

# Explorando sistemas hamiltonianos II: pontos de equilíbrio degenerados

(Exploring hamiltonian systems II: degenerate equilibrium points)

G.A. Monerat<sup>1</sup>, E.V. Corrêa Silva, G. Oliveira-Neto, P.H.A.S. Nogueira,  
A.R.P. de Assumpção e T.M.G. de Oliveira

Departamento de Matemática e Computação, Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Resende, RJ, Brasil

Recebido em 13/8/2007; Revisado em 14/2/2008; Aceito em 8/3/2008; Publicado em 7/7/2008

Neste segundo artigo sobre sistemas hamiltonianos, apresentamos o método da explosão (*blow-up*) para a determinação da natureza de pontos fixos (pontos de equilíbrio) degenerados. Aplicamos o método a dois modelos hamiltonianos com um e dois graus de liberdade, respectivamente. Primeiramente, analisamos um sistema formado por um pêndulo simples submetido a um torque externo constante. Em seguida, consideramos um sistema formado por um pêndulo duplo com segmentos de comprimentos e massas iguais, também submetidos a torques externos constantes e não nulos. A presença de pontos de equilíbrio degenerados nos casos dos pêndulos simples e duplo ocorre para certos valores dos torques externos.

**Palavras-chave:** pontos de equilíbrio degenerados, método da explosão, sistemas hamiltonianos.

In this second article on hamiltonian systems, we present the *blow-up* method for the determination of the nature of degenerate fixed points (equilibrium points). We apply the method to two hamiltonian models with one and two degrees of freedom respectively. Firstly we study a system formed by a simple pendulum subjected to a constant external torque. Then we consider a system formed by a double pendulum of segments with equal lengths and masses, also subjected to nonvanishing constant external torques. The presence of degenerate equilibrium points in both cases of simple and double pendulums occurs for some values of the external torques.

**Keywords:** degenerate equilibrium points, blow-up method, hamiltonian systems.

## 1. Introdução

No estudo da dinâmica de sistemas hamiltonianos [1, 2], a análise do espaço de fase tem como ponto de partida a busca de *pontos de equilíbrio* (também denominados *pontos fixos*). A importância de tais pontos vem do fato de que estes “organizam” a estrutura das órbitas no espaço de fase do sistema (ou, em outras palavras, reduzem as possibilidades para esta estrutura). Na teoria dos sistemas dinâmicos [3], um ponto de equilíbrio (ou, de modo equivalente, a estrutura do espaço de fase nas suas vizinhanças, que descreve o comportamento dinâmico do sistema nesta região) pode ser classificado mediante o processo de *linearização* [4], que consiste na expansão do sistema de equações em série de Taylor até a primeira ordem, em torno dos pontos de equilíbrio. No entanto, quando a matriz dos coeficientes constantes do sistema linearizado em torno de um dado ponto de equilíbrio (matriz jacobiana) apresenta um ou mais autovalores nulos, o processo de linearização não é suficiente para a caracterização do ponto de equilíbrio; este então é dito *degenerado* [5].

<sup>1</sup>E-mail: monerat@uerj.br.

O matemático René Thom [6] foi o primeiro a obter uma classificação para pontos de equilíbrio degenerado. Uma classificação muito simples é também apresentada por Bautin [7]. Em 1998, Aranda [8] apresenta um método para análise de pontos de equilíbrio degenerados em sistemas planos (bi-dimensionais). Um outro método muito interessante é o da explosão (*blow-up*) [9]. Este método tem sido aplicado na análise da dinâmica de diversos sistemas físicos com pontos de equilíbrio degenerados. Por exemplo, Bogoyavlensky [10] utiliza o método da explosão em sistemas astrofísicos e Monerat [11] em modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker, com constante cosmológica e poeira, para descrever a estrutura das curvas no espaço de fase do modelo próximas à singularidade.

Recentemente Monerat *et al.* [12] apresentaram um estudo analítico sobre o comportamento da dinâmica dos pêndulos simples e duplo, ambos submetidos a torques externos constantes, na vizinhança dos pontos de equilíbrio destes sistemas. Observa-se a presença de pontos de equilíbrio degenerados, para determinados valores dos torques externos. Para uma descrição

completa desses sistemas, torna-se necessário a classificação destes pontos de equilíbrio degenerados, objetivo deste trabalho. Chamamos a atenção do leitor para a restrição de nossa discussão a sistemas hamiltonianos; para o tratamento dos demais sistemas, sugerimos a referência [9].

Neste trabalho, faremos uso do método da explosão para descrever a estrutura das curvas em uma vizinhança linear dos pontos de equilíbrio degenerados existentes no espaço de fase dos pêndulos simples e duplo. Na seção 2, apresentamos o método da explosão, conforme exposto por Guckenheimer e Holmes [9], para um sistema hamiltoniano de um grau de liberdade, por questão de simplicidade. Na seção 3, aplicamos o método para o pêndulo simples submetido a um torque externo constante, descrito por uma função de Hamilton de um grau de liberdade. Na seção 4, estendemos o método para um sistema hamiltoniano de dois graus de liberdade formado por um pêndulo duplo, também sujeito a ação de torques externos constantes. Na seção 5, apresentamos nossos comentários finais e conclusões.

## 2. O método da explosão (*blow-up*)

Por questão de simplicidade de exposição, focalizaremos aqui sistemas hamiltonianos com um grau de liberdade. Uma descrição mais abrangente deste método pode ser encontrada na Ref. [13].

Considere um sistema descrito por uma hamiltoniana  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, p_x)$ ; sua dinâmica é governada pelas equações de Hamilton

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = f(x, p_x)$$

e

$$\frac{dp_x(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = g(x, p_x), \quad (1)$$

em que  $f(x, p_x)$  e  $g(x, p_x)$  são funções cujas formas, naturalmente, dependem da forma da hamiltoniana. Suponhamos que exista no espaço de fase do sistema pelo menos um ponto de equilíbrio, ou seja, um ponto  $\mathcal{P}(x^*, p_x^*)$  tal que  $\dot{x}|_{\mathcal{P}} = \dot{p}_x|_{\mathcal{P}} = 0$  ou, de modo equivalente,  $f(x^*, p_x^*) = g(x^*, p_x^*) = 0$ . O ponto de equilíbrio está situado sobre a superfície de energia  $E_{fixa} = \mathcal{H}(x^*, p_x^*)$ , imersa no espaço de fase.

Ao expandirmos o sistema (1) em série de Taylor até a primeira ordem em torno do ponto  $\mathcal{P}$ , obtemos

$$\frac{dX}{dt} \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\mathcal{P}} X + \left. \frac{\partial f}{\partial p_x} \right|_{\mathcal{P}} P$$

e

$$\frac{dP}{dt} \approx \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\mathcal{P}} X + \left. \frac{\partial g}{\partial p_x} \right|_{\mathcal{P}} P, \quad (2)$$

em que  $X \equiv x - x^*$  e  $P \equiv p - p_x^*$  representam o afastamento a partir do ponto de equilíbrio. Se o ponto de

equilíbrio  $\mathcal{P}(x^*, p_x^*)$  for degenerado, ou seja, se a matriz jacobiana do sistema linearizado em torno deste ponto,

$$J = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial p_x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial p_x} \end{array} \right] \Bigg|_{\mathcal{P}}, \quad (3)$$

for singular (*i.e.*, se pelo menos um de seus autovalores forem nulos), o comportamento das trajetórias do sistema na vizinhança do ponto de equilíbrio não poderá ser determinado pelo processo de linearização do sistema, conforme discutido em [12].

O chamado *método da explosão* ou *blow-up* [9], que expomos a seguir, nos permite analisar este comportamento. Para descrevermos os pontos  $(x, p_x)$  de uma vizinhança  $\Phi$  do ponto de equilíbrio degenerado  $\mathcal{P}(x^*, p_x^*)$ , utilizaremos coordenadas polares  $(r, \theta)$ , definidas como (vide Fig. 1a)

$$X = x - x^* = r \cos \theta, \quad (4)$$

$$P = p_x - p_x^* = r \sin \theta, \quad (5)$$

tal que  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Ressaltamos que esta transformação *não* é canônica: ela deve ser aplicada somente *após* termos obtido as equações de Hamilton nas variáveis originais.

Reescrevendo as equações de movimento (2) nas novas variáveis, obtemos

$$\frac{dr}{dt} = f(r, \theta) \cos \theta + g(r, \theta) \sin \theta, \quad (6)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} [-f(r, \theta) \sin \theta + g(r, \theta) \cos \theta], \quad (7)$$

em que as funções  $f$  e  $g$  são escritas em termos das novas variáveis. Estamos interessados no limite  $r \rightarrow 0$ , quando tendemos ao ponto  $\mathcal{P}$ , para qualquer  $\theta$ ; a fim de evitar singularidades nas equações, multiplicamo-las por  $r$ , obtendo um sistema da forma

$$r \frac{dr(t)}{dt} = r [f(r, \theta) \cos \theta + g(r, \theta) \sin \theta] \equiv F(r, \theta), \quad (8)$$

$$r \frac{d\theta(t)}{dt} = -f(r, \theta) \sin \theta + g(r, \theta) \cos \theta \equiv G(r, \theta). \quad (9)$$

Podemos associar os pontos da vizinhança  $\Phi$ , contida no espaço de fase, a pontos de uma superfície cilíndrica  $\Gamma$  em um espaço tridimensional auxiliar  $\Psi$  (vide Fig. 1b), cujos pontos serão localizados em coordenadas (cilíndricas!)  $(r, \theta)$ . Sejam  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_-$  os subconjuntos de  $\Gamma$  tais que  $r > 0$ ,  $r = 0$  e  $r < 0$ , respectivamente; e seja  $\Phi_+ = \Phi - \{\mathcal{P}\}$  a vizinhança perfurada de  $\mathcal{P}$ . Cada ponto de  $\Phi_+$  corresponde a um ponto de  $\Gamma_+$ , e vice-versa. O ponto de equilíbrio degenerado  $\mathcal{P}$  corresponde a  $\Gamma_0$ , ou seja, à circunferência  $r = 0$  sobre  $\Gamma$ : diz-se que o ponto crítico  $\mathcal{P}$  foi *explodido* ou *ampliado* (em inglês, *blown-up*) na circunferência  $\Gamma_0$ . Não há pontos em  $\Phi$  correspondentes a pontos de  $\Gamma_-$ .

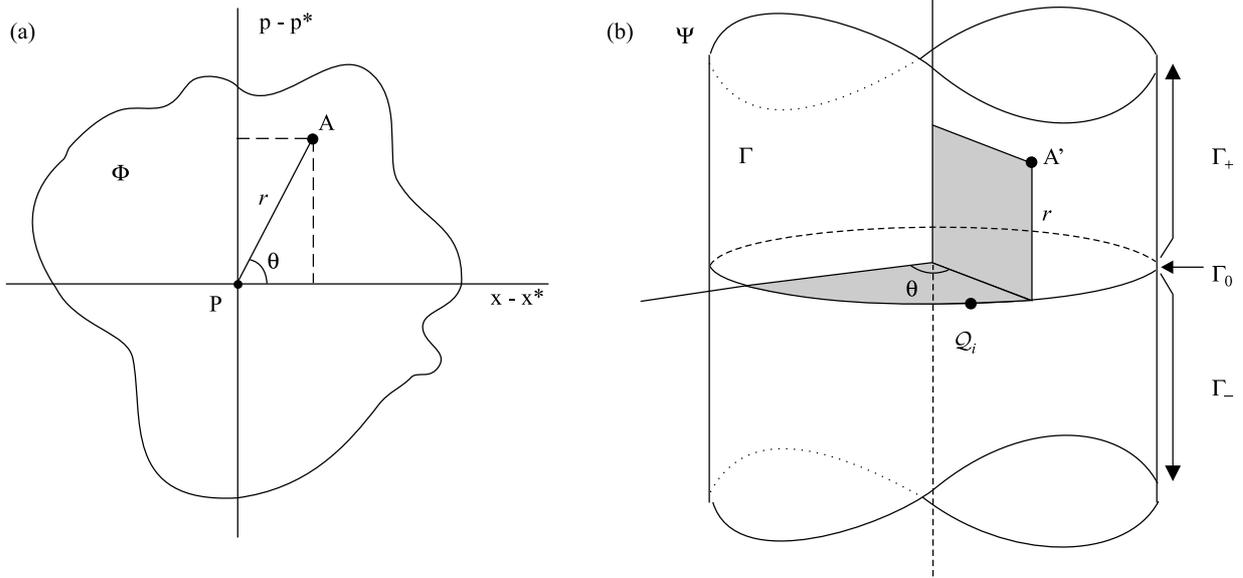


Figura 1 - Ilustração da transformação de variáveis e a sua interpretação, características do método da explosão (*blow-up*), para um espaço de fase bidimensional. Em (a), um ponto  $A$  da vizinhança  $\Phi$  de um ponto de equilíbrio degenerado  $\mathcal{P}(x^*, p_x^*)$  é descrito por coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Por sua vez, (b) mostra que  $(r, \theta)$  podem ser interpretadas como coordenadas cilíndricas de um ponto  $A'$  sobre uma superfície cilíndrica  $\Gamma$ , imersa em um espaço tridimensional  $\Psi$ . Sejam  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_-$  os subconjuntos de  $\Gamma$  tais que  $r > 0$ ,  $r = 0$  e  $r < 0$ , respectivamente; e seja  $\Phi_+ = \Phi - \{\mathcal{P}\}$  a vizinhança perfurada de  $\mathcal{P}$  (da qual, por definição, está excluído o próprio  $\mathcal{P}$ ). Há uma correspondência biunívoca entre os pontos de  $\Phi_+$  e  $\Gamma_+$ ; o ponto de equilíbrio degenerado  $\mathcal{P}$  corresponde a todos os pontos de  $\Gamma_0$  (a circunferência  $r = 0$  sobre  $\Gamma$ ); e os pontos de  $\Gamma_-$  não correspondem a nenhum ponto de  $\Phi$ . Observe que os espaços  $\Phi_+$  e  $\Gamma_+$  têm a mesma dimensão; porém o ponto (de dimensão nula)  $\mathcal{P}$  é mapeado em uma curva (unidimensional)  $\Gamma_0$ . Diz-se que o ponto  $\mathcal{P}$  é *explodido* ou *ampliado* (*blow-up*) na curva  $\Gamma_0$ . Deste modo, órbitas sobre  $\Gamma_+$  que se aproximam ou se afastam de qualquer ponto de  $\Gamma_0$  representarão curvas em  $\Phi_+$  que se aproximam ou se afastam do ponto de equilíbrio  $\mathcal{P}$ , respectivamente. Ao escrevermos as equações linearizadas de movimento nas coordenadas  $(r, \theta)$ , poderemos identificar seus pontos de equilíbrio  $Q_i \in \Gamma_0$ ; se todos estes forem não-degenerados, a linearização em torno de cada  $Q_i$  determinará a natureza das órbitas em torno de  $\mathcal{P}$ . No entanto, se ainda houver algum  $Q_i$  degenerado, uma nova explosão em torno deste ponto será realizada, e assim por diante.

O passo seguinte consiste em determinarmos os pontos de equilíbrio do sistema (8)-(9), que são da forma  $Q_i(r = 0, \theta_i^*) \in \Gamma_0$ , tal que  $i = 1, 2, \dots, n$ . Estes pontos correspondem às direções, em  $\Phi$ , segundo as quais as órbitas se aproximam ou se afastam do ponto degenerado  $\mathcal{P}$ . Devemos então linearizar o sistema (8)-(9) nas variáveis  $(r, \theta)$ , em torno dos  $Q_i$ , e de forma análoga ao que foi feito para o sistema original, determinar o jacobiano do sistema linear resultante. Um jacobiano nulo implica em um  $Q_i$  degenerado, e um jacobiano não-nulo implica em um  $Q_i$  não-degenerado

Caso todos os pontos  $Q_i$  sejam não-degenerados, a linearização do sistema (8)-(9) em torno de cada  $Q_i$  terá determinado completamente a estrutura das órbitas em

suas respectivas vizinhanças lineares, e portanto na vizinhança linear de  $\mathcal{P}$ .

Contudo, se ainda houver algum  $Q_i$  degenerado, realiza-se uma nova explosão em torno deste ponto, introduzindo-se novas coordenadas  $(r_1, \theta_1)$  tais que

$$r = r_1 \cos \theta_1, \tag{10}$$

$$\theta - \theta_i^* = r_1 \sin \theta_1, \tag{11}$$

e assim por diante. Nos exemplos utilizados no presente artigo, somente uma explosão será suficiente. O leitor interessado poderá encontrar na Ref. [9] exemplos em que são necessárias uma segunda e terceira explosões.

Em um espaço de fase com  $2n$  dimensões, a vizinhança perfurada  $\Phi_+$  de  $\mathcal{P}$  será mapeada<sup>2</sup> em um

<sup>2</sup>Em um espaço de fase de dimensão  $2n$ , pontos da vizinhança perfurada  $\Gamma_+$  de  $\mathcal{P}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  são os pontos sobre a superfície das hipersferas  $2n$ -dimensionais  $(x_1 - x_1^*)^2 + \dots + (x_n - x_n^*)^2 + (p_1 - p_1^*)^2 + \dots + (p_n - p_n^*)^2 = r^2$ , com  $r \in (0, \infty)$ . Para o caso  $n = 1$ , conforme já expusemos aqui, podemos utilizar as transformações  $x_1 - x_1^* = r \cos \theta$  e  $p_1 - p_1^* = r \sin \theta$ , em que  $r \in (0, \infty)$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Para o caso  $n = 2$ , podemos utilizar as transformações  $x_1 - x_1^* = r \cos \theta_1$ ,  $x_2 - x_2^* = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$ ,  $p_1 - p_1^* = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$ ,  $p_2 - p_2^* = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3$ , em que  $r \in (0, \infty)$ ,  $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$  e  $\theta_3 \in [0, 2\pi)$ . Transformações análogas podem ser definidas para o tratamento de dimensões superiores, com lógica de construção bem simples. Inicialmente, temos um segmento  $L_0$ , de comprimento  $r$  no espaço de fase. A primeira equação representa a projeção ortogonal de  $L_0$  sobre o eixo associado à primeira coordenada  $x_1$  (utilizando  $\cos \theta_1$ ); as equações restantes conterão a projeção de  $L_0$  sobre o sub-espaço  $\bar{V}_1$ , ortogonal ao eixo  $x_1$  (utilizando  $\sin \theta_1$ ), determinando neste espaço um segmento  $L_1$ . A segunda equação representa a projeção de  $L_1$  sobre o eixo coordenado  $x_2$  (utilizando  $\cos \theta_2$ ), e as equações restantes contêm a projeção de  $L_1$  sobre o espaço  $\bar{V}_2$ , ortogonal aos eixos  $x_1$  e  $x_2$  (utilizando  $\sin \theta_2$ ). O processo segue até atingirmos a projeção sobre o sub-espaço unidimensional  $\bar{V}_{2n-1}$ . Os intervalos de variação  $r \in (0, \infty)$ ,  $\theta_i \in [0, \pi]$  para  $i = 1, \dots, 2n - 2$  e  $\theta_{2n-1} \in [0, 2\pi)$  garantem que haja uma relação biunívoca entre  $(x_1 - x_1^*, \dots, x_n - x_n^*, \dots, p_1 - p_1^*, \dots, p_n - p_n^*) \neq \mathcal{P}$  e  $(r, \theta_1, \dots, \theta_{2n-1})$ .

espaço  $\Gamma_+$  de dimensão  $2n$ . O ponto de equilíbrio degenerado  $\mathcal{P}$  será mapeado em um espaço  $\Gamma_0$  de dimensão  $2n - 1$ . Tanto  $\Gamma_+$  quanto  $\Gamma_0$  encontrar-se-ão imersos em um espaço  $\Psi$  de dimensão  $2n + 1$ . A Fig. 1 ilustra o caso  $n = 1$ .

### 3. O pêndulo simples

Aplicaremos o método descrito na seção 2 ao pêndulo simples submetido a um torque externo constante. Este modelo pode representar um braço robótico de haste rígida única, com um motor situado no seu ponto fixo aplicando um torque arbitrário  $T$  na haste em relação a este ponto fixo (vide Fig. 2). No presente caso escolhemos  $T = mgL$ , em que  $m$  é a massa da partícula,  $L$  o comprimento do pêndulo e  $g$  a aceleração da gravidade local. Este valor de  $T$  foi deliberadamente escolhido para que tenhamos um ponto de equilíbrio degenerado do sistema.

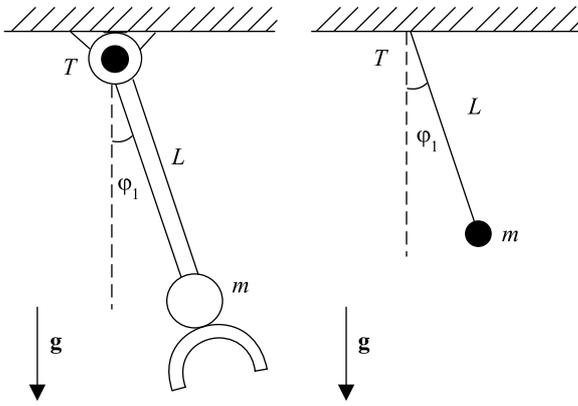


Figura 2 - Modelo simplificado de braço robótico com movimentos restritos a um plano vertical. Um pêndulo simples de comprimento  $L$  e massa  $m$  sob torque externo  $T$  modela um braço de segmento único (de comprimento  $L$  e massa desprezível) com atuador (elemento na extremidade livre) de massa  $m$ . Um motor na extremidade fixa do braço aplica um torque  $T$  ao sistema.

A função de Hamilton<sup>3</sup> é da forma

$$H = \frac{p_\varphi^2}{2mL^2} - mgL \cos(\varphi) - mgL\varphi. \quad (12)$$

As equações de Hamilton que governam a dinâmica desse sistema apresentam um ponto de equilíbrio no ponto  $P^*(\varphi^*, p_\varphi^*)$  do espaço de fase, tal que  $\varphi^* = \frac{\pi}{2}$ ,  $p_\varphi^* = 0$ ; este ponto possui energia  $\bar{E}_{fixa} = -\frac{mgL\pi}{2}$ . O processo de linearização [12] das equações de Hamilton em torno da vizinhança linear do ponto  $P^*$  coloca

<sup>3</sup>Verifica-se facilmente que  $H$  é conservada pois, tendo em vista as equações de movimento de Hamilton,

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi},$$

temos

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \dot{p}_\phi + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

o sistema (8)-(9) na forma

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = J \left( \vec{X}(t) - \vec{X}^* \right), \quad (13)$$

em que  $\vec{X}(t) = (\varphi(t), p_\varphi(t))$ ,  $\vec{X}^* = (\varphi^*, p_\varphi^*)$  e  $J$  é a matriz jacobiana do sistema para o ponto  $P^*$ ,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{mL^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Os autovalores da matriz jacobiana  $J$  são nulos, indicando que o ponto de equilíbrio  $P^*$  é um ponto de equilíbrio degenerado.

Vamos agora aplicar o método apresentado na seção 2. Para isso, de acordo com as Eqs. (4) e (5), faremos uma transformação de variáveis

$$\varphi = r \cos \theta; \quad p_\varphi = r \sin \theta, \quad (15)$$

tal que o sistema de equações diferenciais formado pelas equações de Hamilton assume a forma

$$r \frac{dr}{dt} = \frac{1}{mL^2} [-r \cos \theta (m^2 g L^3 \sin(r \sin \theta) - m^2 g L^3 - r \sin \theta)], \quad (16)$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{mL^2} [m^2 g L^3 \sin(r \sin \theta) \sin \theta - m^2 g L^3 \sin \theta - r \sin^2 \theta + r]. \quad (17)$$

De acordo com o método, inicialmente consideramos o limite  $r \rightarrow 0$  nas Eqs. (16) e (17); em seguida, determinamos os valores de  $\theta = \theta^*$  que fornecerão as coordenadas do ponto de equilíbrio degenerado nas novas coordenadas. O resultado neste caso é  $\theta^* = 0$ . Tal ponto está associado a uma superfície de energia  $\bar{E}_{fixa} = -mgL$ . Então, de acordo com o método exposto na seção 2, linearizamos o sistema em torno do ponto ( $r = 0$ ,  $\theta^* = 0$ ); a matriz jacobiana nas novas variáveis é

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} 0 & mgL \\ -mgL & 1/mL^2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

A natureza de tal ponto de equilíbrio é determinada pelos autovalores da matriz  $\bar{J}$

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4m^4 L^6 g^2}}{2mL^2};$$

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m^4 L^6 g^2}}{2mL^2}. \quad (19)$$

Podemos observar que se  $m^4 = \frac{1}{4L^6g^2}$  ambos os autovalores são reais e  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ , indicando que tal ponto apresenta um equilíbrio instável, denominado “nó flexionado” (*inflected node*) [4]. A condição  $m^4 > \frac{1}{4L^6g^2}$  indica que o ponto de equilíbrio é um *foco*, ou seja, temos autovalores complexos da forma  $\lambda = a \pm ib$ , em que  $\{a, b\}$  são números reais e positivos [4]. Esse resultado indica que o elemento de volume no espaço  $(r, \theta)$  não é conservado<sup>4</sup>. Para  $m^4 < \frac{1}{4L^6g^2}$  os autovalores são reais e distintos, configurando um nó instável (observação: em alguns sistemas hamiltonianos conservativos, com dois graus de liberdade, pode ocorrer o aparecimento de pontos de equilíbrio do tipo “foco generalizado” conforme mostrado na Ref. [15]. Nesses casos estes pontos representam situações de equilíbrio instável).

A solução geral do sistema linearizado formado pelas Eqs. (16) e (17) em torno do ponto de equilíbrio é uma superposição (combinação linear) das soluções linearmente independentes

$$X_i(t) = \sum_{m=1}^2 c_m^{(i)} A_m^{(i)} e^{\lambda_m t}, \quad (20)$$

em que  $X_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , representa as componentes do vetor

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

e os  $A_m^{(i)}$  são as componentes dos autovetores associados aos autovalores  $\lambda_m$  da matriz jacobiana, e os coeficientes  $c_m^{(i)}$  são constantes de integração que dependem das condições iniciais escolhidas.

Em termos das variáveis  $(r, \theta)$  as soluções válidas numa vizinhança linear do ponto de equilíbrio são da forma [12]

$$r(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (22)$$

$$\theta(t) = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}, \quad (23)$$

em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são dados pela Eq. (19). Como já mencionado, as soluções (22) e (23) dependem da relação entre os valores da massa e do comprimento do pêndulo. A estrutura das curvas na vizinhança linear dos pontos de equilíbrios para os casos de nó instável (quando  $m^4 < \frac{1}{4L^6g^2}$ ), nó flexionado (quando  $m^4 = \frac{1}{4L^6g^2}$ ) e foco (quando  $m^4 > \frac{1}{4L^6g^2}$ ) podem ser vistos na Ref. [4].

<sup>4</sup>Lembramos que as coordenadas  $(r, \phi)$  não são canonicamente conjugadas; portanto não devemos inferir que a não-conservação do volume neste espaço implica em não-conservação da energia. O teorema de Liouville [14] estabelece que em um sistema fechado hamiltoniano (descrito em termos de coordenadas canonicamente conjugadas, portanto) o elemento de volume no espaço de fase é conservado ou, de modo equivalente, a hamiltoniana se conserva. O sistema do qual estamos tratando aqui é aberto, porém a sua energia é conservada, conforme já verificamos. O efeito do torque constante aqui é semelhante, de certo modo, ao efeito do campo gravitacional constante sobre um sistema massa-mola vertical, não interferindo aquele campo na conservação da energia do sistema, mas somente deslocando o seu ponto de equilíbrio.

<sup>5</sup>De modo análogo ao demonstrado para a função  $H$  em (12), o leitor pode verificar que a hamiltoniana também é conservada.

## 4. O pêndulo duplo

Um pêndulo duplo de massas idênticas  $m$  e segmentos de comprimentos idênticos  $L$ , sob a ação de torques externos constantes de intensidades  $T_1 = 2mgL$  e  $T_2 = mgL$ , respectivamente, apresenta um ponto de equilíbrio degenerado no seu espaço de fase [12]. Este modelo pode representar um braço robótico de duas hastas rígidas, com dois motores: um situado no seu ponto fixo, e outro situado na junção entre as duas hastas (vide Fig. 3). Aqui, as intensidades dos torques foram deliberadamente escolhidas de modo a termos um ponto de equilíbrio degenerado do sistema.

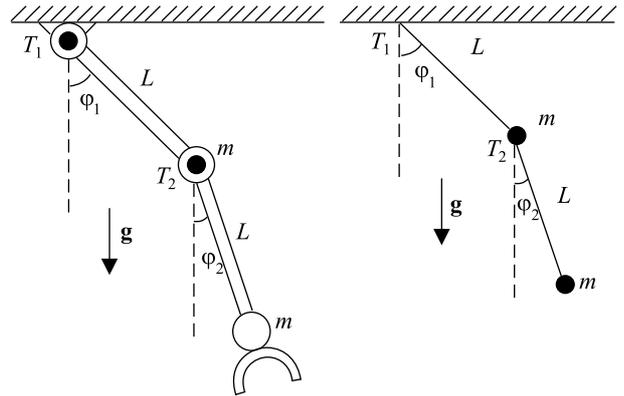


Figura 3 - Modelo simplificado de braço robótico com movimentos restritos a um plano vertical. Um pêndulo duplo sob torques externos  $T_1$  e  $T_2$  modela um braço robótico de dois segmentos, ambos de mesmo comprimento  $L$  e massas desprezíveis. Por simplicidade, supomos que tanto o atuador (na extremidade livre do segundo segmento) quanto os dois motores (no ponto fixo do primeiro segmento e na junção entre os dois segmentos) possuem massas idênticas  $m$ . Os motores aplicam torques  $T_1$  e  $T_2$  a cada um dos segmentos, em relação ao ponto fixo e ao ponto de junção, respectivamente.

Este sistema é descrito por uma função de Hamilton<sup>5</sup> de dois graus de liberdade na forma

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)p_1 p_2}{mL^2(1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)^2)} - 2mgL \cos(\varphi_1) - mgL \cos(\varphi_2) + 2mgL\varphi_1 + mgL\varphi_2. \quad (24)$$

As equações de Hamilton governam a dinâmica do sistema; elas constituem um conjunto de quatro equações diferenciais não lineares, e possuem um ponto de equilíbrio degenerado  $P_0$  de coordenadas

$$P_0 : (p_1 = 0, \varphi_1 = -\pi/2, p_2 = 0, \varphi_2 = -\pi/2), \quad (25)$$

com uma energia associada  $E_0 = -\frac{3}{2}\pi mgL$ .

Em se tratando de um ponto de equilíbrio degenerado, o processo de linearização do sistema de equações em torno desse ponto não é suficiente para caracterizá-lo (*i.e.*, caracterizar o comportamento do sistema em sua vizinhança). Para determinarmos a natureza deste ponto de equilíbrio faremos uso do método da explosão, apresentado na seção 2. O pêndulo duplo possui dois graus de liberdade  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , aos quais associamos os momenta canonicamente conjugados  $(p_1, p_2)$ , respectivamente. Portanto, utilizaremos coordenadas hiperesféricas quadridimensionais  $(R, \theta, \phi, \eta)$ , definidas pelas transformações<sup>6</sup> de variáveis

$$\begin{cases} \varphi_1 = R \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \operatorname{sen}(\eta); \\ p_1 = R \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\eta); \\ \varphi_2 = R \cos(\theta) \operatorname{sen}(\eta); \\ p_2 = R \cos(\eta), \end{cases} \quad (26)$$

em que  $\eta \in [0, \pi]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  e  $R \in [0, \infty)$ . Substituindo as expressões (26) nas equações de Hamilton do sistema obtido a partir da hamiltoniana (24), obtemos um novo conjunto de quatro equações diferenciais nas novas variáveis  $(R, \theta, \phi, \eta)$ . As equações de Hamilton nas variáveis originais podem ser vistas na Ref. [12]; nas novas variáveis, as equações tomam a forma<sup>7</sup>

$$\begin{cases} R \frac{dR}{dt} = f_1(R, \theta, \phi, \eta); \\ R \frac{d\theta}{dt} = f_2(R, \theta, \phi, \eta); \\ R \frac{d\phi}{dt} = f_3(R, \theta, \phi, \eta); \\ R \frac{d\eta}{dt} = f_4(R, \theta, \phi, \eta). \end{cases} \quad (27)$$

As coordenadas do ponto de equilíbrio degenerado nas novas variáveis são obtidas anulando o lado esquerdo das Eqs. (27), e em seguida, considerando o limite  $R \rightarrow 0$  das funções  $f_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . A primeira das equações obtida é identicamente nula; as demais formam o sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) [\operatorname{sen}(\eta)]^{-1} = 0; \\ \cos(\phi) [\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\eta)]^{-1} = 0; \\ -2 \cos(\eta) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) + \operatorname{sen}(\eta) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

<sup>6</sup>Uma hiperesfera quadridimensional de raio  $R$  é o lugar geométrico dos pontos do espaço euclidiano  $\mathfrak{R}^4$ , da forma  $(\varphi_1, p_1, \varphi_2, p_2)$ , que guardam a mesma distância  $R$  da origem, satisfazendo portanto à equação cartesiana  $\varphi_1^2 + p_1^2 + \varphi_2^2 + p_2^2 = R^2$ . Esta equação é a generalização do caso bidimensional (circunferência,  $x^2 + y^2 = R^2$ ) e tridimensional (superfície esférica,  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ).

<sup>7</sup>As expressões das funções  $f_i(R, \theta, \phi, \eta)$  para  $R$  arbitrário são demasiadamente extensas; aqui somente seu comportamento no limite  $R \rightarrow 0$  é relevante. No entanto, as expressões gerais podem ser facilmente obtidas pelo leitor utilizando-se um sistema de computação simbólica como o Maple ou o Mathematica. O leitor interessado na expressão completa destas funções pode obtê-las contactando os autores via e-mail.

cuja solução fornece quatro pontos de equilíbrio,

$$\begin{cases} Q_1 : \left( R = 0, \phi = \frac{\pi}{2}, \eta = \arctan(2), \theta = \frac{\pi}{2} \right); \\ Q_2 : \left( R = 0, \phi = \frac{\pi}{2}, \eta = -\arctan(2), \theta = \frac{-\pi}{2} \right); \\ Q_3 : \left( R = 0, \phi = \frac{-\pi}{2}, \eta = -\arctan(2), \theta = \frac{\pi}{2} \right); \\ Q_4 : \left( R = 0, \phi = \frac{-\pi}{2}, \eta = \arctan(2), \theta = \frac{-\pi}{2} \right). \end{cases} \quad (29)$$

Todos os pontos de equilíbrio descritos em (29) estão associados à mesma superfície de energia  $\epsilon_i = -3mgL$ . Ao linearizarmos o sistema de equações (27) em torno de qualquer um dos pontos de equilíbrio, obtemos matrizes jacobianas idênticas, da forma

$$J_i = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}mgL & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}mgL & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2mL^2} & 0 & \sqrt{5}mgL & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5}mgL \end{pmatrix}, \quad (30)$$

em que  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . O conjunto  $\lambda_i$  de autovalores das matrizes jacobianas fornecerão a natureza do  $i$ -ésimo ponto. Obtemos

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}mgL; \quad \lambda_{3,4} = \sqrt{5}mgL. \quad (31)$$

Este resultado indica [4] que os quatro pontos de equilíbrio correspondem à combinação de uma sela ( $\lambda_{1,2}$ ) e de um nó flexionado ( $\lambda_{3,4}$ ); representam, portanto, situações de equilíbrio instável.

## 5. Conclusão e comentários finais

Neste trabalho, aplicamos o método da explosão (*blow-up*) para a determinação da natureza de pontos de equilíbrio degenerados no espaço de fase de dois modelos hamiltonianos: o pêndulo simples e o pêndulo duplo, ambos sob a ação de torques externos constantes. Concluímos que *todos* os pontos degenerados existentes nestes dois sistemas descrevem situações de equilíbrio instável. No caso do pêndulo simples, mostramos que há apenas um ponto de equilíbrio degenerado; este pode ser um nó instável simples ou flexionado, dependendo da relação entre a massa e o comprimento do pêndulo. No caso do pêndulo duplo, após a explosão observamos a existência de quatro pontos de equilíbrio instáveis de

mesma natureza; cada um deles consistem no produto direto de uma sela hiperbólica (associada a um par de autovalores reais e simétricos) por um nó flexionado. Assim, o método em questão permite a descrição das soluções na vizinhança linear de cada um dos pontos de equilíbrio degenerados, mostrando ser uma técnica eficaz na análise da estabilidade/instabilidade de tais sistemas. A relativa simplicidade do método permite que este possa integrar o programa de uma disciplina de sistemas dinâmicos a ser cursada após a disciplina de mecânica analítica [16] nos cursos de graduação em física, conforme discutido na Ref. [12].

## Agradecimentos

G.A. Monerat, E.V. Corrêa Silva (Bolsista do CNPq), e G. Oliveira-Neto agradecem ao CNPq (Edital Universal CNPq/2006 - Proc. n. 476852/2006-4). G.A. Monerat agradece a FAPERJ (Proc. n. E-26/170.762/2004). T.M.G. de Oliveira (Bolsista do CNPq) agradece ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica (Edital PIBIC/2006).

## Referências

- [1] A.M.O. de Almeida, *Sistemas Hamiltonianos Caos e Quantização* (Unicamp, São Paulo, 1995), 3<sup>a</sup> ed.
- [2] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002), 2<sup>nd</sup> ed.
- [3] L.H.A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2002).
- [4] N. Fiedler-Ferrara e C.P. Cintra do Prado, *Caos Uma Introdução* (Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1995).
- [5] R. Seydel, *From to Equilibrium to Chaos - Practical Bifurcation and Stability Analysis* (Elsevier, Nova Iorque, 1988).
- [6] R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis* (Benjamin, Reading, 1975).
- [7] N.N.E.A. Bautin, *Methods and Techniques of Qualitative Analysis of Dynamical System in a Plane* (Nauka, Moscow, 1976).
- [8] J.I. Aranda Iriarte, *Métodos Simples para el Análisis de Puntos Degenerados de Sistemas Analíticos Planos*. Tese de Doutorado, Universidad Complutense de Madrid, 1998.
- [9] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, Nova Iorque, 1983), 2<sup>nd</sup> printing.
- [10] O. I. Bogoyavlensky, *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [11] G.A. Monerat, *Caos em Universos Pré-Inflacionários de Friedmann-Robertson-Walker*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 1999.
- [12] G.A. Monerat, E.V. Corrêa Silva, G. Oliveira-Neto, A.R.P. de Assumpção e A.R.R. Papa, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **28**, 177 (2006).
- [13] F. Takens, *Publ. Math* **43**, 47 (1974).
- [14] L. Landau e E. Lifshitz, *Mecânica* (Mir, Moscow, 1982).
- [15] N.A. Lemos, G.A. Monerat, H.P. de Oliveira e I.D. Soares, in *XXI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*, São Lourenço, 2000 (Sociedade Brasileira de Física, São Paulo, 2000). Disponível em <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/enfpc/xxi/procs/res206/>. Acessado em 2/2008.
- [16] N.A. Lemos, *Mecânica Analítica* (Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2004), 1<sup>a</sup> ed.