do corpo é conhecida (x_0) tem-se a seguinte expressão para a solução completa

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{(\omega^2_0 - \omega^2)} \left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) \right], \quad (4)$$

Para o caso particular em que a frequência de oscilação da força é igual a frequência natural do oscilador ($\omega = \omega_0$), ocorre a ressonância, para resolver a singularidade que se forma no denominador do segundo termo da Eq. (4), pode-se denominar a quantidade $\Delta\omega = (\omega - \omega_0)$ resultando em

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{F_0}{\Delta\omega(\omega_0 + \omega)} \left[\cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t] - \cos(\omega_0 t) \right], \quad (5)$$

usando a definição de derivada o segundo termo é associado a derivado com relação à ω_0 e obtém-se

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t), \quad (6)$$

Ou seja, a amplitude das oscilações aumenta linearmente na situação que o sistema é forçado por uma frequência ressonante.

Pode-se ter uma visão um pouco mais crítica deste método, muitas vezes os alunos questionam a suposição de que a solução deve variar com a mesma frequência que a força, no entanto, se o professor não dispõe de um laboratório para mostrar-lhes que experimentalmente verifica-se este comportamento os alunos ficam sem alternativas para compreender a pertinência desta suposição. No entanto, como estratégia pode-se utilizar outra método de resolução.

O método da variação das constantes é um método muito utilizado para resolução de sistemas de equações diferenciais lineares de segunda ordem [13]. O método

consiste em supor que a solução particular da equações é composta por constantes que variam lentamente no tempo e são dadas por

$$x_p = a(t)x_1 + b(t)x_2,$$

onde x_1 e x_2 são componentes da solução homogênea.

Pode-se escrever a equação diferencial como

$$Lx = g(t), \tag{7}$$

onde L é um operador linear e $g(t)$ uma função qualquer dependente do tempo

Para encontrarmos as constantes $a(t)$ e $b(t)$ necessitamos resolver sistema de equações

$$\begin{aligned} a'x_1 + b'x_2 &= 0, \\ a'x'_1 + b'x'_2 &= g(t), \end{aligned} \tag{8}$$

é conhecido que $x_1 = \cos(\omega_0 t)$ e $x_2 = \sin(\omega_0 t)$, a' e b' denotam as derivadas temporais de a e b respectivamente.

Resolvendo o sistema encontra-se a' e b' e integrando-os obtém-se

$$a = \frac{F_0}{2\omega_0} \left[\frac{\cos[(\omega_0 + \omega)t]}{(\omega_0 + \omega)} + \frac{\cos[(\omega_0 - \omega)t]}{(\omega_0 - \omega)} \right], \tag{9}$$

$$b = \frac{F_0}{2\omega_0} \left[\frac{\sin[(\omega_0 + \omega)t]}{(\omega_0 + \omega)} + \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t]}{(\omega_0 - \omega)} \right]. \tag{10}$$

Finalmente a solução particular é encontrada

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{F_0}{2\omega_0} \left[\frac{\cos[(\omega_0 + \omega)t]}{(\omega_0 + \omega)} \cos(\omega_0 t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos[(\omega_0 - \omega)t]}{(\omega_0 - \omega)} \cos(\omega_0 t) + \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)t]}{(\omega_0 + \omega)} \sin(\omega_0 t) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t]}{(\omega_0 - \omega)} \sin(\omega_0 t) \right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Com algumas manipulações fundamentais de trigonometria encontraremos a mesma expressão para a solução particular apresentada na expressão (3). Este método apresenta a vantagem de que escolha da solução não necessita que o aluno pressuponha uma solução, que inicialmente durante o processo de aprendizagem é desconfortável. No entanto, o processo é mais trabalhoso e deve ser alertado que as dificuldades do método será tanto maior quanto mais difícil de ser integrada a função $g(t)$.

Na verdade continua-se usando o conhecimento das equações homogêneas. Nesta mesma linha, outro método interessante na resolução deste problema é o método de Green que consiste na solução da equação diferencial por meio das funções de Green [5, 14]. O método operacional é obtido a partir da equação diferencial linear

$$Lx(t) = S(x, t), \tag{12}$$

onde S é uma função dada que é denominada de fonte e $x(t)$ é a função procurada, note que S pode depender ou não da própria variável x . Denomina-se função de Green do operador linear L , a função $G(t - t')$ tal que

$$LG(t - t') = \delta(t - t').$$

Neste problema tem-se $G(t - t') = (1/\omega_0)\text{sen}[\omega_0(t - t)]$ e $S(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$. Fazendo a primeira integração da função de Green encontra-se

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t) + \\ &\quad \frac{F_0}{\omega_0} \int_0^t \sin[\omega_0(t - t')] \cos(\omega t') dt', \end{aligned} \tag{13}$$

que resulta na expressão (4) como esperado. Note que neste problema temos a dificuldade das integrais que mais uma vez dependem da forma da fonte. Novamente descobrir a forma da função de Green é necessário entender e resolver a equação homogênea.

3. O oscilador paramétrico

No caso em que um parâmetro do oscilador varia temporalmente ocorre o fenômeno de oscilação paramétrica, em mecânica casos clássicos de osciladores paramétricos são os pêndulos com comprimento variável e com ponto de suspensão oscilante.

A equação de movimento nestes sistemas é a equação de Mathieu, dada por

$$\ddot{x} + \omega^2_0 [1 + \eta \cos(\omega t)] x = 0, \tag{14}$$

onde $\eta \ll 1$.

Landau [15] resolve o problema para pequenas oscilações supondo que a solução é uma combinação das soluções de um oscilador harmônico simples com coeficientes dependentes, resultando em $x = a(t) \cos[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + b(t) \sin[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t]$, onde ε é um desvio da frequência natural do oscilador. Substituindo esta expressão na Eq. (14), supondo que os coeficientes variam lentamente, tal que, $\ddot{a} \approx \varepsilon a$ e $\ddot{b} \approx \varepsilon b$ e sempre $\varepsilon \ll 1$. Obtemos

$$\begin{aligned} &\left[\varepsilon \dot{b} - 2 \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \dot{a} - (\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})^2 b \right] \sin[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + \\ &b \omega^2_0 [1 + \eta \cos(\omega t)] \sin[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + \\ &\left[\varepsilon \dot{a} - 2 \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \dot{b} - (\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})^2 a \right] \cos[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + \\ &a \omega^2_0 [1 + \eta \cos(\omega t)] \cos[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Neste instante é suposto que a frequência da perturbação ω é o dobro da frequência fundamental do oscilador ω_0 , usando algumas relações trigonométricas

e desprezando termos da ordem de $3(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})$ e após um certo trabalho de manipulação encontra-se

$$\begin{aligned} & - \left[2\dot{a} + \varepsilon b + \frac{\eta\omega_0}{2} b \right] \omega_0 \sin[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + \\ & \left[2\dot{b} - \varepsilon a + \frac{\eta\omega_0}{2} a \right] \omega_0 \cos[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Os termos que multiplicam os senos e cossenos devem se anular resultando nas seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{a} + \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{\eta\omega_0}{2} \right) b &= 0, \\ \dot{b} + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta\omega_0}{2} - \varepsilon \right) a &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

É relativamente simples determinar as expressões para os coeficientes, que são do tipo $a(t) = a_0 e^{\sigma t}$ e $b(t) = b_0 e^{\sigma t}$ e determina-se σ tal que

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\eta\omega_0}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]. \quad (18)$$

A condição de ressonância paramétrica é que σ seja real (σ^2 maior do que zero). Assim, a ressonância paramétrica ocorre no intervalo

$$-\frac{\eta\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{\eta\omega_0}{2}$$

em torno da frequência $2\omega_0$. Esta é a região de estabilidade da solução, isto quer dizer para quais valores de frequência de oscilações de (ω) esta solução ainda é válida.

Se a Eq. (14) é chamada de uma equação homogênea a sua solução será

$$x_h(t) = e^{\sigma t} \left[a_0 \cos[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] + b_0 \sin[(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t] \right], \quad (19)$$

onde a_0 e b_0 sendo constantes.

Reenfatizo que esta é uma aproximação para pequenas oscilações, podendo ser extrapolada para valores maiores de oscilações usando cálculo numérico [6].

Na verdade a escolha de $\omega = 2\omega_0 + \varepsilon$ foi feita pois nesta condição o aumento da amplitude é mais evidente. Arnold [16] mostra que esta região pode ser determinada por um tratamento matricial da soluções homogêneas. O teorema de Floquet leva em conta qualquer perturbação temporal da frequência do oscilador, que vai além da equação de Mathieu, o tratamento matricial torna mais simples o estudo das regiões de estabilidade das equações [9].

Pode-se tomar agora o caso de um oscilador paramétrico forçado, dado por

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + \eta \cos(\omega t)] x = F_0 \cos(\omega_f t). \quad (20)$$

Primeiramente trata-se o caso em que ocorre a máxima amplitude e a força que perturba o oscilador tem a mesma frequência de oscilação do parâmetro ($\omega = 2\omega_0 = \omega_f$). Para encontrar a solução particular pode-se empregar o método das variações dos parâmetros usando as soluções da equação homogênea (19) e obter

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} \left[\frac{3\omega_0 \cos(2\omega_0 t) + \sigma \sin(2\omega_0 t)}{(9\omega_0^2 + \sigma^2)} - \frac{\omega_0 \cos(2\omega_0 t) + \sigma \sin(2\omega_0 t)}{(\omega_0^2 + \sigma^2)} \right]. \quad (21)$$

Note que a solução particular não possui uma taxa de crescimento exponencial. Usando a condição inicial de $x(t=0) = x_0, dx/dt(t=0) = 0$, as constantes a_0 e b_0 são dadas por

$$a_0 = x_0 - \frac{F_0}{2} \left[\frac{3}{(9\omega_0^2 + \sigma^2)} - \frac{1}{(\omega_0^2 + \sigma^2)} \right], \quad (22)$$

$$b_0 = -\frac{\sigma}{\omega_0} \left\{ x_0 - \frac{F_0}{2} \left[\frac{1}{(9\omega_0^2 + \sigma^2)} + \frac{1}{(\omega_0^2 + \sigma^2)} \right] \right\}. \quad (23)$$

Para se ter uma comparação desta solução, foram realizados cálculos numéricos usando Runge-Kutta de quarta ordem [14] e são apresentados na Fig. 2 os resultados das soluções analíticas e numéricas para a situação homogênea e a forçada.

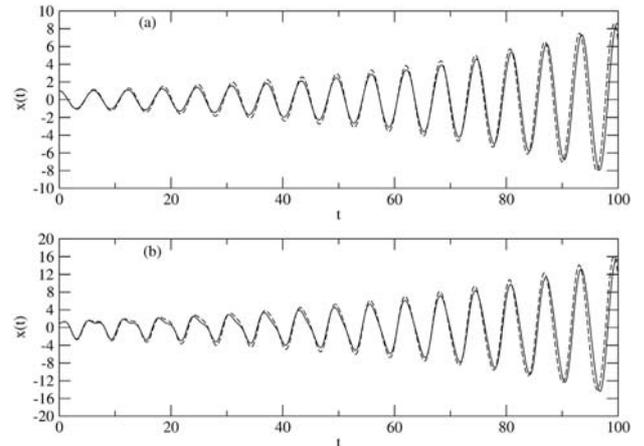


Figura 2 - Gráfico das soluções para a ressonância paramétrica. (a) homogêneas, cálculo numérico linha contínua, Eq. (19) com $\varepsilon = 0.025$ linha tracejada. (b) Sistema forçado com uma força de intensidade $F_0 = 2.5$, cálculo numérico linha contínua, Eqs. (21) e (23) com $\varepsilon = 0.025$ linha tracejada.

Pode-se perceber pela Fig. 2 que o oscilador ao ser forçado, a princípio apresenta uma competição entre o termo oscilatório particular que é estacionário e o termo exponencial da solução harmônica, que é caracterizado pelos dois modos nos tempos iniciais das oscilações. Posteriormente a parte homogênea acaba por dominar o comportamento da solução. Ocorre um bom acordo entre a solução analítica e o cálculo numérico.

Para o caso em que o parâmetro oscilante oscila com uma frequência igual a frequência fundamental

($\omega = \omega_0$), poderia-se usar uma solução parecida com a Eq. (19) com uma taxa de crescimento σ menor [15], pois sabe-se que ocorrerá ressonância para todas as frequências múltiplas de $2\omega_0/n$, com $n = 1, 2, \dots$

É possível o uso do mesmo procedimento utilizado anteriormente, o método da variação dos parâmetros para resolver o caso em que $\omega = \omega_0$, mas como ilustração neste trabalho será utilizado outro método, o método de Green, que neste problema possui uma fonte com termos de t e x ,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = (F_0 - \eta\omega_0 x) \cos(\omega_0 t). \quad (24)$$

Na primeira integração da função de Green, tomamos a solução homogênea e resolvemos a integral da Eq. (13) que tem o seguinte formato

$$x_2(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0}{\omega_0} \int_0^t \sin[\omega_0(t-t')] (F_0 - x_1) \cos(\omega_0 t') dt', \quad (25)$$

com $x_1 = \cos(\omega_0 t')$. Após a integração encontramos

$$\begin{aligned} x_2(t) = & x_0 \left\{ \cos(\omega_0 t) + \eta \left[\frac{1}{3} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{6} \cos(2\omega_0 t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \right] + \eta^2 \left[-\frac{1}{6} + \frac{87}{864} \cos(\omega_0 t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{18} \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{96} \cos(3\omega_0 t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{5}{24} \omega_0 t \sin(\omega_0 t) \right] \right\} \\ & + F_0 \left\{ \frac{\eta}{9\omega_0^2} \left[\cos(2\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\eta}{12\omega_0} t \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t) \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

Na expressão (26) percebe-se que para o caso $\eta = F_0 = 0$ tem-se a solução homogênea do oscilador harmônico simples. E para o caso de $\eta = 0$ e $F_0 \neq 0$ tem-se o caso do oscilador harmônico forçado, note que já é obtida a expressão (6).

Na Fig. 3 é apresentada a comparação desta solução analítica com a solução numérica e nota-se um bom acordo entre ambas. O que é evidente de imediato é que a contribuição do termo paramétrico é muito pequena sendo mais evidente a contribuição do termo forçador.

Para o caso mais simples das ressonâncias paramétricas há ainda o problema de construir a solução a partir de várias suposições do comportamento da solução, podemos utilizar técnicas de equações diferenciais para tentar elucidar a validade destas suposições, no entanto, o trabalho advindo deste uso pode não ser muito eficiente para fins didáticos, sendo interessante o uso de experiências e do cálculo numérico.

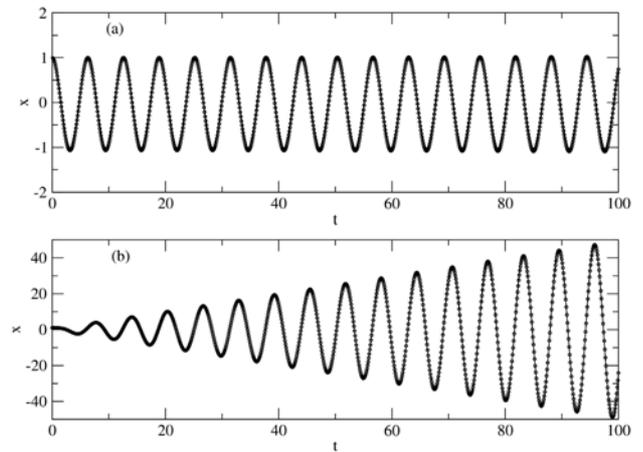


Figura 3 - Gráfico das soluções para a ressonância $\omega = \omega_0$. (a) Caso sem termo forçador $F_0 = 0$ na Eq. (24), cálculo numérico linha contínua, solução analítica pontilhado. (b) Sistema forçado com uma força de intensidade $F_0 = 1$, cálculo numérico linha contínua, solução analítica pontilhado. Em ambos gráficos $\eta = 0.1$.

Não existem ferramentas definitivas que possam sanar totalmente o desconforto gerado no aluno pelo fato das soluções serem baseadas em suposições sobre o problema. O aluno muitas vezes se sente impotente não sabendo qual suposição seja a “certa”. A apresentação das limitações dos métodos de resolução de equações diferenciais e a sua comparação com soluções que levam em conta suposições, que aparentemente são imposições, mostram de certo modo a limitação do método científico. A máxima muitas vezes usadas por professores que “esta é uma boa suposição, porque funciona” é a melhor resposta. A própria concepção do método científico apresenta controvérsias. Todo o conhecimento científico é totalmente isento de uma estrutura de pensamento que depende de informações sobre o objeto do conhecimento, ou as informações (e as crenças) que temos sobre o objeto permite-nos construir o método [17, 18]? Questões como estas estão fora do escopo deste artigo.

4. Conclusões

Foram estudados os osciladores harmônicos e paramétricos forçados por uma força periódica através de três técnicas de resolução de equações diferenciais. Percebemos que o uso de suposições sobre o comportamento da solução a priori são muito úteis tanto para o caso do oscilador harmônico forçado quando para o oscilador paramétrico, no entanto podem surgir críticas sobre a imparcialidade destas suposições por parte do aluno que primeiramente vê este tipo de resolução.

O método da variação dos parâmetros é um método interessante para solução deste tipo de problemas, este método possui a vantagem de não levantar nenhuma suposição sobre o comportamento físico dos osciladores tratados, porém resolução de problemas de osciladores

no caso da ressonância torna-se tão difícil quanto mais complexa é a forma da força que atua sobre o oscilador. O uso de problemas de oscilações no caso em que há ressonância como sequência didática pode ser interessante como exercício na aprendizagem deste método matemático.

O método de Green mostrou-se muito útil para resolução do oscilador paramétrico a exemplo do que havia sido apresentado no oscilador harmônico forçado [5]. O método de Green possui uma formulação mais geral e poderosa do que o método da variação dos parâmetros [13, 14], no entanto, mais sofisticada do que o método da variação dos parâmetros, o que demanda mais tempo por parte do aluno em compreender as particularidades do método. Como o método de Green tem suas inúmeras aplicações em eletromagnetismo e mecânica, sua apresentação torna mais “inteligível” as soluções encontradas do que as suposições *ad hoc* que podemos fazer no caso dos osciladores harmônicos e paramétricos.

Creio que esta pode ser uma sequência muito proveitosa tanto na aprendizagem de conceitos importantes em mecânica quanto em técnicas de resolução de equações diferenciais.

5. Agradecimentos

Agradeço ao prof. Arnaldo Gammal pelas discussões. Este trabalho teve o suporte parcial da CAPES.

Referências

- [1] Walter F. Wreszinski, *Mecânica Clássica Moderna* (São Paulo, Edusp, 1996).
- [2] H.M. Nussenzeig, *Física Básica* (São Paulo, Edgar Blücher, 1997), v. I.
- [3] R.D. Peters and T. Pritchett, *Am. J. Phys.* **65**, 1067 (1997).
- [4] A. Marchewka, D.S. Abbott and R.J. Beichner, *Am. J. Phys.* **72**, 4, (2003).
- [5] A.C. Bertuola, M.S. Hussein e M.P. Pato, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**, 327 (2005).
- [6] C.C. Rulli e J.P. Rino, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 71 (2007).
- [7] V. Zanchin, A. Maia, W. Craig and R. Brandenberger *Phys. Rev. D* **57**, 4651 (1998).
- [8] V.P. Barros, M. Brtka, A. Gammal and F.Kh Abdullaev, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38**, 4111 (2005).
- [9] N. Fameli, F.L. Cruzson and S. Mikoshiba, *Am. J. Phys.* **67**, 127 (1999).
- [10] M. Pietrocola (org.), *Ensino de Física: Conteúdo e Metodologia numa Concepção Integradora* (Florianópolis, UFSC, 2005).
- [11] H.L. Quidorizzi, *Um Curso de Cálculo* (LTC, Rio de Janeiro, 2000).
- [12] R. Feynmann, R.B. Leighton and M. Sands *Feynmann Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1963), v. 1.
- [13] W.E. Boyce e R.C. DiPrima, *Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1979).
- [14] F.W. Byron and R.W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics* (Addison Wesley, Reading, 1979), v. 1 & 2.
- [15] L.D. Landau, *Mecânica* (Mir, Moscou, 1978).
- [16] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica* (Mir, Moscou, 1987).
- [17] I. Lakatos, *The Methodology of Scientific Research Programs* (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
- [18] E.A. Oliveira e V.P. Barros, *Cien. & Cogn.* **11**, 184 (2007), disponível em www.cienciasecognicao.org.