

Conceitos básicos sobre a difração e a dispersão de ondas eletromagnéticas

(Basic concepts on diffraction and dispersion of electromagnetic waves)

C.A. Dartora¹, K.Z. Nobrega², Marina H. Krisam Matielli¹,
Fillipi Klos Rodrigues de Campos¹ e H. Tertuliano dos Santos Filho¹

¹ Departamento de Engenharia Elétrica - UFPR

² Departamento de Eletro-Eletrônica - IFMA

Recebido em 8/5/2010; Aceito em 26/1/2011; Publicado em 21/3/2011

O objetivo deste trabalho é apresentar os conceitos básicos relacionados aos fenômenos de difração e dispersão, permitindo ao leitor perceber as diferenças fundamentais entre os mesmos. Utilizam-se como ferramentas matemáticas fundamentais as noções gerais da equação de ondas, as equações de Maxwell para ondas planas uniformes e a transformada de Fourier para mostrar que a difração está associada à superposição de ondas monocromáticas com vetores de onda em diferentes direções, tratando-se de um fenômeno espacial, enquanto a dispersão corresponde à superposição de ondas de diferentes frequências e tem portanto um caráter temporal. Embora a ênfase seja dada para as ondas eletromagnéticas, os principais resultados podem ser prontamente generalizados para ondas de qualquer natureza (som, ondas em fluidos ou ondas de matéria no caso da mecânica quântica)

Palavras-chave: difração, dispersão, ondas eletromagnéticas.

The aim of the present work is to present the basic concepts related to the phenomena of diffraction and dispersion, allowing an understanding of fundamental differences between them. To do this, it was used as the main mathematical tools the general notions of wave equation, Maxwell's equations for uniform plane waves and Fourier transforms, showing that diffraction is a consequence of superposition of monochromatic waves with wave-vectors in distinct directions, being in essence a spatial phenomenon, while dispersion corresponds to the sum of waves having different frequencies producing a phenomenon with an essential temporal character. Despite the fact that we emphasized electromagnetic waves the main results can be promptly generalized to waves of any nature (sound, waves in fluids or matter waves in quantum mechanics)

Keywords: diffraction, dispersion, electromagnetic waves.

1. Introdução

Em cursos de graduação em física e engenharia elétrica o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas tem grande relevância, sobretudo pela ampla gama de aplicações das mesmas. Vários são os exemplos de aplicações das ondas eletromagnéticas: i) a transmissão de energia/informação em sistemas de comunicação, realizada através de propagação não guiada ou sem-fio (telefonia celular, difusão de rádio e TV) ou propagação guiada (sistemas ópticos baseados em fibra óptica, linhas de transmissão); ii) a utilização em medicina e biologia, onde são amplamente empregados atualmente os lasers oftalmológicos e aplicação de radiação eletromagnética para tratamento de tumores, aquecimento de tecidos, manipulação de partículas e

moléculas através de pinças ópticas; iii) em radioastronomia, telemetria, sistemas de GPS, metrologia e sistemas de radar. Dois fenômenos fundamentais de naturezas distintas na compreensão da propagação de ondas eletromagnéticas são a dispersão e difração de ondas, normalmente abordados de maneira superficial ou até mesmo omitidos em um curso introdutório de eletromagnetismo, de tal forma que poucos estudantes realmente conseguem compreender a diferença entre os mesmos, embora haja uma vasta literatura tratando do tema [1-12].

O objetivo deste trabalho é apresentar os conceitos básicos relacionados à dispersão e difração de ondas eletromagnéticas (oems) de maneira pedagógica e clara, de modo a facilitar a compreensão das diferenças entre estes fenômenos, bem como apresentar o formalismo

¹E-mail: cadartora@eletrica.ufpr.br.

matemático necessário para descrevê-los. É importante ressaltar que a maioria dos resultados obtidos com oems podem ser generalizados para ondas de outra natureza, como ondas mecânicas (som, ondas em fluidos), ou ondas de matéria no caso da mecânica quântica.

Antes de fazer uma análise quantitativa da difração e dispersão utilizando as equações de Maxwell e a equação de ondas, os fenômenos serão apresentados de maneira qualitativa, distinguindo-os conceitualmente. Para tanto, é bastante útil ao leitor lembrar aqui de dois experimentos que usualmente fazem parte do programa de disciplinas em física básica, a saber: i) o experimento de difração da luz por um único orifício (ver Fig. 1); ii) o experimento de decomposição da luz branca no espectro de cores do arco-íris através de um prisma, ilustrado na Fig. 2.

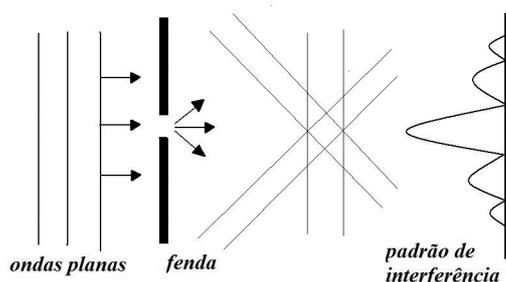


Figura 1 - Experimento de difração por um orifício: pelo princípio de Huygens cada ponto da onda plana incidente na abertura é fonte de ondas esféricas secundárias que se superpõem e ao se propagar produzem a interferência observada no anteparo em $z = z_0$.

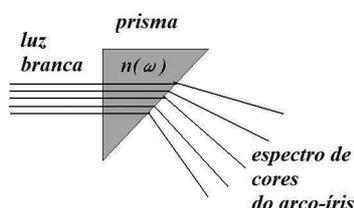


Figura 2 - Experimento de decomposição da luz por um prisma: a luz branca incide inicialmente formando um ângulo reto com a interface ar/prisma. Na interface prisma/ar, assumindo que o índice de refração do prisma seja dependente da frequência, é fácil ver que a lei de Snell $n(\omega) \sin \theta_i = \sin \theta_t$, onde θ_i é o ângulo da onda incidente na interface prisma/ar, prevê diferentes ângulos de refração, fazendo com que cada cor do espectro da luz branca seja refratada em um ângulo específico e diferente das demais.

Enquanto que o primeiro experimento ilustra o fenômeno de difração e está relacionado à superposição e interferência de ondas planas uniformes que se propagam em diferentes direções do espaço, o segundo é representativo da classe dos fenômenos dispersivos e corresponde à superposição de ondas monocromáticas de diferentes frequências. A partir daí, percebe-se que a difração está diretamente associada a características de natureza espacial da onda, enquanto que a dispersão é inerentemente um fenômeno de natureza temporal, haja vista que o dual da frequência é o tempo. Para melhor

entendimento e por uma questão de simplicidade na abordagem qualitativa seguinte, serão omitidos alguns aspectos do caráter ondulatório. A difração e a dispersão serão ilustrados usando dois exemplos bastante intuitivos, onde as ondas podem ser representadas por partículas cujo vetor velocidade está bem definido, o que seria equivalente a analisar as ondas sob o ponto de vista da óptica geométrica de raios.

Na descrição do fenômeno difrativo, considere a situação ilustrada na Fig. 3, onde pode-se imaginar, por exemplo, as partículas como pessoas ou atletas de alguma prova de corrida. Se na posição $z = 0$, correspondente ao ponto de partida, existirem 5 corredores distribuídos sobre o que denominaremos eixo x , em um espaço Δx_0 , a densidade de corredores será dado por $S_0 = 5/\Delta x_0$ pessoas por unidade de comprimento. Se todos os corredores se deslocarem rigorosamente com a mesma velocidade v , em módulo, mas cada um em uma direção distinta, à medida que o tempo transcorre eles terão percorrido uma distância $d = vt$ em relação à sua posição inicial mas estarão não somente se distanciando da linha de partida $z = 0$ como também uns em relação aos outros, embora a distância percorrida por todos será a mesma. Deste modo, em uma posição correspondente a $z = z_0$ o prolongamento da linha correspondente à direção da velocidade de cada corredor faz com que as 5 pessoas se distribuam agora em um espaço Δx , que é maior do que o valor inicial Δx_0 . Consequentemente a densidade de corredores por unidade de comprimento será $S = 5/\Delta x < S_0$. Todavia o número de pessoas se conservou, pois não há “perdas” no meio de propagação.

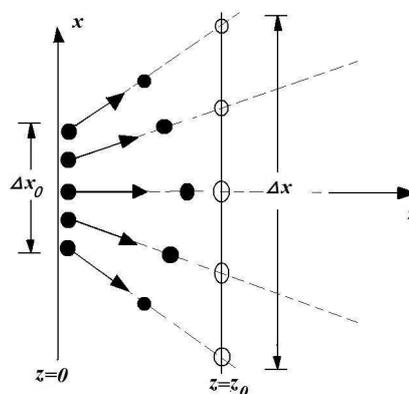


Figura 3 - Panorama pictórico do fenômeno de difração: um grupo de corredores idênticos que tem mesma velocidade em módulo, mas com diferentes direções de propagação. À medida que se afastam da linha $z = 0$ eles se espalham, diminuindo a densidade de corredores por unidade de comprimento. Os efeitos de interferência, inerentemente ondulatórios, não podem ser explicados nesse modelo simplista.

A situação ocorrida corresponde ao efeito difrativo de uma oem propagando-se em um meio homogêneo sem perdas, representada por um campo elétrico $E_x(x, z, t) = A(x, z)e^{i\omega t}$, com apenas uma frequência ω . À proporção que esta oem se propaga, a amplitude $A(x, z)$ modifica-se espacialmente, tal que a largura es-

pacial da função $A(x, z)$ deve aumentar quando comparada com $A(x, z = 0)$, porém sem haver dissipação de energia.

Torna-se evidente que a difração é um fenômeno espacial que ocorre devido à superposição de ondas (ilustradas aqui como partículas) que se propagam em diferentes direções, todavia com a mesma frequência e velocidade de propagação, em módulo, fato esse ilustrado pelos corredores idênticos com a única diferença na direção das velocidades de cada um. Uma consequência geral do fenômeno é a suavização da densidade de potência, representado pela diminuição da densidade de pessoas por unidade de comprimento. Não havendo perdas no meio a potência total deve se conservar, o que aqui é representado pela conservação do número de pessoas. É importante lembrar que foi omitido o fenômeno de interferência, que é inerentemente ondulatório e se manifesta na forma do aparecimento de máximos e mínimos, devido a superposições construtivas e destrutivas de ondas que não podem ser explicados nesse panorama pictórico. Por fim, uma última pergunta que pode surgir é: Por que os corredores não estão correndo todos na mesma direção? Qualitativamente, a explicação para tal fato reside no princípio de Huygens, que mostra que cada ponto de uma abertura (no nosso caso a linha de comprimento Δx_0) deve agir como fonte de ondas esféricas.

No tangente à análise do fenômeno da dispersão, será então considerado um grupo de pessoas em uma prova de atletismo dispostas conforme ilustração da Fig. 4. Para considerar apenas os efeitos dispersivos, os atletas irão se movimentar na mesma direção sem aquela variação de direção anteriormente trabalhada, *i.e.*, a disposição espacial total dos mesmos é mantida constante, Δx_0 . Tal situação corresponde à existência de um guia de ondas na qual a distribuição transversal $A(x, z)$ é dita modo de propagação do guia. Aqui, a analogia são as raias, estruturas que servem para guiar os atletas ao longo de determinado percurso. Desta forma, todos os atletas irão correr na mesma direção, porém cada um deles terá uma velocidade (frequência) distinta, correspondente ao seu desempenho individual.

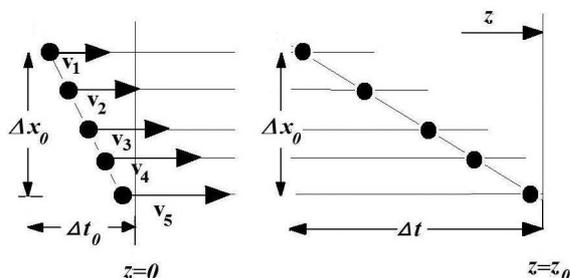


Figura 4 - Panorama pictórico do fenômeno de dispersão: um grupo de corredores que tem velocidades diferentes mas na mesma direção de propagação. À medida que se afastam da linha $z = 0$ eles se espalham ao longo de z , e conseqüentemente haverá um intervalo de tempo não nulo para todos os corredores atravessarem a linha de chegada $z = z_0$.

Assuma que $v_5 > v_4 > v_3 > v_2 > v_1$ e observe que, uma vez especificadas as distâncias relativas iniciais entre os corredores, o tempo necessário para que todos atravessem a linha $z = 0$ corresponde a um intervalo de tempo Δt_0 . A medida em que correm em direção à linha de chegada, digamos em $z = z_0$, a distância relativa entre o corredor mais rápido e o mais lento aumenta, fazendo com que o intervalo de tempo necessário para que todos os atletas atravessem a linha $z = z_0$ seja $\Delta t > \Delta t_0$. Cabe ressaltar, como exemplo, o caso em que todos corredores estejam inicialmente sobre a linha $z = 0$ e portanto quando é dada a largada, $\Delta t_0 \rightarrow 0$. Entretanto na linha de chegada $z = z_0$ o intervalo necessário é claramente não nulo, ou seja, $\Delta t \neq 0$, uma vez que haverá um intervalo de tempo entre a chegada do corredor mais rápido e do mais lento. É claro que em um meio sem perdas isto corresponderia à chegada de todos os corredores ao final da prova e nesse caso a densidade inicial $S_0 = 5/\Delta t_0$ será maior do que a densidade final $S = 5/\Delta t$, mas o número total se conserva, ou em outras palavras, para um meio sem perdas a densidade de potência deve se conservar. Esse efeito ilustra de maneira pictórica a dispersão de ondas eletromagnéticas, um fenômeno claramente temporal que envolve a superposição de ondas de diferentes velocidades em um mesmo meio de propagação, o que é possível somente se as mesmas possuírem diferentes frequências. Mais uma vez o modelo simplista apresentado não permite levar em conta efeitos de interferência, inerentemente ondulatórios.

Conforme discutido acima, na sua forma mais simples a difração se dá pela superposição de ondas monocromáticas, ou seja, de mesma frequência e mesma velocidade de propagação, mas com vetores de onda em diferentes direções, tendo portanto natureza espacial. Esse e outros aspectos da difração foram explorados sob o ponto de vista de um princípio de incerteza na Ref. [6]. Por outro lado, a dispersão é um fenômeno temporal, que ocorre devido à superposição de ondas de diferentes frequências e que para acontecer necessita que o meio tenha índice de refração n variável com a frequência, ou seja, a velocidade de propagação $v = c/n$ da onda torna-se dependente da frequência, embora a direção de propagação de todas as ondas nesse meio possa ser a mesma. Evidentemente, um campo eletromagnético geral, dado pela superposição de ondas de diferentes frequências e diferentes direções de propagação, estará sujeita aos dois fenômenos ocorrendo simultaneamente. Uma consequência imediata da difração é a redistribuição da densidade de potência da onda resultante no espaço à medida em que ela se propaga enquanto que a dispersão produz uma redistribuição da densidade de energia no tempo à medida em que a onda se propaga.

Baseado na discussão qualitativa prévia, devem ficar claras algumas características fundamentais no que se refere à dispersão e à difração: i) geralmente, na propa-

gação de uma oem em um meio não guiado, a difração sempre atua e, sob algumas circunstâncias, a dispersão pode ser desconsiderada, a depender, por exemplo, da largura inicial do pulso (multifrequencial), das características inerentes do meio ($\varepsilon(\omega)$) ou da polarização da oem; ii) por outro lado, na propagação de uma oem em um meio guiado ocorre o contrário, *i.e.*, a dispersão usualmente atua por pelo menos um desses fatores previamente mencionados, ao passo que a difração pode ser negligenciada pois normalmente a distribuição espacial de campo está condicionada aos modos do guia de onda utilizado.

Uma vez discutidos que os conceitos qualitativos, pode-se tenham sido entendidos, podemos passar para um desenvolvimento mais rigoroso, baseado nas equações de Maxwell. Em um meio homogêneo e sem cargas livres as ondas planas uniformes devem satisfazer as equações de Maxwell dadas na forma [3]

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H}, \quad (3)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon_c\mathbf{E}, \quad (4)$$

onde o espaço (\mathbf{k}, ω) de vetores de onda \mathbf{k} e frequência ω é o recíproco de (\mathbf{x}, t) , de posições \mathbf{x} e tempo t , \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{H} é o campo magnético, μ é a permeabilidade magnética do meio, ε_c a permissividade dielétrica complexa do meio, ω a frequência angular da onda, $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor de onda e $\hat{\mathbf{n}}$ é a direção de propagação da onda plana ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$). É fácil mostrar das equações acima que $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon_c$, e a solução geral de ondas planas uniformes para o campo elétrico pode ser escrita na forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})], \quad (5)$$

sendo \mathbf{E}_0 um vetor de polarização ortogonal à direção $\hat{\mathbf{n}}$. No espaço livre \mathbf{E} , \mathbf{H} e $\hat{\mathbf{n}}$ formam uma triade de vetores ortogonais. Tanto as componentes do campo elétrico quanto as componentes do campo magnético satisfazem uma equação de ondas no domínio (\mathbf{x}, ω) denominada equação de Helmholtz [1-6], dada por

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0, \quad (6)$$

onde ∇^2 é o operador laplaciano, $k = n\omega/c$ é o número de onda no meio, ω é a frequência temporal, n é o

índice de refração do meio e Ψ é um escalar que representa uma componente de campo elétrico ou magnético. Observa-se ainda que k relaciona-se ao comprimento de onda λ no meio através da relação $k = 2\pi/\lambda$. Uma equação similar à Eq. (6) aplica-se também para ondas mecânicas, como o som, por exemplo, caracterizando a universalidade do fenômeno.

2. A difração na aproximação paraxial

Os mecanismos essenciais da difração estão contidos na equação de Helmholtz [1-6]. Ao contrário da dispersão, que ocorre em meios cujas características dependam da frequência, $n(\omega)$, a difração deve ocorrer mesmo para vácuo, conforme já mencionamos. Agora vamos assumir uma solução da forma

$$\Psi(x, y, z) = \Phi(x, y, z)e^{-ikz}, \quad (7)$$

que permite remover a variação rápida na direção z , se cada onda plana uniforme que compõe a função Ψ tiver vetor de onda \mathbf{k} com a componente $k_z \approx k \gg (k_x, k_y)$ e nesse caso podemos falar que a direção preferencial de propagação está no eixo z . É fácil demonstrar que

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} - k^2 \Phi \right] e^{-ikz},$$

e uma vez que a variação rápida esteja contida no termo e^{-ikz} , a condição abaixo será naturalmente satisfeita

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|,$$

permitindo negligenciar a derivada de segunda ordem de Φ em relação à variável z . Podemos reescrever a Eq. (6) na forma conhecida como equação de propagação paraxial [1,2]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \Phi, \quad (8)$$

onde $\nabla_{\perp}^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ corresponde à parte transversal do operador laplaciano, dependendo somente das segundas derivadas em relação às variáveis (x, y) . Observe que a equação acima tem a mesma forma de uma equação de Schroedinger para uma partícula livre, mas aqui a variável z faz o papel do tempo t . Podemos definir agora um par de transformadas de Fourier, na forma

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dk_x dk_y, \quad (9)$$

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, z) e^{ik_x x} e^{ik_y y} dx dy, \quad (10)$$

e aplicar essas relações à Eq. (8). Observando as propriedades matemáticas das transformadas, é fácil ver que a seguinte substituição é possível

$$\nabla_{\perp}^2 \rightarrow -(k_x^2 + k_y^2),$$

permitindo obter a equação

$$\frac{d}{dz} \tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \tilde{\Phi}(k_x, k_y, z). \quad (11)$$

Dada a condição inicial $\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0)$ encontrada a partir da distribuição espacial $\Phi(x, y, 0)$ no plano $z = 0$ podemos escrever a solução da equação acima como

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) \exp \left[\frac{i}{2k} (k_x^2 + k_y^2) z \right],$$

e finalmente obtêm-se o conjunto de equações que descreve a teoria conhecida com óptica de Fourier [2]

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) \exp \left[\frac{iz}{2k} (k_x^2 + k_y^2) \right] e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dk_x dk_y, \quad (12)$$

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, 0) e^{ik_x x} e^{ik_y y} dx dy. \quad (13)$$

Observe que a solução $\Psi(x, y, z) = \Phi(x, y, z) e^{-ikz}$ é uma superposição adequada de ondas planas uniformes, $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ contendo diferentes vetores de onda $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ de mesma frequência ω e mesmo valor para o produto $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c$ mas onde assumimos que $k_z \approx k \gg k_x, k_y$ na chamada aproximação paraxial. Aliás o próprio nome *paraxial* indica “paralelo ao eixo”, e então estamos tratando de uma superposição de ondas em direções diferentes mas que diferem apenas ligeiramente da direção z . É importante lembrar que Ψ representa uma das componentes do campo elétrico e podemos então escrever

$$\mathbf{E} = \Phi(x, y, z) e^{i(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}, \quad (14)$$

sendo a densidade de potência calculada pelo vetor de Poynting, que tem como resultado na aproximação paraxial o seguinte resultado

$$\mathbf{S}_{\text{med}} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\Phi(x, y, z)|^2 \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}. \quad (15)$$

Um exemplo bastante comum para a aplicação das expressões acima é uma fenda retangular de lados $L_x = d$ e L_y , localizada no plano $z = 0$ e sendo iluminada por uma onda plana uniforme, com dimensões tais que $L_x \ll L_y$. Nesse caso, podemos assumir para todos os fins práticos que a condição inicial é dada por $\Phi(x, y, 0) = \Phi_0$ constante para toda a região definida pela fenda, $-\infty < y < \infty$ e $-d/2 \leq x \leq d/2$. Fazendo a transformada de Fourier de $\Phi(x, y, 0)$ obtemos facilmente

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) = 2\pi d \Phi_0 \frac{\sin[k_x d/2]}{k_x d/2} \delta(k_y),$$

sendo $\delta(k_y)$ a função delta de Dirac. Inserindo a ex-

pressão acima na Eq. (12) tem-se a equação

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\Phi_0 d}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[k_x d/2]}{k_x d/2} \exp \left[\frac{ik_x^2 z}{2k} \right] e^{-ik_x x} dk_x, \quad (16)$$

que pode ser resolvida de maneira numérica e foi analisada em maiores detalhes na Ref. [6]. A Fig. 5 ilustra o efeito de difração por uma fenda retangular.

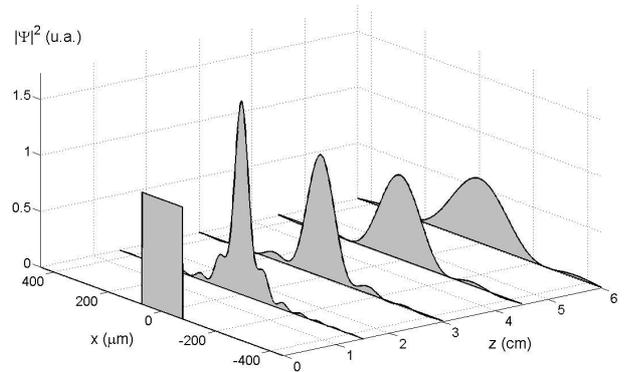


Figura 5 - Perfil transversal da densidade de potência $S = |\Psi|^2$, em unidades arbitrárias, à medida em que a onda difratada se propaga. Foram utilizados os valores $\lambda = 632 \text{ nm}$ e $d = 150 \text{ }\mu\text{m}$.

Todavia, observe que quanto maior o valor de z mais oscilações ocorrem devido ao termo de fase $\exp \left[\frac{ik_x^2 z}{2k} - ik_x x \right]$, portanto a maior contribuição para a integral acima em valores grandes de z ocorre para valores de fase estacionária, ou seja, na condição em que

$$\frac{d}{dk_x} \left[\frac{k_x^2 z}{2k} - k_x x \right] = 0,$$

que corresponde ao valor $k_x = k \cdot x / z$ e produz uma

solução aproximada na forma abaixo

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\Phi_0 d}{2\pi\sqrt{z}} \frac{\sin\left[\frac{kdx}{2z}\right]}{\frac{kdx}{2z}}. \quad (17)$$

Cabe observar que o fator de decaimento do campo com \sqrt{z} decorre do fato de a situação ser considerada bidimensional (x, z) , ou invariante em y , garantindo assim a conservação da potência total da onda. No caso tridimensional o fator correto dependeria de z e não de \sqrt{z} . Fazendo uso das definições $k = 2\pi/\lambda$ e $x/z = \tan\theta$ e ainda aproximando $\tan\theta \approx \sin\theta$, quando $x \ll z$, podemos reescrever esta última expressão na forma

$$\Phi(z, \theta) = \frac{\Phi_0 d}{2\pi\sqrt{z}} \frac{\sin[\pi d \sin\theta/\lambda]}{\pi d \sin\theta/\lambda}. \quad (18)$$

Este resultado é bem conhecido da teoria da difração, produzindo o padrão de interferências característico do experimento da fenda simples. Observe que os valores

de máxima intensidade da onda dependem do ângulo θ , de tal forma que o primeiro valor de máxima ocorre em $\theta = 0$ e os outros para

$$\sin\theta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2d},$$

com $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Para $m = 0$ obtém-se o valor $\sin\theta = \frac{\lambda}{2d}$, o que permite através da medida o ângulo θ formado entre o primeiro e o segundo máximo e da largura da abertura d , determinar o comprimento de onda λ .

Em muitas outras situações, por questão de simetria do problema é interessante expressar as Eqs. (12) e (13) em outros sistemas de coordenadas. Um exemplo típico ocorre quando $\Phi(x, y, 0)$ tem simetria cilíndrica circular, caso de uma onda plana incidente sobre uma abertura circular. Reescrevendo as variáveis de integração em coordenadas cilíndricas, temos

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k_\rho=0}^{\infty} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \tilde{\Phi}(k_\rho, \alpha, 0) \exp\left[\frac{ik_\rho^2 z}{2k}\right] e^{-ik_\rho \rho \cos(\varphi-\alpha)} k_\rho dk_\rho d\alpha, \quad (19)$$

$$\tilde{\Phi}(k_\rho, \alpha, 0) = \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \Phi(\rho, \varphi, 0) e^{ik_\rho \rho \cos(\varphi-\alpha)} \rho d\rho d\varphi. \quad (20)$$

Um laser comum monocromático pode ser tratado de forma aproximada por uma distribuição da densidade de potência gaussiana com relação à variável transversal ρ , denominado feixe gaussiano, correspondente à uma distribuição inicial na forma $\Phi(\rho, \varphi, 0) = \Phi_0 \exp\left[-\frac{\rho^2}{2a^2}\right]$. Podemos então resolver o problema utilizando as Eqs. (19) e (20), para obter

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \frac{\Phi_0}{1 - i\frac{z}{a^2 k}} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2a^2\left(1 - i\frac{z}{a^2 k}\right)}\right], \quad (21)$$

com uma densidade de potência na forma

$$\mathbf{S}_{\text{med}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{|\Phi_0|^2}{\left(1 + \frac{z^2}{a^4 k^2}\right)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{a^2\left(1 + \frac{z^2}{a^4 k^2}\right)}\right] \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (22)$$

que fornece uma definição para a largura de feixe dependente da posição, pois podemos colocar a função gaussiana na expressão acima em uma forma compacta

$$\exp\left[-\frac{\rho^2}{a^2\left(1 + \frac{z^2}{a^4 k^2}\right)}\right] = \exp\left[-\frac{\rho^2}{b(z)^2}\right],$$

sendo a largura do feixe dada por

$$b(z) = a\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^4 k^2}}.$$

Define-se ainda o comprimento de difração L_{dif} como a distância percorrida pela onda ao longo do eixo z para a

qual a largura transversal ao longo de x dobra, ou seja, $b(z = L_{dif}) = 2a$, resultando para o caso da gaussiana no valor

$$L_{dif} = 2\pi\sqrt{3}\frac{a^2}{\lambda}. \quad (23)$$

O feixe gaussiano, ilustrado na Fig. 6, apresenta a particularidade de manter a forma à medida em que propaga e a difração se manifesta através do alargamento do feixe gaussiano mas não no aparecimento de termos de interferência e máximos e mínimos de densidade de potência à medida em que a onda se propaga, enquanto outras distribuições iniciais são transformadas à medida em que propagam, produzindo além de alargamento, também o fenômeno de interferência bem nítido, com o aparecimento de máximos e mínimos como é o caso do exemplo anterior.

3. Os efeitos da dispersão

A dispersão é um fenômeno associado ao alargamento de um pulso no tempo, podendo ocorrer em casos especiais o estreitamento do mesmo, e deve-se sobretudo às características eletromagnéticas do meio de propagação, que em geral dependem da frequência. Um meio dispersivo é aquele cuja constante de propagação

$$k(\omega) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c(\omega)} = \beta(\omega) - i\alpha(\omega), \quad (24)$$

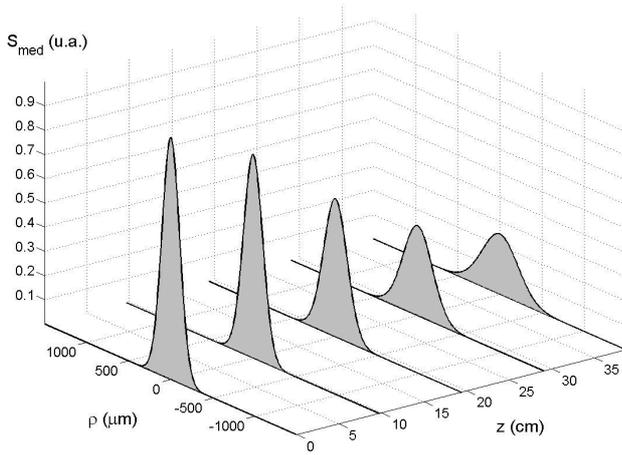


Figura 6 - Perfil transversal da densidade de potência $S = |\Psi|^2$, em unidades arbitrárias, à medida em que a onda gaussiana difratada se propaga. Foram utilizados os valores $\lambda = 632 \text{ nm}$ e $a = 150 \text{ }\mu\text{m}$.

tenha uma dependência não linear com a frequência, que é o caso para a maioria dos meios. Em uma ampla gama de aplicações os meios são de natureza não-magnética e pode-se fazer $\mu = \mu_0$. Embora uma análise detalhada da constante dielétrica ε_c dependa dos conhecimentos de Mecânica Quântica, existe um modelo clássico para descrevê-la, denominado Modelo de Lorentz, bastante conhecido na literatura e já discutido na Ref. [7]. Considerando um material formado por um conjunto de osciladores harmônicos independentes, que correspondem aos átomos e/ou moléculas modelados a partir de pequenos sistemas massa-mola com amortecimento e submetidos à ação do campo eletromagnético de uma onda no limite de baixas velocidades, é possível obter a expressão

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\omega\nu}, \quad (25)$$

sendo ε_r a parcela real da constante dielétrica relativa, σ a condutividade do material, ω a frequência de operação, $\omega_p^2 = Nq^2/(m\varepsilon_0)$ a frequência de plasma do material, ω_r uma frequência característica de ressonância do material e ν a frequência de colisões, Nq é a densidade de cargas q no material e m a massa das mesmas. A parte imaginária da constante dielétrica dos materiais está associada à absorção e a causalidade implica as relações de Kramers-Kronig, que fogem ao escopo do presente trabalho mas que são discutidas na Ref. [7]. Os meios condutores se caracterizam por elétrons quase livres, o que corresponde a $\omega_r \rightarrow 0$ e geralmente satisfazem a condição $\nu \gg \omega$ para frequências abaixo do ultra-violeta, o que nos dá

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \approx 1 - i \frac{\omega_p^2}{\omega \nu}, \quad (26)$$

enquanto que os meios materiais dielétricos de poucas perdas, categoria na qual podemos enquadrar as

fibras ópticas, podem ser caracterizados por linha de ressonância estreita. O caso extremo desse tipo de material corresponde a levar a expressão (25) ao limite $\nu \rightarrow 0$ e nesse caso obtém-se

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2 - \omega^2} - i\pi \frac{\omega_p^2}{2\omega} [\delta(\omega - \omega_r) + \delta(\omega + \omega_r)]. \quad (27)$$

Note que na ressonância $\omega = \omega_r$, um meio dielétrico de poucas perdas tem comportamento de um condutor, com alta condutividade efetiva. Vamos portanto nos concentrar em dielétricos de poucas perdas para frequências distantes da condição de ressonância. Nesse caso, em uma primeira aproximação podemos desprezar o fator de atenuação fazendo $\alpha \rightarrow 0$, uma vez que α depende diretamente da condutividade. Dessa forma temos $k = \beta(\omega)$. Uma onda plana uniforme monocromática de frequência ω propagando-se com $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_z$ em um meio sem perdas deve ser escrita na forma

$$\mathbf{E}(z, \omega) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \beta(\omega)z)}. \quad (28)$$

A partir da superposição de ondas da forma (28) em diferentes frequências podemos obter um pulso propagante ao longo do eixo z conforme a expressão

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i(\omega t - \beta(\omega)z)} d\omega \quad (29)$$

onde \mathbf{E}_0 é um vetor complexo constante contido no plano (x, y) e $F(\omega)$ é o espectro de frequências, ou densidade espectral, do pulso. Em geral, nos sistemas de comunicação os pulsos são compostos por uma portadora ω_0 , modulada por uma envoltória $f(t)$ tal que a largura de banda do sinal modulante $\Delta\omega$ é em geral muito menor do que a frequência da portadora ω_0 , ou seja, $\omega_0 \gg \Delta\omega$. Nesse sentido, $F(\omega)$ é uma função bem comportada e concentrada em torno de ω_0 com largura espectral $\Delta\omega$, de tal modo que faz sentido expandir a constante de propagação $\beta(\omega)$ em séries de Taylor em torno da frequência da portadora ω_0 , ou seja

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (30)$$

que convencionalmente escrevemos

$$\beta(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\left. \frac{d^m}{d\omega^m} \beta(\omega) \right) \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^m = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (31)$$

Se a função $F(\omega)$ tem largura de banda $\Delta\omega$ muito menor do que a frequência ω_0 , conforme já assumimos, então é possível truncar a série de Taylor, considerando somente os termos mais relevantes. Para observar efeitos de dispersão do sinal é necessário considerar termos da ordem de $(\omega - \omega_0)^2$, pois veremos adiante

que o termo de dispersão do sinal será uma função pelo menos da segunda derivada da constante de fase $\beta(\omega)$. Vamos definir então

$$\beta_0 = \beta(\omega_0), \quad (32)$$

$$\beta_1 = \left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}, \quad (33)$$

$$\beta_2 = \left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0}. \quad (34)$$

É importante destacar que β_0 não é a constante de propagação do vácuo que denotamos por $k_0 = 2\pi/\lambda_0$. É um exercício interessante mostrar que na aproximação de largura de banda estreita, podemos escrever $F(\omega) = F(\omega - \omega_0)$ e a relação (29) converte-se na expressão

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 F(\omega_1) \exp \left[-i \frac{\omega_1^2 \beta_2 z}{2} \right] e^{i\omega_1(t - \beta_1 z)}, \quad (35)$$

onde $\omega_1 = \omega - \omega_0$. Podemos considerar por simplicidade um espectro gaussiano centrado em ω_0 sem perda de generalidade para as conclusões que serão obtidas. Nesse caso

$$F(\omega_1) = \exp \left(-\frac{\omega_1^2 \tau_0^2}{2} \right).$$

Inserindo o espectro acima na expressão (35) podemos facilmente mostrar que

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0^2 + i\beta_2 z}} e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \exp \left[-\frac{(t - \beta_1 z)^2 (1 - i\beta_2 z / \tau_0^2)}{2(\tau_0^2 + \beta_2^2 z^2 / \tau_0^2)} \right]. \quad (36)$$

Observando o resultado acima percebemos que existe um termo de fase do campo elétrico que somente depende da frequência da portadora, ω_0 , na forma $e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)}$. Este termo é o termo de fase da portadora, que pode ser reescrito na forma $e^{-i\beta_0(z - v_p t)}$, de onde define-se uma relação, $v_p = \omega_0/\beta_0$, denominada velocidade de fase do sinal. Observe que esta é a velocidade que um observador qualquer deve ter para acompanhar um plano de fase constante da onda portadora do sinal. A envoltória do sinal é dada por

$$\Phi_{env} = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0^2 + i\beta_2 z}} \exp \left[-\frac{(t - \beta_1 z)^2 (1 - i\beta_2 z / \tau_0^2)}{2(\tau_0^2 + \beta_2^2 z^2 / \tau_0^2)} \right],$$

e se propaga com velocidade $v_g = 1/\beta_1$, denominada velocidade de grupo da onda. É fácil perceber que para um observador acompanhar o deslocamento do valor máximo da função gaussiana acima, o mesmo deve ter velocidade igual à velocidade v_g . Por outro lado

podemos dizer que esta é a velocidade média com que o pacote de ondas se desloca na direção z . Está além do escopo deste trabalho demonstrar uma relação existente entre a velocidade de grupo e a velocidade de fase que diz que

$$v_p v_g = c^2.$$

Por fim, conforme havíamos antecipado, o termo β_2 é responsável pela dispersão do sinal, ou seja, corresponderá ao alargamento temporal do pulso, que nesse caso é gaussiano. Definindo uma largura temporal $\tau(z)$ em função da distância propagada e que deve ser escrita na forma

$$\tau(z) = \sqrt{\tau_0^2 + \frac{\beta_2^2 z^2}{\tau_0^2}}, \quad (37)$$

e considerando Eq. (36) podemos escrever para o valor médio da densidade de potência na forma

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 \frac{2\pi}{\sqrt{\tau_0^2 \tau^2(z)}} \exp \left[-\frac{(t - \beta_1 z)^2}{\tau^2(z)} \right], \quad (38)$$

para definir o comprimento de dispersão L_{disp} como sendo a distância para a qual o pulso inicial de largura τ_0 propaga-se e dobra a largura temporal, ou seja, é a distância para a qual $\tau(z = L_{disp}) = 2\tau_0$, fornecendo então o seguinte resultado

$$L_{disp} = \sqrt{3} \frac{\tau^2}{\beta_2}. \quad (39)$$

A Fig. 7 ilustra a dispersão de um pulso gaussiano, nas coordenadas transformadas na forma $z' = z$, $t' = t - \beta_1 z$, e por esse motivo o pulso tem pico sempre centrado em $t' = 0$. À medida que o pulso se propaga ao longo de z , a dispersão produz a redistribuição da densidade de potência do pulso, fazendo com que o valor de máxima amplitude do pulso diminua ao mesmo tempo em que o pulso sofre um alargamento temporal.

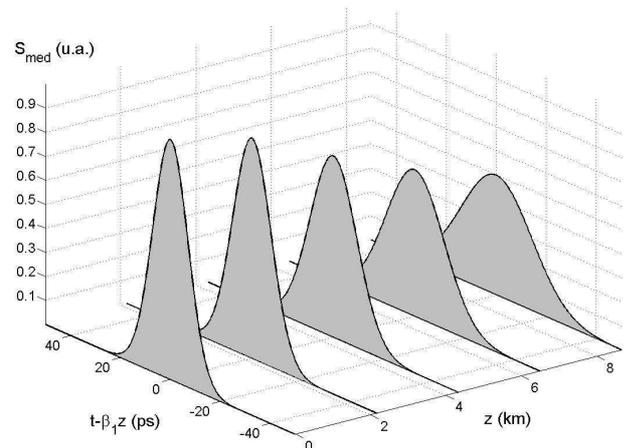


Figura 7 - Densidade de potência $S = |\Psi|^2$ em função do tempo $t' = t - \beta_1 z$ para várias posições z , correspondendo à propagação de um pulso gaussiano que sofre dispersão. Foram utilizados os valores $\beta_2 = 20\text{ps}^2/\text{km}$ e $\tau_0 = 10\text{ps}$.

É possível definir a energia total do pulso na forma

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}|^2 dt ,$$

em unidades apropriadas, e então mostrar que W independe de z para meios sem perdas. O fato ilustrado na Fig. 7 pode ser observado diretamente na expressão para \mathbf{E} dada por (36), onde é fácil ver que o valor de máxima amplitude do pulso diminui com o aumento de z , mas em contrapartida ocorre o alargamento temporal, e conseqüentemente a energia deve ser conservada. Em um meio com perdas haveria uma atenuação da energia total W na forma $e^{-2\alpha z}$, desde que α seja quase independente da frequência, o que é verdadeiro longe das ressonâncias.

Voltando para a expressão (39), note o leitor que somente haverá variação da largura temporal do pulso desde que β_2 seja diferente de zero. Negligenciando a segunda derivada de $\beta(\omega)$ e derivadas superiores não é possível obter quantitativamente os efeitos da dispersão. Por outro lado, no ponto em que $\beta_2 = 0$ seria necessário levar em conta derivadas de ordem superior, levando à análise de dispersão por efeitos de mais alta ordem. Na propagação em sistemas de comunicação ópticas, usualmente busca-se o ponto de operação que minimiza os efeitos dispersivos e também a constante de perdas, evidentemente. Existem duas janelas ópticas amplamente empregadas atualmente, que correspondem a $\lambda_0 = 1.3 \mu\text{m}$ e $\lambda_0 = 1.55 \mu\text{m}$.

Vamos discutir brevemente os sistemas de comunicação guiados, que são caracterizados por modos de propagação [3,13], correspondendo a distribuições de densidade de potência eletromagnética e polarizações de onda específicas no interior do guia que podem ser expressas na forma

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_\perp) e^{i(\omega t - \beta_m z)} , \quad (40)$$

sendo $\mathbf{x}_\perp = (x_1, x_2)$ as coordenadas transversais, $\mathbf{E}_m(\mathbf{x}_\perp)$ uma função vetorial apropriada para descrever o m -ésimo modo de propagação e a constante β_m satisfaz uma relação de dispersão, geralmente da forma

$$\beta_m(\omega) = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_m^2} , \quad (41)$$

que claramente pode possuir um valor finito para a segunda derivada em torno de uma determinada frequência de operação, $\beta_2 = d^2\beta_m/d\omega^2$, e conseqüentemente gerando dispersão. Uma superposição de ondas de várias frequências no caso da propagação guiada pode ser representada pela expressão

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_m \mathbf{E}_m(\mathbf{x}_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i(\omega t - \beta_m z)} d\omega , \quad (42)$$

Conforme podemos observar da equação acima a energia de cada componente de frequência de um sinal

guiado irá se distribuir entre os vários modos disponíveis para a propagação. É fácil ver da relação de dispersão (41) que somente os modos para os quais a condição $\omega > \omega_m$ seja satisfeita irão se propagar. No caso contrário, ou seja, $\omega < \omega_m$, a constante de propagação do modo m , β_m , torna-se imaginária, acarretando a atenuação daquele modo. A frequência ω_m depende de características geométricas e características específicas do material com o qual o guia é composto e é denominada frequência de corte do modo m . Ordenando as frequências de corte em ordem crescente, $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 \dots$, onde ω_0 é denominada frequência de corte do modo fundamental, podemos classificar os sistemas guiados em dois tipos: i) monomodais, quando a frequência de operação está entre os dois primeiros modos, $\omega_0 < \omega < \omega_1$ e somente o modo fundamental é capaz de se propagar e ii) multimodais, quando $\omega > \omega_1$ e nesse caso o modo fundamental e pelo menos mais um modo estão na condição propagante. No caso monomodo, o efeito de dispersão se dá pela dependência da constante de propagação do modo fundamental, β_{fund} , com a frequência. A frequência de corte do modo fundamental ω_0 depende fundamentalmente de parâmetros geométricos, mas também pode depender da frequência ω de operação, dependendo do meio material com o qual o guia de ondas é construído. Consideremos como exemplo um guia metálico retangular de dimensões $a > b$ preenchido por um material dielétrico qualquer. Nesse caso podemos calcular a frequência ω_0 a partir da expressão $\omega_0 = c/(2a)$, onde o parâmetro a é a dimensão do lado maior do guia e é portanto um parâmetro geométrico, mas c é a velocidade da luz no dielétrico que preenche o guia, e portanto depende do meio material e conseqüentemente da frequência de operação. Já o caso multimodal inclui um fenômeno dispersivo mais significativo dependente da diferença de velocidade entre os diversos modos presentes, além daqueles efeitos já descritos para a propagação monomodal. Em sistemas guiados os efeitos de dispersão usualmente são classificados nas seguintes categorias: i) dispersão geométrica intermodal que depende da forma do guia de ondas e ii) dispersão intra-modal, que possui duas contribuições, uma geométrica que depende da geometria do guia de ondas e a outra denominada dispersão material, depende das características da constante dielétrica dos materiais com o qual o guia é construído.

Em geral os efeitos dispersivos não são desejáveis, pois em um sistema de comunicação ocorre a propagação de uma sequência de pulsos. Como cada pulso sofrerá usualmente um alargamento, um dado pulso irá invadir a janela temporal do pulso anterior e/ou do pulso seguinte, resultando numa interferência eletromagnética denominada Interferência Intersimbólica (ISI em inglês, de InterSymbolic Interference). Existe entretanto a possibilidade de aplicação do fenômeno de maneira desejável, como é o caso da

realização de filtros ópticos baseados em prismas, onde o ângulo de refração de cada componente de um sinal eletromagnético depende da frequência dessa componente, permitindo separar fisicamente as componentes do espectro desse sinal, como ocorre, por exemplo, na decomposição da luz branca no espectro de cores.

4. Conclusões

Neste trabalho procuramos apresentar os conceitos básicos relacionadas aos fenômenos de difração e dispersão de ondas eletromagnéticas. Como ferramentas matemáticas necessárias para a compreensão dos mesmos utilizamos as transformadas de Fourier e a equação de ondas, bem como as noções fundamentais das equações de Maxwell para ondas planas uniformes. Pudemos identificar as características principais dos dois fenômenos, demonstrando que a difração está associada diretamente à uma superposição de ondas no espaço \mathbf{k} , mesmo considerando um sinal monocromático de frequência ω , tratando-se portanto de um fenômeno de natureza espacial, enquanto que a difração está associada à dependência da constante de propagação $k(\omega)$ com a frequência e para ser observado requer uma superposição de ondas no domínio da frequência, mesmo que todas as ondas tenham a mesma direção de propagação. Como o espaço matemático dual à frequência é o tempo, a dispersão é um fenômeno temporal. Apresentamos também em linhas gerais os principais resultados para o comprimento de difração e de dispersão e analisamos as suas consequências.

Agradecimentos

C.A. Dartora agradece ao CNPq pelo suporte financeiro parcial.

Referências

- [1] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, New York, 1980), 6th. ed.
- [2] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, New York, 1996), 2nd. ed.
- [3] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York, 1998), 3rd ed.
- [4] O.S. Heavens and R.W. Ditchburn, *Insight into Optics* (John Wiley, Chichester, 1991).
- [5] J.M. Stone, *Radiation and Optics* (McGraw-Hill, New York, 1963).
- [6] C.A. Dartora, K.Z. Nobrega, V.F. Montagner, A. Heilmann e Horacio Tertuliano S. Filho, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **31**, 2303 (2009).
- [7] M.J. Menon e R.P. Barbosa dos Santos, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **20**, 38 (1998).
- [8] C.A. Dartora, M. Zamboni-Rached, K.Z. Nobrega, E. Recami and H.E. Hernández-Figueroa, *Opt. Comm.* **222**, 75 (2003).
- [9] C.A. Dartora and H.E. Hernandez-Figueroa, *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 662 (2004); C.A. Dartora, K.Z. Nobrega, H.E. Hernandez-Figueroa and E. Recami, *Opt. Comm.* **229**, 99 (2004) .
- [10] C.A. Dartora, K.Z. Nobrega, Alexandre Dartora and H.E. Hernandez-Figueroa, *Opt. Comm.* **249**, 407 (2005).
- [11] J. Durnin, J.J. Miceli Jr. and J.H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499 (1987); J. Durnin, *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 651 (1987).
- [12] Pamela L. Greene and Dennis G. Hall, *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 3020 (1998); P.L. Overleft and C.S. Kenney, *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 732 (1991).
- [13] G.P. Agrawal, *Fiber-Optic Communications Systems* (Ed. John Wiley, New York, 1997), 2nd. ed.