

# O Método das escalas múltiplas em circuitos LC e RLC

(The multiple scales method in circuits LC and RLC)

Lucas Stori de Lara<sup>1</sup> e Taiza A. Sauer do Carmo

Universidade Federal do ABC, Santo André, SP, Brasil

Recebido em 16/10/2009; Aceito em 20/4/2010; Publicado em 17/1/2011

Neste trabalho, concentramo-nos em um método específico na teoria de perturbação, o método das escalas múltiplas. Desenvolvido na mecânica clássica para o tratamento de equações diferenciais não-lineares, este método é aplicado como uma ferramenta matemática na descrição de efeitos perturbativos em vários sistemas físicos. Desta forma queremos mostrar algumas aplicações deste método, em circuitos elétricos LC e RLC.

**Palavras-chave:** métodos assintóticos, método das escalas múltiplas.

In this work, we focus on a specific method of perturbation theory, the method of multiple scales. Developed in classical mechanics for the treatment of non-linear differential equations, this method is applied as a mathematical tool in the description of perturbative effects in several physical systems. Thus we show some applications of this method, electrical circuits LC and RLC.

**Keywords:** .

## 1. Introdução

O método das escalas múltiplas (MEM) é um dos métodos assintóticos de grande eficiência. Seus desenvolvimentos principais incluem oscilações não-lineares, problemas de camadas limites, dinâmica dos fluidos, aerodinâmica e a teoria de movimento de aeronaves [1].

Diretamente, podemos dizer que o MEM tem como idéia central a transformação das equações diferenciais do problema a ser abordado, sendo ela linear ou não, em uma série de equações diferenciais lineares solúveis de forma iterativa.<sup>2</sup>

É importante ressaltar que este método não se restringe apenas aos domínios da física clássica, mas pode ser aplicado, considerando-se modificações adequadas, em problemas no campo da mecânica quântica, com o propósito de se obter soluções, tanto das equações de Heisenberg como da equação de Schrödinger [2–4].

Em especial, aplicamos o MEM na solução de equações diferenciais lineares diretamente no problema de evolução temporal das soluções dinâmicas do tipo oscilador harmônico, tanto no tratamento de circuitos elétricos (LC,RLC) como também em um tipo de acoplamento entre circuitos RLC. [3].

<sup>1</sup>E-mail: lucas.lara@ufabc.edu.br.

<sup>2</sup>Iterativa no sentido que as soluções são obtidas de forma recorrente, ou seja, a correção em primeira ordem depende da solução em ordem zero; a correção em segunda ordem, depende das correções de ordem zero e um e assim sucessivamente.

## 2. Método das escalas múltiplas

Portanto, nesta seção, vamos considerar uma breve revisão dos aspectos gerais do MEM em problemas de física. Em geral, para as equações diferenciais de sistemas não lineares, utilizam-se métodos assintóticos para se obter suas soluções aproximadas [5–7]. Um exemplo interessante é o do movimento oscilatório unidimensional sob ação de uma força restauradora (sistema massa-mola). Para este sistema consideramos a equação para a posição  $u$  do oscilador, dada na forma geral

$$\ddot{u} + f(u) = 0, \quad (1)$$

onde  $f(u)$  pode ser uma função linear ou não. Da equação acima podemos assumir equações do tipo oscilador harmônico, equação de Duffing [7, 9] etc. Portanto  $f(u)$  é um caso geral onde podemos identificar o tipo de linearidade que a equação diferencial pode assumir em um determinado sistema físico.

Prosseguindo, reescrevemos (1) em um sistema de coordenadas conveniente, tal que  $x = u - u_0$ , com  $u_0$  a posição de equilíbrio do oscilador. Assim temos a equação diferencial reescrita na forma

$$\ddot{u} + f(x + u_0) = 0. \quad (2)$$

Verifica-se que  $f$  pode ser expandindo em série de Taylor em torno do ponto  $u_0$ . Com este procedimento, estamos em busca de soluções aproximadas para nossa equação. Logo

$$f(x + u_0) = \sum_{n=1}^N \alpha_n x^n, \quad (3)$$

com

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(u_0), \quad (4)$$

e  $f^{(n)}$  denotando as  $n$ -ésimas derivadas no ponto  $u_0$ . As condições iniciais são dadas pela posição inicial  $u(0)$  e a sua velocidade inicial  $\dot{u}(0)$ . A partir das condições iniciais determina-se as soluções de maneira única.

No método das escalas múltiplas, a idéia principal é aplicar uma *transformação na equação diferencial* em estudo, sendo ela linear ou não, gerando uma série de *equações diferenciais lineares acopladas*. Para tornar mais explícito esta definição o método defini  $n$  variáveis  $T_n$  de tempo, dadas por

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad (5)$$

onde estas variáveis são interpretadas como *diferentes escalas de tempo* (múltiplas escalas) e tomadas como *independentes*, desde que o parâmetro  $\varepsilon$  assuma um valor pequeno,  $\varepsilon \ll 1$ .

Para estas diferentes escalas de tempo, observamos que as derivadas na variável  $t$  também devem ser reescritas em termos das derivadas de  $T_n$  na forma

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (6)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots, \quad (7)$$

$$D_n = \frac{d^n}{dT_n}. \quad (8)$$

As derivadas são separáveis, pela expansão dos termos, de acordo com diferentes ordens de potências de  $\varepsilon$ . Deste modo, pode-se assumir então, uma solução para a Eq. (2), levando-se em conta a expansão dada pela Eq. (3), na forma

$$x(t; \varepsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (9)$$

substituindo primeiramente a Eq. (3) e em seguida as Eqs. (6), (9) na Eq. (2), obtemos, para cada ordem  $n$  em  $\varepsilon$  uma equação diferencial linear para a componente  $x_n$  na série (9):

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0, \\ \varepsilon^1 D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2D_0 D_1 x_0 - \alpha_2 x_0^2, \\ &\vdots \\ \varepsilon^n D_0^2 x_n + \omega_0^2 x_n &= \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que as soluções das equações de ordens menores aparecem como os termos não homogêneos,

$\mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_{n-1})$ , nas equações das ordens maiores. Portanto, este é um método iterativo; por exemplo, a solução da ordem zero influi na solução da primeira ordem, enquanto a solução da segunda ordem está definida pelos efeitos das soluções das ordens zero e um, e a assim por diante. Nas próximas seções vamos explorar o MEM em aplicações nos circuitos LC e RLC.

### 3. Aplicações em circuitos elétricos I

Existe na natureza inúmeros fenômenos que envolvem oscilações. Um exemplo bastante comum é o pêndulo de um relógio, que se move periodicamente (ou seja, repetindo o seu movimento em intervalos de tempo bem definido) em torno de uma posição de equilíbrio. Nos relógios mecânicos de menores dimensões o pêndulo foi substituído por uma massa ligada a uma mola, que tem um comportamento em tudo semelhante ao do pêndulo. E nos relógios eletrônicos substituído por um sistema também oscilante, mas neste caso as oscilações são de natureza elétrica.

O circuito RLC (R designa uma resistência, L uma indutância e C um capacitância) é o circuito elétrico oscilante por excelência. A sua simplicidade permite controlar facilmente os parâmetros que caracterizam o seu funcionamento, o que o torna ainda um excelente candidato para a simulação de outros sistemas oscilantes.

#### 3.1. Circuito LC

Consideremos, para um caso mais didático, o exemplo de circuito LC em série conforme a Fig. 1. O sistema entra em regime oscilatório modificando a posição da chave do circuito. Primeiro nós carregamos o capacitor com uma certa diferença de potencial (ddp)  $V_0$  e em seguida desligamos a chave, após o desligamento a corrente  $i$  circular entre o capacitor e o indutor até o momento em que o capacitor esgotar a sua ddp. Portanto, neste regime, podemos escrever a equação diferencial que descreve este sistema utilizando-se da lei das malhas. Vamos ainda considerar  $\frac{dq}{dt} = i(t)$  e  $q = q(t)$  como a corrente e a carga respectivamente, deste modo temos

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = \mathcal{V}, \quad (10)$$

com  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  como sendo a frequência natural do sistema e  $\mathcal{V} = \frac{V_0}{L}$  a ddp. aplicada. Seja as condições iniciais dada por  $i(0) = 0$  e  $q(0) = 0$ , a solução da Eq. (10) é bastante simples e é dada por

$$q(t) = \frac{\mathcal{V}}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t). \quad (11)$$

Agora, se considerarmos a situação em que a frequência de oscilação do sistema varie com o tempo, muito fracamente e em torno da frequência  $\omega_0$ , poderemos reescrever a nossa equação diferencial como

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \omega^2(t) q(t) = \mathcal{V}, \quad (12)$$

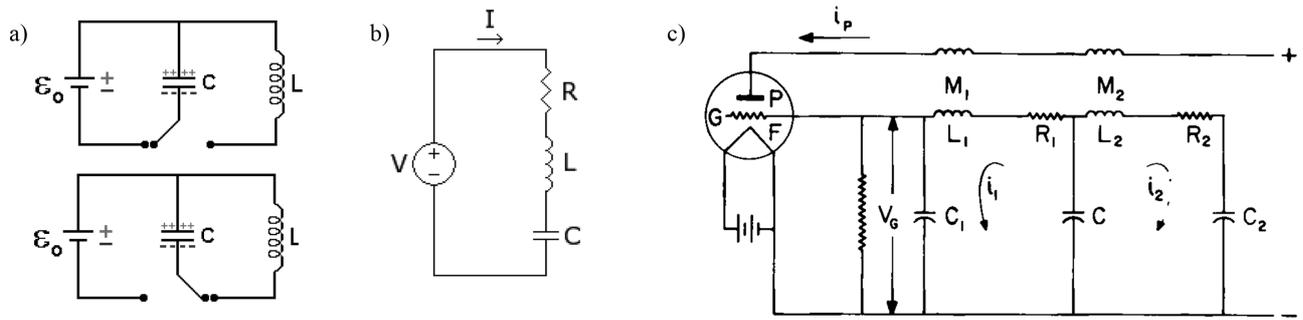


Figura 1 - a) circuito LC; b) circuito RLC ; c) circuito RLC acoplado.

onde  $\omega(t) = \omega_0^2(1 - 2\epsilon \cos(2t))$ ,<sup>3</sup> onde  $\epsilon \ll 1$ , assim o problema pode ser tratado de uma maneira mais elaborada, considerando o efeito perturbativo do parâmetro  $\epsilon$ . Conforme a demonstração do método das escalas múltiplas, o problema pode ser tratado agora nas correções do parâmetro de perturbação, o que torna a nossa solução um resultado aproximado, quando comparado à solução exata. Reescrevendo  $t$  e  $\frac{d^2}{dt^2}$  em termos das novas escalas de tempo e escrevendo as equações para correção em ordem 2 para o parâmetro  $\epsilon$ , temos

$$\begin{aligned} \epsilon^0 \quad D_0^2 q_0 + \omega_0^2 q_0 &= 0, \\ \epsilon^1 \quad D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 &= -2D_0 D_1 q_0 - 2\epsilon \cos(2T_0) q_0, \\ \epsilon^2 \quad D_0^2 q_2 + \omega_0^2 q_2 &= -2D_0 D_1 q_0 - D_1^2 q_0 - 2D_0 D_1 q_1 \\ &\quad - 2\epsilon \cos(2T_0) q_1. \end{aligned}$$

A solução para a correção de ordem zero é imediata

$$q_0 = A(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} + B(T_1, T_2)e^{-i\omega_0 T_0}, \quad (13)$$

com  $B(T_1, T_2) = \bar{A}(T_1, T_2)$  (*barra = cc*)<sup>4</sup> logo, substituímos na correção de ordem 1 e obtemos a seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 &= -2i\omega_0 D_1 A(T_1, T_2)e^{i\omega_0 T_0} \\ &\quad + A(T_1, T_2)e^{i(2+\omega_0)T_0} + B(T_1, T_2)e^{i(2-\omega_0)T_0} + cc, \end{aligned} \quad (14)$$

<sup>3</sup> $\omega(t) = \omega_0^2(1 - 2\epsilon \cos(2t))$  pode ser entendida como um efeito paramétrico na frequência, mantendo o caráter oscilatório na solução

<sup>4</sup> $cc = \text{complexo conjugado}$

<sup>5</sup>Para determinarmos as amplitudes  $A(T_1, T_2)$  e  $B(T_1, T_2)$ , é necessário identificar os termos seculares. No entanto, o que são estes termos seculares? Uma resposta plausível é verificada quando primeiramente estamos buscando soluções que não diverjam para tempos  $t > 0$ , pois interessa-nos soluções regulares para o nosso problema. Estes termos podem ser identificados e entendidos fazendo-se uma analogia ao problema da ressonância em um oscilador harmônico de frequência  $\omega$  sujeito a ação de uma força externa  $g \cos \varphi t$ , cuja frequência da força aplicada  $\varphi$  iguala-se à frequência natural do oscilador. Para este sistema temos a equação do movimento para a posição  $y$  dada por

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g \cos \varphi t.$$

A solução da equação homogênea é igual a

$$y_h(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t,$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são constantes arbitrárias. A solução particular  $y_p$  é uma função do tipo  $t \sin \varphi t$  e  $t$ , onde a independência linear é respeitada. Então a solução particular da equação diferencial (5) tem a forma

$$y_p = \frac{g}{2\varphi} t \sin \varphi t.$$

Desta solução observamos que, no decorrer do tempo  $t$ , a amplitude do oscilador aumenta até alcançar uma amplitude limite, na qual o sistema colapsa antes da oscilação se tornar infinita [10]. É justamente este tipo de comportamento que deveremos eliminar na aplicação do método das escalas múltiplas, pois são os termos seculares que levam às soluções não regulares e devem portanto ser iguais a zero.

onde o termo secular,<sup>5</sup> é identificado pelo termo  $D_1 A(T_1, T_2)$ , o qual é desprezado. Portanto  $A = A(T_2)$ , independente da variável  $T_1$ , com isto a solução para a Eq. (14) corresponde a

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{A(T_2)}{4(\omega_0 + 1)} e^{i(2+\omega_0)T_0} + \\ &\quad \frac{B(T_2)}{4(\omega_0 - 1)} e^{i(2-\omega_0)T_0} + cc. \end{aligned} \quad (15)$$

Finalmente, utilizamos as soluções de  $x_0$  e  $x_1$ , para encontrar a correção de ordem 2.

$$\begin{aligned} D_0^2 q_2 + \omega_0^2 q_2 &= \left[ -2i\omega_0 D_2 A(T_2) + \frac{A(T_2)}{2(\omega_0^2 - 1)} \right] e^{i\omega_0 T_0} \\ &\quad \frac{A(T_2)}{4(\omega_0 + 1)} e^{i(4+\omega_0)T_0} - \frac{B(T_2)}{4(\omega_0 - 1)} e^{i(4-\omega_0)T_0} + cc, \end{aligned} \quad (16)$$

novamente identificamos o termo secular como

$$-2i\omega_0 D_2 A(T_2) + \frac{A(T_2)}{2(\omega_0^2 - 1)} = 0,$$

de forma que a solução para a amplitude  $A(T_2)$  está expressa como

$$A(T_2) = \frac{1}{2} a \exp \left[ -\frac{i}{4\omega_0(\omega_0^2 - 1)} T_2 - ib \right]$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes e podem ser determinadas pelas condições iniciais. Determinada as Amplitudes  $A(T_1, T_2)$ ,  $B(T_1, T_2)$  e as soluções para correção de ordem zero e um para o parâmetro  $\epsilon$ , podemos escrever a solução final como

$$q(t, \epsilon) = \frac{\mathcal{V}}{\omega_0^2}(\cos \phi) + \frac{\mathcal{V}}{4\omega_0^2}\epsilon[(\omega_0 + 1)^{-1} \cos(2t + \phi) - (\omega_0 - 1)^{-1} \cos(2t - \phi)] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (17)$$

com  $\phi$  igual à

$$\phi = \left[ \omega_0 - \frac{\epsilon^2}{4\omega_0(\omega_0^2 - 1)} \right] t.$$

Tomando-se  $\epsilon = 0$ , recuperamos a solução (11). Graficamente podemos expressar a aproximação existente entre as soluções no espaço de fase conforme a Fig. 2, ou seja, a solução exata é dada pela curva em negrito na gráfico 1, enquanto que as demais curvas são soluções aproximadas considerando pequenos valores para o parâmetro  $\epsilon$ . Para a situação em que  $q = q(t)$ , gráfico 2 temos as duas situações, (linha azul) para a solução exata e a (linha vermelha) para a solução aproximada. As curvas perturbativas se aproximam do valor exato no circuito LC, o que demonstra a utilização de método das escalas múltiplas como um tratamento aproximativo de equações diferenciais. Vamos agora analisar o caso do circuito RLC.

### 3.2. Circuito RLC

Consideremos o exemplo de circuito RLC em série conforme a Fig. 1. A equação diferencial que a descreve pode ser facilmente obtida da mesma forma que no caso LC, utilizando-se a lei das malhas

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \mathcal{V}, \quad (18)$$

onde  $\beta = \frac{R}{2L}$  é conhecido como termo de amortecimento,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  é frequência natural do sistema. Ao resolvermos está equação diferencial, verificamos três casos distintos para a frequência de oscilação do circuito de acordo com o tipo de amortecimento causado

- amortecimento crítico -  $\beta^2 = \omega_0^2$ .
- amortecimento subcrítico -  $\beta^2 < \omega_0^2$ .
- amortecimento supercrítico -  $\beta^2 > \omega_0^2$ .

Tal que a solução da equação diferencial para cada um destes casos é dada por

- $\beta^2 = \omega_0^2 - q(t) = \frac{\mathcal{V}}{\omega_0^2} e^{-\omega_0 t}$ .
- $\beta^2 < \omega_0^2 - q(t) = \frac{\mathcal{V}}{\omega_0^2} e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t)$ .

- $\beta^2 > \omega_0^2 - q(t) = \frac{\mathcal{V}}{\omega_0^2} e^{-\beta t} \cosh(\omega_2 t)$ .
- $\omega_i = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ,  $i = 1, 2$ .

Agora, para o propósito de aplicarmos um segundo tipo de perturbação, além do parâmetro  $\beta$ , poderíamos pensar que  $\beta = \beta(t) = \beta(1 - 2\epsilon \cos 2t)$  é dependente do tempo, com o parâmetro  $\epsilon \ll 1$  pequeno. Vamos ainda, para simplificar nossos resultados, utilizar o processo do amortecimento subcrítico. Com está consideração reescrevemos a equação diferencial (18) tal que

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta(t) \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \mathcal{V}. \quad (19)$$

Realizando a transformação,  $t$ ,  $\frac{d}{dt}$  e  $\frac{d^2}{dt^2}$  em termos das novas escalas de tempo, e ainda escrevendo as equações para correção até ordem 1 no parâmetro  $\epsilon$ , temos

$$\begin{aligned} \epsilon^0 D_0^2 q_0 + 2\beta D_0 q_0 + \omega_0^2 q_0 &= 0 \\ \epsilon^1 D_0^2 q_0 + 2\beta D_0 q_0 + \omega_0^2 q_0 &= -2D_0 D_1 q_0 \\ &\quad - 2\beta(D_1 q_0 + 2\epsilon \cos(2T_0) D_0 q_0), \end{aligned}$$

A solução para a correção de ordem zero, considerando o amortecimento subcrítico, é dada por

$$q_0 = A(T_1) e^{(-\beta+i\omega)t} + B(T_1) e^{-(\beta+i\omega)t}, \quad (20)$$

com  $B(T_1) = \bar{A}(T_1)$  as amplitudes,  $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}$  e  $\beta^2 < \omega_0^2$ . Substituindo a solução (20) na equação diferencial de correção em ordem 1 temos para os termos a direita desta equação

$$\begin{aligned} &= -2i\omega [D_1 A(T_1)] e^{(-\beta+i\omega)t} + (\beta^2 - i\beta\omega) \times \\ &A(T_1) \left( e^{(-\beta+i(\omega+2))t} + e^{(-\beta+i(\omega-2))t} \right) + cc, \quad (21) \end{aligned}$$

tal que o termo secular é identificado pelo termo  $D_1 A(T_1)$ . Consequentemente  $A(T_1) = A$ , é uma constante e a solução particular da Eq. (22) é dada por

$$q_1 = \frac{\mathcal{V}\beta}{\omega_0^2(\omega^2 - 1)} e^{-t\beta} (f(t)\beta - g(t)\omega). \quad (22)$$

onde

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{sen}(2t)\text{sen}(\omega t)\omega + \cos(\omega t) \cos(2t), \\ g(t) &= \text{sen}(2t) \cos(\omega t)\omega - \text{sen}(\omega t) \cos(2t). \end{aligned}$$

Determinadas as soluções para correção de ordem zero e um no parâmetro  $\epsilon$ , podemos escrever a solução final como

$$q(t, \epsilon) = \frac{\mathcal{V}}{\omega_0^2} e^{-\beta t} \left( \cos(\omega t) + \frac{\epsilon\beta}{(\omega^2 - 1)} (f(t)\beta - g(t)\omega) \right), \quad (23)$$

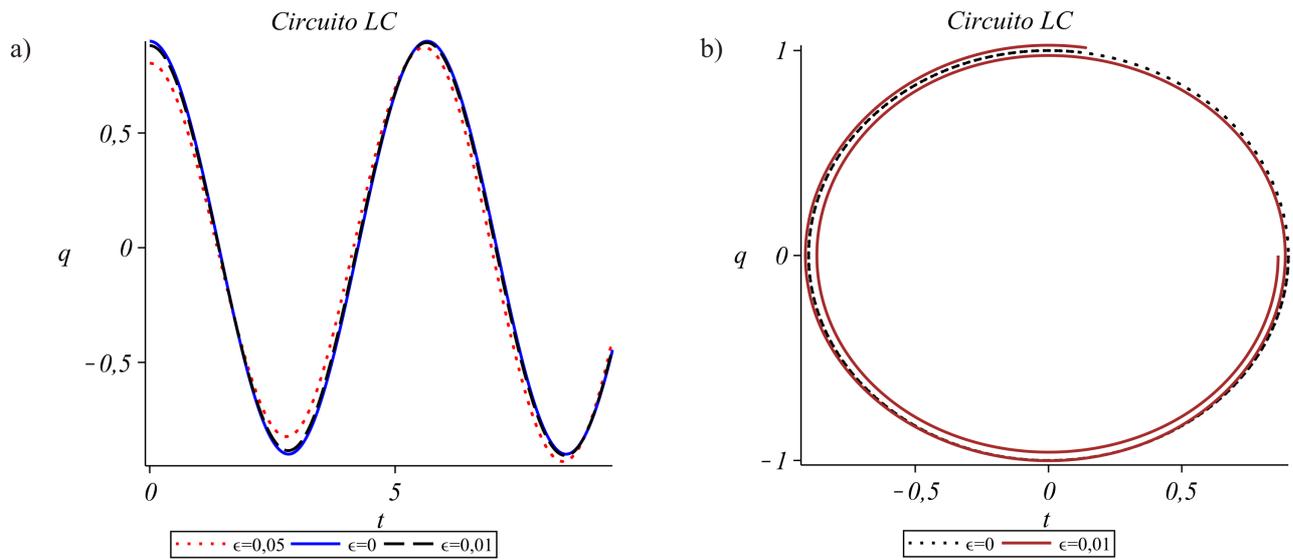


Figura 2 - a) Carga  $q(t)$  pelo tempo (linha azul) - solução exata, (linha tracejada vermelha e negra) - solução aproximada em  $\epsilon$ . b) Espaço de fase, (linha em negro) - solução exata, (linha marrom) - solução aproximada em  $\epsilon$ .

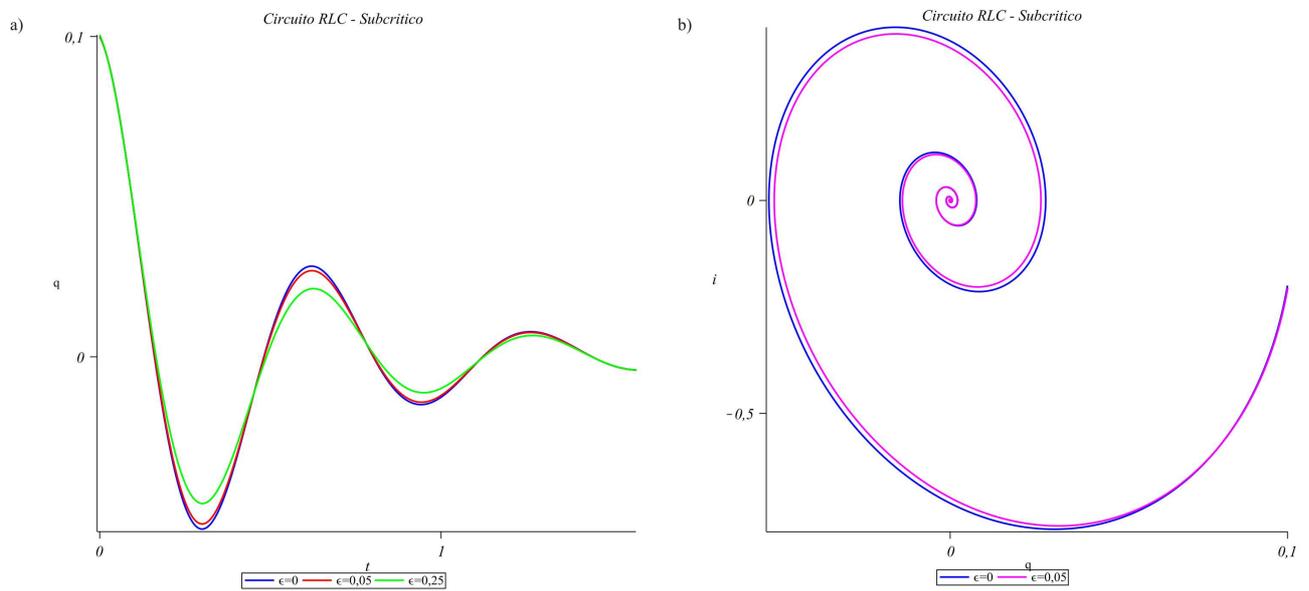


Figura 3 - a) Carga  $q(t)$  pelo tempo, (linha azul)-solução exata, (linha tracejada vermelha e verde) - solução aproximada em  $\epsilon$ . b) Espaço de fase (linha azul) - solução exata, (linha magenta) - solução aproximada em  $\epsilon$ .

Tomando-se  $\epsilon = 0$ , recuperamos a solução exata. Graficamente podemos expressar a aproximação existente entre as soluções no espaço de fase conforme a Fig. 3

#### 4. Aplicações em circuitos elétricos II

Como um exemplo de circuitos acoplados consideramos um circuito constituído por dois osciladores RLC acoplada a um tubo de vácuo [11], como mostrado na Fig. 1. O tubo de vácuo consiste de um catodo (filamento)  $F$  aquecido por uma bateria de modo que emitem elétrons, uma placa carregada positivamente  $P$  (ânodo) de modo que atrair os elétrons emitidos pelo filamento e uma grade  $G$ , que consiste em um malha grossa para controlar o fluxo de elétrons do cátodo para o ânodo. Este controle é realizado por manter a tensão da rede a mesma que através do capacitor  $C_1$ . A corrente na rede é mantida por insignificante pequenos conectando-o com um resistor grande  $R_G$ .

##### 4.1. Circuitos RLC acoplados

Para este caso, vamos considerar as equações diferenciais que regem este sistema estão dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + 2\beta_1 \frac{dq_1}{dt} + \omega_1^2 q_1 &= \epsilon \left( (\alpha_1 - \alpha_2 q_1^2) \frac{dq_1}{dt} + \alpha_3 q_2 \right), \\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} + 2\beta_2 \frac{dq_2}{dt} + \omega_2^2 q_2 &= \epsilon \left( (\alpha_1 - \alpha_2 q_2^2) \frac{dq_2}{dt} + \alpha_3 q_1 \right). \end{aligned}$$

onde as condições iniciais estão dadas por  $\mathcal{S} = \{q_1(0) = 1, q_2(0) = -1, \frac{dq_1(0)}{dt} = 0, \frac{dq_2(0)}{dt} = 0\}$ . As constantes  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$  são expressas em termos da corrente total do circuito, o parâmetro  $\epsilon$  está relacionada a indutância mútua  $M_1, M_2$ , porém não vamos entrar em detalhes maiores a respeito destes valores, vamos apenas nos concentrar na resolução das equações diferenciais propostas. Caso o leitor queira mais informações pode procurar em [1, 11]. Prosseguindo com nossos cálculos vamos aplicar o MEM e encontrar as equações diferenciais que regem o sistema até uma a correção de ordem 1 e em seguida analisarmos gráficamente o efeito da perturbação nas soluções. Logo as equações são escritas como

$$\begin{aligned} \epsilon^0 \\ D_0^2 q_{10} + 2\beta_1 D_0 q_{10} + \omega_1^2 q_{10} &= 0 \\ D_0^2 q_{20} + 2\beta_2 D_0 q_{20} + \omega_2^2 q_{20} &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon^1 \\ D_0^2 q_{11} + 2\beta_1 D_0 q_{11} + \omega_1^2 q_{11} &= \\ -2\beta_1 D_1 q_{10} - (\alpha_1 - \alpha_2 q_{10}^2) D_0 q_{10} - \alpha_3 q_{20} \\ D_0^2 q_{21} + 2\beta_2 D_0 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} &= \\ -2\beta_2 D_1 q_{20} - (\alpha_1 - \alpha_2 q_{20}^2) D_0 q_{20} - \alpha_3 q_{10}. \end{aligned}$$

Considerando o caso de amortecimento subcrítico a solução das equações diferenciais em ordem 0 podem ser expressas como

$$\begin{aligned} q_{10} &= A_1(T_1) e^{(-\beta_1 + (\beta_1^2 - \omega_1^2)^{1/2})T_0} + cc \\ q_{20} &= A_2(T_1) e^{(-\beta_2 + (\beta_2^2 - \omega_2^2)^{1/2})T_0} + cc, \end{aligned} \quad (24)$$

que ao ser substituída na correção em ordem 1 no parâmetro  $\epsilon$ , encontramos as seguintes equações seculares que determinaram as amplitudes  $A_1(T_1), A_2(T_1)$

$$\begin{aligned} D_1 A_1(T_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1 \beta_1}{(\beta_1^2 - \omega_1^2)^{1/2}} - \alpha_1 \right) A_1(T_1) &= 0 \\ D_1 A_2(T_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1 \beta_2}{(\beta_2^2 - \omega_2^2)^{1/2}} - \alpha_1 \right) A_2(T_1) &= 0. \end{aligned}$$

Considerando as condições iniciais e o caso do amortecimento subcrítico, encontramos como solução para as amplitudes

$$\begin{aligned} A_1(T_1) &= \frac{1}{2} e^{\frac{\alpha_1 T_1}{2}} \frac{i\beta_1 + \tau_1}{\tau_1} \\ A_2(T_1) &= -\frac{1}{2} e^{\frac{\alpha_1 T_1}{2}} \frac{i\beta_2 + \tau_2}{\tau_2}, \end{aligned} \quad (25)$$

onde  $\tau_i = \sqrt{\omega_i^2 - \beta_i}, i = 1, 2$ . Portanto temos como solução geral até termos na correção de ordem 1

$$\begin{aligned} q_1(t) &= e^{-\Gamma_1 t} (\cos(\tau_1 t) \cos(\sigma_1 t) - \text{sen}(\tau_1 t) \text{sen}(\sigma_1 t)) \\ q_2(t) &= e^{-\Gamma_2 t} (\cos(\tau_2 t) \cos(\sigma_2 t) - \text{sen}(\tau_2 t) \text{sen}(\sigma_2 t)), \end{aligned} \quad (26)$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (\beta_1 - \frac{\epsilon \alpha_1}{2}), \quad \Gamma_2 = (\beta_2 - \frac{\epsilon \alpha_1}{2}), \\ \sigma_1 &= \frac{\epsilon \alpha_1}{2\tau_1 \beta_1} \quad \sigma_2 = \frac{\epsilon \alpha_1}{2\tau_2 \beta_2}. \end{aligned}$$

Tomando-se  $\epsilon = 0$ , recuperamos a solução exata para o caso subcrítico. Graficamente podemos expressar o MEM conforme a Fig. 4.

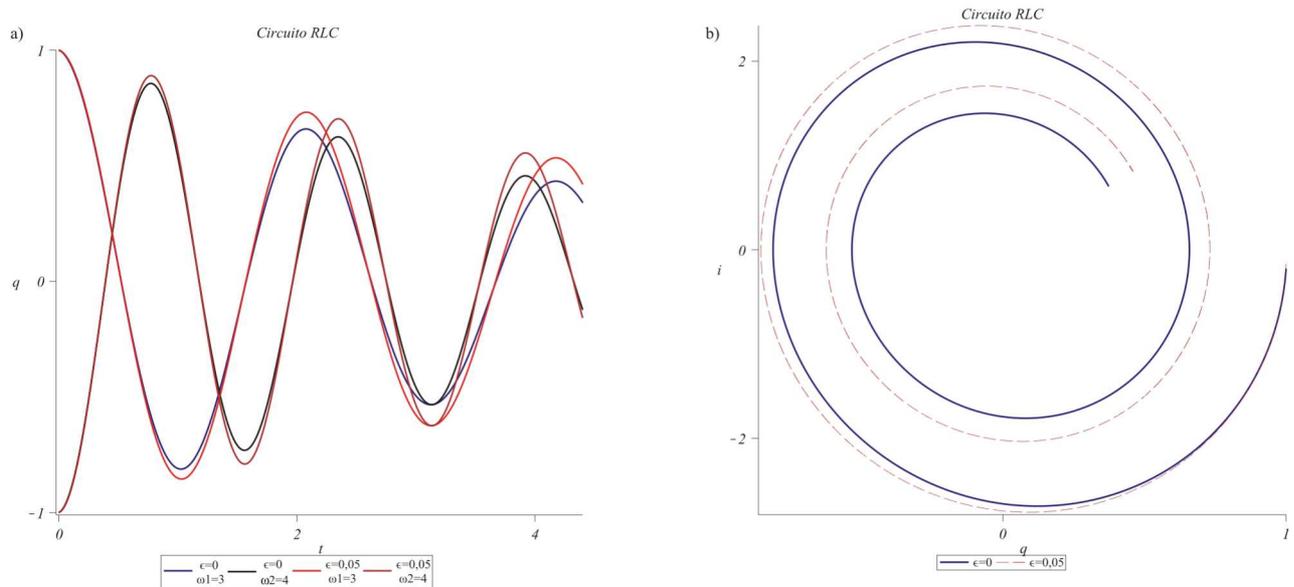


Figura 4 - a) Carga  $q(t)$  pelo tempo, (linha azul) - solução exata (linha tracejada vermelha e negra) - solução aproximada em  $\epsilon$ . b) Espaço de fase (linha azul) - solução exata (linha magenta) - solução aproximada em  $\epsilon$ .

## 5. Conclusão

Mostramos que o método das escalas múltiplas tem como idéia central a transformação das equações diferenciais do problema a ser abordado, em uma série de equações diferenciais *lineares* solúveis de forma *integrativa*. Apartir desta idéias buscamos apresentar uma aplicação desta ferramenta matemática em problemas envolvendo circuitos LC e RLC, analisando seus resultados perturbativos. É importante salientar o limite de validade destas soluções aproximadas, sendo que aqui não foram abordadas e sim exploradas livremente. Em cada caso é importante investigar estes limites de forma acurada, demonstrando fisicamente estes efeitos.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a UFABC pelo apoio financeiro. E LSL agradece ao prof. Dr. Antonio Sérgio M. de Castro, pela orientação e discussões acadêmicas.

## Referências

- [1] A.H. Nayfeh, *Perturbation Methods* (1973).
- [2] M. Janowicz, *Phys. Reports* **375**, 327 (2003).
- [3] L.S. Lara, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa (2007).
- [4] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (1994); C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics I* (1977); J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (1965).
- [5] C.M. Bender and L.M.A. Bettencourt, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 20 (1996).
- [6] C.M. Bender and L.M.A. Bettencourt, *Phys. Rev. D*, **54**, 12 (1996).
- [7] A.H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques* (1981).
- [8] J. Kevorkian and J.D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics* **34** (1981).
- [9] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 1980).
- [10] K.D. Machado *Equações Diferenciais Aplicadas à Física* (Editora UEPG, 2000), 2ª ed., p. 162-164.
- [11] A.J. Tondl, *Sound Vib.* **42**, 261 (1975).