

# Oscilações de relaxação e suas aplicações - I

(Relaxation oscillations and their applications - I)

R.L. Viana<sup>1</sup>

Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

Recebido em 2/7/2010; Aceito em 16/6/2011; Publicado em 5/10/2011

Oscilações de relaxação são mantidas por uma influência externa constante e apresentam duas escalas de tempo diferentes (lenta e rápida). Elas têm propriedades diferentes das oscilações pendulares que, para pequenas amplitudes, reduzem-se às oscilações harmônicas. Neste primeiro trabalho apresentamos as diferenças entre oscilações pendulares e de relaxação, mostrando exemplos ilustrativos de aplicações de oscilações de relaxação em um sistema mecânico (vaso de Tântalo) e num circuito elétrico.

**Palavras-chave:** oscilações de relaxação, oscilações não-lineares, oscilações auto-sustentadas.

Relaxation oscillations are maintained by a constant external influence and present two different timescales (fast and slow). They have properties different from the pendular oscillations which, for small amplitudes, reduce to harmonic oscillations. In this first paper we present the differences between relaxation and pendular oscillations, showing illustrative examples of application of relaxation oscillations in a mechanical system (Tantal vase) and an electric circuit.

**Keywords:** relaxation oscillations, nonlinear oscillations, self-sustained oscillations.

## 1. Introdução

Oscilações de relaxação são entretidas graças à energia fornecida continuamente de uma fonte. Elas aparecem em inúmeros sistemas físicos e biológicos. Uma característica comum a todas as oscilações de relaxação é a existência de duas escalas de tempo: uma escala “lenta”, durante a qual pouco acontece no sistema (em termos de variação de alguma quantidade), e uma escala “rápida”, durante a qual grandes mudanças são produzidas. Um exemplo bastante familiar de oscilações de relaxação é o monjolo, uma das mais antigas máquinas rurais da Humanidade, e bastante comum em sítios e chácaras no Brasil. Ele consiste de uma haste de madeira onde uma das pontas está ligada a um pilão, enquanto a outra é trabalhada na forma de um receptáculo (chamado “cocho”) que recebe água de uma calha de forma contínua (Fig. 1). Enquanto a água vai preenchendo o cocho, a haste com o pilão na outra ponta vai lentamente se inclinando para cima devido ao atrito sobre o eixo. Quando o cocho atinge uma certa altura, a água nele contida verte rapidamente e o outra ponta da haste com o pilão desce também de forma rápida. O impacto do pilão pode ser usado para socar grãos como milho, arroz ou amendoim.

<sup>1</sup>E-mail: viana@fisica.ufpr.br.

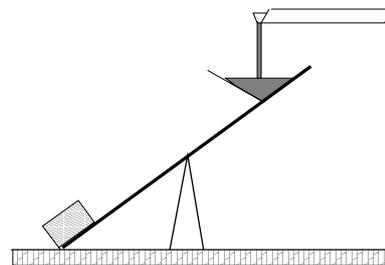


Figura 1 - Figura esquemática de um monjolo.

O movimento da haste do pilão é uma oscilação de relaxação essencialmente por repetir-se a intervalos de tempo constantes (ou seja, é um movimento periódico), mas também por exibir duas escalas de tempo: a “lenta”, enquanto o cocho vai sendo preenchido com água, e a “rápida”, enquanto o cocho é esvaziado e o pilão desce. Há outras características comuns às oscilações de relaxação que podemos exemplificar com o monjolo. A amplitude das oscilações é fixada pelas próprias características do monjolo, como o tamanho da haste e a forma com que o cocho foi cavado na haste. A amplitude é portanto bastante difícil de modificar por meio de intervenções externas. Já o período depende essencialmente do fluxo de água que vem da fonte, passando pela calha. Se o fluxo de água pela calha for

diminuído, fechando parcialmente a entrada da calha por exemplo, o cocho é preenchido mais lentamente, e o período do movimento do monjolo será maior (ou seja, ele oscila mais “lentamente”). Caso desobstruamos a calha, permitindo a entrada de um fluxo maior de água, o período pode ser aumentado para um valor desejado.

Por outro lado, os profissionais e estudantes de física estão mais acostumados a trabalhar com outro tipo de oscilação, que podemos chamar de *pendular*, e cujo paradigma é justamente o pêndulo simples: uma massa puntiforme suspensa por um fio. Fazemos um pêndulo oscilar inclinando a massa presa ao fio em relação à sua posição de equilíbrio de um certo ângulo, que determina a amplitude das suas oscilações. Podemos mudar facilmente a amplitude das oscilações simplesmente colocando a massa mais ou menos inclinada em relação à vertical. O período das oscilações do pêndulo, no entanto, não é tão fácil assim de variar. Sabemos que, para pequenas oscilações de um pêndulo simples, o período é proporcional à raiz quadrada do comprimento do fio dividido pela aceleração da gravidade. Ou seja, o período que é determinado por parâmetros cuja mudança é difícil, ao contrário da amplitude. Finalmente, no movimento do pêndulo encontramos uma única escala de tempo, que é determinada pela frequência de suas pequenas oscilações.

O termo “oscilação de relaxação” vem do fato que seu período é essencialmente determinado dado pela escala de tempo lenta (o pilão do monjolo cai muito mais rapidamente do que enquanto seu cocho é preenchido de água, por exemplo). Em certos circuitos eletrônicos, por exemplo, essa escala de tempo representa o carregamento de um capacitor, e por isso o período da oscilação é proporcional à constante de tempo do circuito, também chamada *tempo de relaxação*. O estudo sistemático das oscilações de relaxação iniciou-se com os trabalhos de Balthazar Van der Pol na década de 1920 [1], e forneceu motivação para investigações pioneiras da teoria dos sistemas dinâmicos [2–4]. Oscilações de relaxação continuam sendo uma área de intensa pesquisa teórica e experimental, principalmente nas suas múltiplas aplicações a problemas na física [5–7], engenharia [8], fisiologia [9], e mesmo na economia [10].

Oscilações de relaxação são, portanto, bastante diferentes das oscilações pendulares, e ocorrem em diversos problemas físicos e biológicos de importância. É curioso o fato da maioria dos livros didáticos contemporâneos a nível elementar não tratar de modo suficientemente preciso e/ou motivante as oscilações de relaxação, em detrimento das não menos importantes oscilações pendulares (em mecânica e eletricidade). Isso não se verifica, porém, em textos didáticos mais antigos, especialmente aqueles de autores franceses [5–7]. Além disso, vários artigos em revistas especializadas têm abordado oscilações de relaxação há várias décadas [11–16]. Uma justificativa possível para a ausência de menções a os-

culações de relaxação em livros didáticos elementares é que tais oscilações são intrinsecamente não-lineares, ao contrário das oscilações pendulares, que podem ser descritas de forma aproximada por equações lineares. O objetivo principal desse artigo é dar ao leitor elementos básicos para identificar as principais características de oscilações de relaxação, assim como fornecer uma idéia da ampla gama de aplicações que estas possuem. A preparação física para compreender os argumentos teóricos envolvidos resume-se à física básica, e a parte matemática é totalmente compreensível a nível do Cálculo Diferencial e Integral que é visto no segundo ano do curso de física.

A estrutura desse artigo é a seguinte: na Seção II nós discutiremos qualitativa e quantitativamente um sistema mecânico (vaso sifonado ou vaso de Tântalo) que exhibe oscilações de relaxação. Na seção III abordaremos um exemplo na eletricidade (circuito com lâmpada de neônio). As similaridades entre os sistemas mecânico e elétrico e as suas diferenças com oscilações pendulares são discutidas na seção IV. Na seção V abordaremos o papel de um forçamento periódico sobre oscilações de relaxação, comparando-as com as oscilações pendulares. A última seção é dedicada às nossas conclusões.

## 2. O vaso de Tântalo

O *vaso de Tântalo*, ou vaso sifonado, é um dos experimentos demonstrativos mais antigos da física, encontrado em diversos museus de instrumentos antigos (Fig. 2). Ele é baseado no princípio do sifão, e é um dos sistemas físicos mais simples que exibem oscilações de relaxação [12]. Vertemos continuamente água para dentro do vaso até que o nível d’água atinja o ponto mais alto do sifão, após o que este passa a descarregar a água até que o nível chegue até a entrada do sifão. O sifão pára de funcionar e o vaso volta a ser preenchido até o processo repetir-se. Desta forma o nível d’água apresenta oscilações cuja amplitude é constante (determinada pela diferença entre os níveis mais alto e mais baixo do sifão) mas com um período que pode variar aumentando ou diminuindo a vazão de água que verte de uma torneira.



Figura 2 - Ilustração antiga de um vaso de Tântalo usado em demonstrações experimentais.

O termo *vaso de Tântalo* refere-se à incapacidade do vaso de ser totalmente preenchido devido à sifonação, e remete-nos à Mitologia Grega, segundo a qual Tântalo

era um rei da Lídia (ou talvez da Frígia), filho do próprio Zeus com a princesa Plota. Tântalo teria cometido um crime terrível, ao testar a onisciência dos deuses servindo-lhes a carne do próprio filho num banquete. Como castigo, Tântalo teria sido enviado pelos deuses ao Tártaro (inferno mitológico) e preso num lugar abundante em vegetação e água. No entanto, sua pena consistia em não poder saciar sua fome e sede, visto que, ao aproximar-se da água esta escoava e, ao erguer-se para colher os frutos das árvores, os ramos moviam-se pra longe de si [17]. Deste mito surgiu também a expressão *suplício de Tântalo* [18].

A história do vaso de Tântalo confunde-se com a do próprio sifão. Desenhos encontrados em tumbas egípcias mostram que sifões já eram empregados por volta de 1500 AC para escorvar água e outros líquidos de vasos cerâmicos [12]. Acredita-se, no entanto, que o sifão possa ter sido inventado muito antes disso na Mesopotâmia. Os princípios físicos de funcionamento do sifão foram enunciados por Heron de Alexandria em sua famosa obra *Pneumática* [19]. A relativa estabilidade da sua operação fez com que os vasos de Tântalo fossem empregados como relógios d'água no Império Romano. Apesar da sua simplicidade, os sifões ainda são bastante usados no nosso cotidiano, principalmente em pias e descargas de vasos sanitários. Além disso, o vaso de Tântalo está no princípio de funcionamento do extrator de Soxhlet na química [20].

### 2.1. Modelo matemático do vaso de Tântalo

Na Fig. 3 representamos esquematicamente um vaso de Tântalo, que consiste numa cisterna cuja área da seção reta é  $S$ , sendo alimentada por uma torneira que verte água à uma vazão uniforme  $Q$ . A altura da coluna d'água na cisterna, em relação a um nível de referência, é denotada por  $h$ . No fundo do vaso temos a entrada do sifão na forma de um tubo em U invertido, cuja área da seção reta é  $s$ , e cuja extremidade inferior projeta-se até o nível de referência ( $h = 0$ ). As distâncias verticais entre a parte mais alta e a parte mais baixa do sifão, em relação à entrada do sifão (no fundo do vaso), são indicadas por  $h_A$  e  $h_B$  respectivamente. Supomos, por simplicidade, que a água verte da torneira de forma a não transmitir uma quantidade apreciável de momentum linear para a água já contida no vaso.

*Preenchimento do vaso.* Durante essa fase o sifão não opera, e o nível d'água no vaso sobe devido ao fluxo de água da torneira. Lembrando que (vazão) = (volume)/(tempo) teremos

$$h(t) = h_B + \frac{Q}{S}t, \quad (1)$$

mostrando que o nível d'água cresce linearmente deste seu valor mínimo  $h_{min} = h_B$  até o nível máximo  $h_{max} = h_A + h_B$ , ponto onde o sifão começa a agir. O tempo de preenchimento é, pois, dado por

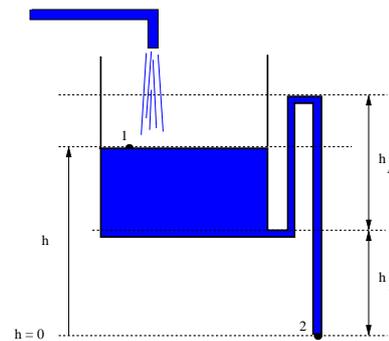


Figura 3 - Esquema de um vaso de Tântalo.

$$\Delta T' = \frac{Sh_A}{Q}. \quad (2)$$

*Escorvamento pelo sifão:* Durante essa fase o sifão provoca o esvaziamento do vaso, pois o fluxo de água que sai pelo sifão, denotado por  $q$ , é maior que o fluxo de água fornecido pela torneira ( $q > Q$ ). Nesse caso temos um fluxo líquido  $q - Q$ , já que a torneira continua tentando encher o vaso. No entanto, o fluxo do sifão  $q$  não é constante mas varia com a altura da água no vaso. Isso que pode ser constatado aplicando a equação de Bernoulli a dois pontos na Fig. 3, denotados por 1 e 2, um deles no nível d'água do vaso e outro na extremidade inferior do sifão [21]

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2, \quad (3)$$

onde  $p_1 = p_2 = p_0$  é a pressão atmosférica,  $\rho$  a densidade da água,  $g$  a aceleração da gravidade, e  $y$  a altura da coluna d'água em relação ao nível de referência situado na extremidade inferior do sifão. Denotaremos por  $v_2 = u$  a velocidade com que a água escorre do sifão, e supomos que a velocidade no nível d'água seja desprezível ( $v_1 \approx 0$ ), o que é aceitável se o volume da água contida no vaso for muito superior ao contido no tubo em U, e a água que vem da torneira chega ao nível d'água com velocidade desprezível. Como  $y_1 = h$  e  $y_2 = 0$ , devido à escolha que fizemos para o nível de referência, segue-se que  $u = \sqrt{2gh}$ , que é simplesmente a equação de Torricelli [21]. Já que o fluxo de água na extremidade inferior do sifão é dado por (área da seção reta)  $\times$  (velocidade), temos que

$$q(h) = su = s\sqrt{2gh}. \quad (4)$$

Como a altura  $h$  do nível d'água no tubo varia com o tempo, tanto no preenchimento do vaso como na sua escorva pelo sifão, assim também o fluxo de saída varia entre um valor máximo e um mínimo dados, respectivamente, por

$$q_{max} = q(h_A + h_B) = s\sqrt{2g(h_A + h_B)}, \quad (5)$$

$$q_{min} = q(h_B) = s\sqrt{2gh_B}. \quad (6)$$

Desprezando a velocidade do nível d'água em relação à velocidade da água na saída do sifão, podemos

considerar o fluxo líquido no sifão como sendo dado por  $q(h) - Q$  [11]. Escrevendo a definição de vazão numa forma diferencial ( $V$  é o volume de água no vaso) temos

$$-\frac{dV}{dh} = -\frac{Sdh}{dt} = q(h) - Q, \quad (7)$$

onde o sinal negativo na derivada indica que o volume d'água diminui com o passar do tempo, de forma que, sendo a derivada ela mesma negativa, o fluxo líquido  $q(h) - Q$  continue sendo positivo.

O tempo de escorvamento  $\Delta T''$  nesse caso pode ser obtido integrando-se a Eq. (7)

$$\Delta T'' = - \int_{h_A+h_B}^{h_B} \frac{Sdh}{q(h) - Q}, \quad (8)$$

$$= -S \int_{h_A+h_B}^{h_B} \frac{dh}{s\sqrt{2gh} - Q}, \quad (9)$$

onde usamos a Eq. (4). Fazendo a mudança de variável  $x = s\sqrt{2gh} - Q$  obtemos

$$\Delta T'' = -\frac{S}{s^2g} \int_{s\sqrt{2gh_B}-Q}^{s\sqrt{2g(h_A+h_B)}-Q} dx(x+Q) \quad (10)$$

$$= -\frac{S}{s^2g} \left\{ s\sqrt{2gh_B} - s\sqrt{2g(h_A+h_B)} \right. \quad (11)$$

$$\left. + Q \ln \left[ \frac{s\sqrt{2gh_B} - Q}{s\sqrt{2g(h_A+h_B)} - Q} \right] \right\},$$

que pode ser reescrita, em vista das Eqs. (5) e (6), como

$$\Delta T'' = \frac{S}{s^2g} \left\{ (q_{max} - q_{min}) + Q \ln \left[ \frac{q_{max} - Q}{q_{min} - Q} \right] \right\}. \quad (12)$$

Interpretamos fisicamente esse resultado da seguinte forma: o termo proporcional a  $q_{max} - q_{min}$  representa o tempo  $t''$  necessário para escorvar o vaso, supondo que não esteja entrando água no mesmo. Já o termo proporcional a  $Q$  representa o tempo necessário para escoar a quantidade de água que a torneira acrescentou ao vaso durante o intervalo de tempo  $t''$ .

Para estimar a importância de cada um destes dois termos, vamos considerar o seguinte exemplo [11]:  $h_A = 0,25$  m,  $h_B = 0,50$  m,  $S = 5,00 \times 10^{-2}$  m<sup>2</sup>;  $s = 7,07 \times 10^{-4}$  m<sup>2</sup>,  $Q = 1,00 \times 10^{-4}$  m<sup>3</sup>/s, e  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>. Para este conjunto de parâmetros temos que o fluxo escorvado pelo sifão varia entre os limites  $q_{max} = 2,71 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>/s e  $q_{min} = 2,21 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>/s, da ordem de vinte vezes o fluxo de água que vem da torneira. Para esse conjunto de parâmetros, as Eqs. (2) e (12) fornecem para os tempos de preenchimento e escorvamento, respectivamente, os seguintes resultados

$$\Delta T' = 125s, \quad \Delta T'' = 5,07s + 0,22s \approx 5,30s, \quad (13)$$

mostrando que o tempo de esvaziamento é cerca de 24 vezes menor que o de preenchimento. Além disso, a

contribuição do termo logarítmico na Eq. (12) é aproximadamente 23 vezes menor que a contribuição do termo que supõe apenas o esvaziamento pelo sifão; e pode ser desprezado sem problemas.

A equação que descreve a evolução do nível d'água  $h(t)$  no vaso durante seu esvaziamento pode ser obtida a partir do mesmo raciocínio que usamos para a determinação do tempo de escorvamento. Integrando a Eq. (7) entre os níveis máximo ( $h_A + h_B$ ) e  $h(t)$ , e fazendo a mesma substituição de variáveis anterior, chegamos à equação

$$t = \frac{S}{s^2g} \left\{ -\sqrt{2gh(t)} + \sqrt{2g(h_A+h_B)} - \frac{Q}{s} \ln \left[ \frac{s\sqrt{2gh(t)} - Q}{s\sqrt{2g(h_A+h_B)} - Q} \right] \right\}. \quad (14)$$

Em vista, porém, do termo logarítmico ter sido mostrado há pouco desprezível em relação ao outro, podemos negligenciá-lo aqui também. Fazendo isso, e isolando o nível d'água, temos

$$h(t) \approx \frac{1}{2g} \left[ \sqrt{2g(h_A+h_B)} - \frac{sg}{S}t \right]^2, \quad (15)$$

durante a fase de esvaziamento.

## 2.2. Oscilações de relaxação no vaso de Tântalo

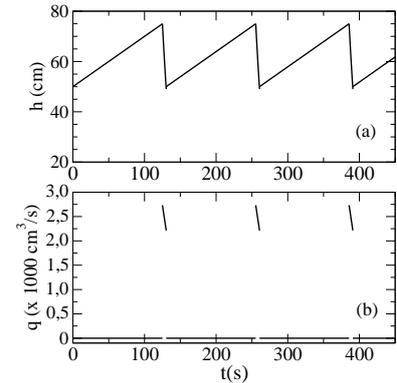


Figura 4 - (a) Oscilações do nível d'água no vaso de Tântalo. (b) Fluxo de água escorvado pelo sifão.

Na Fig. 4(a), obtida a partir dos mesmos parâmetros usados para chegar na Eq. (13), mostramos a evolução temporal do nível d'água no vaso de Tântalo para alguns ciclos de oscilação, levando em conta as Eqs. (1) e (15) que descrevem, respectivamente, o preenchimento e o escorvamento. As variações observadas do tipo “dente de serra” são características das oscilações de relaxação. O fluxo escorvado pelo sifão (Fig. 4(b)) é nulo durante o preenchimento do vaso e varia com o tempo durante o escorvamento da água.

As oscilações do nível d'água têm amplitude  $(h_A + h_B) - h_B = h_A$  e período

$$T = \Delta T' + \Delta T'' \approx \frac{Sh_A}{Q} + \frac{S}{s^2g}(q_{max} - q_{min}). \quad (16)$$

Como  $\Delta T'' \ll \Delta T'$ , podemos tomar o tempo de preenchimento como uma aproximação razoável do período das oscilações do nível d'água no vaso de Tântalo. Uma consequência importante é que as oscilações apresentam duas escalas de tempo bem definidas: o preenchimento do vaso ocorre lentamente, ao passo que seu escorvamento ocorre rapidamente. Temos, pois, duas escalas de tempo: uma lenta ( $0 < t < \Delta T'$ ) e outra rápida ( $\Delta T' < t < T$ ).

Observe que a amplitude das oscilações é definida por parâmetros de construção do vaso de Tântalo, e cuja variação (caso necessária) seria bastante difícil, pois teríamos de mudar a posição da dobra do tubo em U, ou então o ponto de entrada do sifão. Já o período,  $T \approx Sh_A/Q$ , depende de um parâmetro cuja variação é mais fácil, no caso o fluxo de água fornecida pela torneira.

### 3. Circuito com lâmpada de neônio

Outro sistema físico interessante que apresenta oscilações de relaxação é um circuito elétrico composto de uma lâmpada de neônio ligada em paralelo a um capacitor, o conjunto sendo ligado em série a um resistor e uma fonte de tensão DC (Fig. 5) [22]. A diferença essencial desse sistema para um circuito RC convencional é o uso de um elemento resistivo não-linear, no caso a lâmpada de neônio. Pelas características físicas da descarga elétrica no gás no interior da lâmpada, esta só acende se a tensão entre seus pólos for superior a uma *tensão de ignição*  $V'$ , que é da ordem de 80 V. Além disso, a lâmpada se apaga se a tensão for menor que um valor  $V_1 < V'$ , chamada *tensão de extinção*.

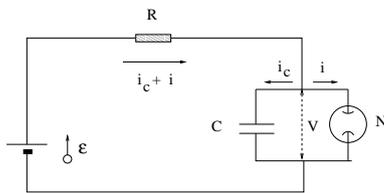


Figura 5 - Esquema de um circuito elétrico com lâmpada de neônio que exibe oscilações de relaxação.

Ligando-se a fonte de tensão no instante  $t = 0$ , esta carrega o capacitor “lentamente” como num circuito RC convencional, desde que a tensão nos terminais da lâmpada seja menor que a tensão de ignição ( $V < V'$ ), pois nesse caso a lâmpada não conduz corrente e está em circuito aberto. Quando  $V = V'$  a lâmpada se acende por conduzir corrente elétrica, o que faz com que esta descarregue o capacitor “rapidamente”, até que a tensão caia até o valor  $V_1$  para o qual a lâmpada se apaga e o processo reinicia. O resultado é uma oscilação da tensão nos terminais da lâmpada de neônio com amplitude  $V' - V_1$  e um período bem definido. O fato da lâmpada piscar enquanto o capacitor se descarrega em cada ciclo de oscilação faz este tipo de circuito

uma interessante experiência demonstrativa em sala de aula, feiras de ciências, etc. [22].

#### 3.1. Modelo matemático do circuito

O circuito com lâmpada de neônio, como oscilações de relaxação em geral, apresenta duas escalas de tempo distintas, que podem ser tratadas separadamente: o carregamento “lento” do capacitor e a sua descarga “rápida” pela lâmpada de neônio. Denotamos a capacitância, a resistência e a força eletromotriz da fonte por  $C$ ,  $R$ , e  $\mathcal{E}$ , respectivamente. As correntes no capacitor e na lâmpada são indicadas por  $i_C$  e  $i$ , respectivamente, sendo  $V$  a tensão entre os terminais tanto da lâmpada como do capacitor.

*Carregamento do capacitor.* Enquanto a tensão nos terminais da lâmpada for inferior a  $V'$  esta não se acenderá e teremos um circuito RC. A evolução temporal da carga nas placas do capacitor  $q_C$  é descrita pela lei de Kirchoff na forma da seguinte equação diferencial

$$R \frac{dq_C}{dt} + \frac{1}{C} q_C = \mathcal{E}, \quad (17)$$

cuja solução é bem conhecida [23]

$$q_C(t) = C\mathcal{E} \left( 1 - e^{-t/\tau_R} \right), \quad (18)$$

quando, em  $t = 0$ , o capacitor encontra-se descarregado, e  $\tau_R = RC$  é a constante de tempo resistiva do circuito.

É conveniente supor que, em  $t = 0$ , a tensão entre as placas do capacitor é igual a  $V_1$ , de tal modo que, num instante  $t > 0$ , ela seja dada por

$$V(t) = \frac{q_C(t)}{C} = \mathcal{E} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{V_1}{\mathcal{E}} \right) e^{-t/\tau_R} \right]. \quad (19)$$

O tempo  $\Delta T'$  de carregamento pode ser calculado fazendo  $V(T') = V'$ , que é o valor para o qual a lâmpada acende

$$\Delta T' = \tau_R \ln \left( \frac{\mathcal{E} - V_1}{\mathcal{E} - V'} \right) \equiv k' \tau_R, \quad (20)$$

onde  $k'$  é uma constante pois depende unicamente de parâmetros nominais dos elementos do circuito.

*Descarga do capacitor.* Quando  $V = V'$  a lâmpada se acende por conduzir corrente elétrica, curto-circuitando o capacitor e provocando a sua descarga. Como a resistência da lâmpada  $r$  é tipicamente muito baixa comparada à do resistor ( $r \ll R$ ), podemos supor que a fonte de tensão permanece em circuito aberto durante a descarga do capacitor ( $\mathcal{E} \approx 0$ ). Nesse caso, como a corrente no resistor  $i + i_C$  é praticamente zero, temos que a corrente na lâmpada é aproximadamente  $i = -i_C$ . Aplicando novamente a lei de Kirchoff temos, para a carga nas placas do capacitor, a seguinte equação diferencial

$$r \frac{dq_C}{dt} + \frac{1}{C} q_C = 0 \quad (21)$$

cuja solução é [23]

$$q_C(t) = q_C(t=0)e^{-t/\tau_r}, \quad (22)$$

onde  $\tau_r = rC$  é a constante de tempo relativa apenas à resistência da lâmpada de neônio. Nessa dedução supusemos implicitamente que  $r$  é constante. Essa suposição, porém, embora admissível para um resistor, pode ser uma aproximação muito grosseira para um tubo de descarga elétrica. No entanto, o fizemos aqui com o objetivo de simplificar o tratamento matemático e enfatizar os princípios físicos envolvidos.

A tensão entre as placas do capacitor, enquanto  $V' \leq V \leq V_1$ , é dada por

$$V(t) = V'e^{-(t-T')/\tau_r}, \quad (23)$$

e o tempo de descarga  $\Delta T''$  pode ser estimado fazendo  $V(T) = V_1$ , que é o valor para a extinção da descarga na lâmpada. Obtem-se

$$\Delta T'' = \tau_r \ln \left( \frac{V'}{V_1} \right) \equiv k'' \tau_r, \quad (24)$$

onde  $k''$  é uma outra constante. O período das oscilações do circuito é dado, pois, por

$$T = \Delta T' + \Delta T'' = (k'R + k''r)C. \quad (25)$$

### 3.2. Oscilações de relaxação no circuito

Vamos considerar o seguinte exemplo numérico: uma fonte de tensão DC com força eletromotriz  $\mathcal{E} = 90$  V, uma resistor de  $R = 1$  M $\Omega$  e um capacitor de  $C = 1$   $\mu$ F, o que dá uma constante de tempo capacitiva para o circuito aberto (sem a lâmpada) de  $\tau_R = RC = 1$  s. A especificação dos parâmetros para a lâmpada de neônio, por outro lado, é uma tarefa mais difícil, pois a mesma é um elemento resistivo não-linear, ou seja, a relação tensão-corrente não é linear como num resistor convencional.

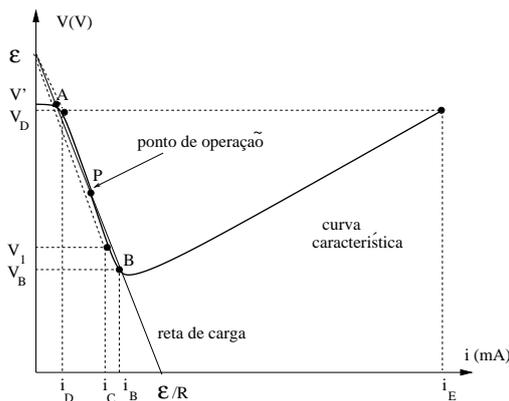


Figura 6 - Figura esquemática da curva característica e da reta de carga para uma lâmpada de neônio, indicando seu ponto de operação e sua resistência interna média.

A Fig. 6 mostra a curva característica (tensão *vs.* corrente) de um tubo simples de neônio, para o qual escolhemos como tensões de ignição e extinção os valores

$V' = 80$  V e  $V_1 = 40$  V, respectivamente, correspondendo aos pontos **A** e **B**. A resistência da lâmpada, sendo igual à inclinação local da curva característica (ou seja, a derivada  $dV/di$ ), será em geral diferente para cada valor da corrente usada no circuito. No entanto, nós trabalhamos apenas com o trecho da curva situado entre os pontos **A** e **B**, para a obtenção de oscilações de relaxação. A reta de carga correspondente a esse circuito poderá ser traçada unindo a ordenada  $\mathcal{E} = 90$  V (fem da fonte de tensão DC) ao ponto **A**. A interseção da reta de carga com a curva característica é o ponto de operação **P** do circuito. A equação da reta de carga é

$$V(i) = \mathcal{E} - ri, \quad (26)$$

onde  $r$  é a resistência interna média da lâmpada no trecho compreendido entre os pontos **A** e **B**. Uma estimativa (um tanto grosseira, mas aceitável para este exemplo numérico) do seu valor pode ser feita tomando o intervalo **AB** como um todo

$$r \approx \frac{\Delta V}{\Delta i} = \frac{V' - V_1}{\Delta i} = \frac{40}{4 \times 10^{-3}} = 10 \text{ k}\Omega, \quad (27)$$

o que fornece uma segunda constante de tempo capacitiva de  $\tau_r = rC = 0,01$  s.

As durações dos trechos correspondentes ao carregamento do capacitor e sua descarga são dadas pelas Eqs. (20) e (24) como

$$k' = \ln \left( \frac{90 - 40}{90 - 80} \right) = 1,609, \Rightarrow \Delta T' = 1,609 \text{ s}, \quad (28)$$

$$k'' = \ln \left( \frac{80}{40} \right) = 1,386, \Rightarrow \Delta T'' = 0,01386 \text{ s}, \quad (29)$$

o que identifica imediatamente as duas escalas de tempo: lenta ( $T'$ ) e rápida ( $T'' \approx 0,0086T$ ), de modo que o período total

$$T = \Delta T' + \Delta T'' = 1,623 \text{ s}, \quad (30)$$

é tão próximo de  $\Delta T'$ , que este último pode ser tomado como uma boa aproximação para o período  $T$  das oscilações de relaxação da lâmpada de neônio, tal qual fizemos no vaso de tântalo, aliás.

Os gráficos da tensão nos terminais da lâmpada e da corrente pela mesma são mostrados na Fig. 7. Durante o intervalo de carregamento do capacitor  $0 \leq t \leq \Delta T'$  a tensão na lâmpada evolui desde 40 V até o ponto de ignição da lâmpada (80 V), e esta permanece apagada (sem corrente). Atingido o ponto de ignição a lâmpada se descarrega rapidamente, provocando um pico de corrente, e fazendo a tensão nos seus terminais diminuir até o valor de extinção, após o que a lâmpada se apaga e o processo recomeça. A duração da descarga da lâmpada é tão pequena que praticamente não se distingue a não-linearidade presente, o que também ocorre na corrente pela lâmpada, que é nula praticamente todo o tempo, com exceção dos picos (de duração  $\Delta T''$ ) para os quais a corrente não é zero.

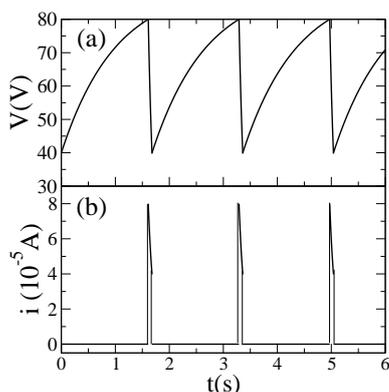


Figura 7 - (a) Tensão nos terminais da lâmpada de neônio, e (b) corrente na lâmpada de neônio.

#### 4. Oscilações pendulares e de relaxação

Vamos inicialmente comparar os dois exemplos de oscilações de relaxação vistos nas seções anteriores: o vaso de Tântalo (hidráulico) e o circuito com lâmpada (elétrico), para abstrair algumas das propriedades comuns a todas as oscilações de relaxação. Podemos considerar a pressão da água  $p(h(t))$  no vaso de Tântalo como sendo o análogo na tensão  $V(t)$  nos terminais da lâmpada de neônio, assim como o fluxo d'água pelo sifão tem um comportamento semelhante ao da intensidade de corrente no circuito. A característica essencial do vaso de Tântalo é a existência de um sifão operando em duas alturas diferentes (em relação à saída do sifão): o nível máximo  $h_{max} = h_A + h_B$  e o nível mínimo  $h_{min} = h_B$ . Já no circuito elétrico é essencial a existência das tensões de ignição  $V'$  e de extinção  $V_1$  da lâmpada de neônio. Em ambos os casos a amplitude das oscilações de relaxação é fixada por esses níveis máximo e mínimo, que são parâmetros característicos do sistema e *não podem ser facilmente alterados*, uma vez que referem-se a propriedades do aparato utilizado. Por exemplo, para alterarmos as tensões  $V'$  e  $V_1$  teríamos que trocar a própria lâmpada usada no experimento; ao passo que no vaso sifonado teríamos que mudar o tubo de lugar ou mesmo trocá-lo por outro de diferentes proporções.

Já o período nas oscilações de relaxação é arbitrário. No vaso de Tântalo ele é dado aproximadamente por (2) como  $Sh_A/Q$ , onde  $S$  é a área da seção reta do vaso,  $h_A$  a altura máxima e  $Q$  a vazão da torneira. Enquanto as duas primeiras são de difícil variação, a vazão na torneira é relativamente fácil de ser alterada. Dessa forma o período das oscilações do nível d'água pode ser ajustado de maneira razoavelmente arbitrária. Na verdade a vazão da torneira não é tão arbitrária assim: se for muito grande o sifão não é capaz de escorvar a água de forma rápida o suficiente para manter oscilações, e o sifão operaria continuamente como uma tubulação convencional.

Da mesma forma, o período das oscilações do cir-

cuito elétrico é dado aproximadamente por (20) como  $\tau_R \ln \left( \frac{\varepsilon - V_1}{\varepsilon - V'} \right)$ , onde o termo no argumento do logaritmo depende de características da lâmpada e não pode ser facilmente alterado, como vimos. No entanto, a constante de tempo resistiva  $\tau_R = RC$  pode ser facilmente alterada usando tanto um resistor variável (reostato) ou um capacitor variável (como o usado nos seletores de frequência dos aparelhos de rádio).

Além destas características semelhantes, podemos observar uma outra, bastante significativa: as oscilações de relaxação, embora envolvam processos físicos inerentemente dissipativos não são amortecidas. No vaso de Tântalo, por exemplo, o fluxo de água no sifão é influenciado pela viscosidade da água, que corresponde a uma perda de energia mecânica devido ao "atrito interno" do escoamento. Entretanto, as oscilações do nível de água em si não são amortecidas, já que há uma fonte constante de energia atuando no sistema, no caso o fluxo de água que é continuamente fornecido pela torneira.

Da mesma forma, embora haja resistências elétricas no circuito com a lâmpada de neônio, que levam a várias formas de dissipação de energia potencial elétrica, as oscilações da tensão nos terminais da lâmpada não são amortecidas, graças à tensão fornecida continuamente pela bateria. Logo, não faz sentido pensar em oscilações de relaxação não-amortecidas ou não-forçadas: toda oscilação de relaxação só existe pois há tanto uma fonte de energia constante (fluxo de água da torneira, tensão proveniente da bateria) como um sumidouro de energia (viscosidade da água, resistência elétrica). As oscilações de relaxação estacionárias, na verdade, aparecem devido a uma espécie de equilíbrio dinâmico entre essas duas tendências conflitantes.

Estamos mais acostumados a ver oscilações do tipo *pendular*, cujo protótipo mecânico é, naturalmente, o pêndulo simples: uma partícula de massa  $m$  suspensa por um fio inextensível e leve de comprimento  $\ell$ . Desprezamos tanto o atrito viscoso da partícula com o ar como o atrito sobre o fio no ponto de suspensão. O ângulo entre o fio e a vertical é denotada por  $\theta$ , e podemos denotar a amplitude das oscilações por  $\theta_0$ . Se esta última for suficientemente pequena, sabemos que o período das oscilações do pêndulo é dado, aproximadamente, por

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (31)$$

Na aproximação de pequenas oscilações, o pêndulo é formalmente semelhante ao sistema massa-mola, que é o paradigma de osciladores harmônicos. Nesse sistema a frequência "natural" das oscilações é dada por  $\sqrt{k/m}$ , onde  $m$  é a massa e  $k$  a constante elástica da mola. Já a amplitude das oscilações é determinada pela distensão máxima da mola, e normalmente é uma das condições iniciais do problema.

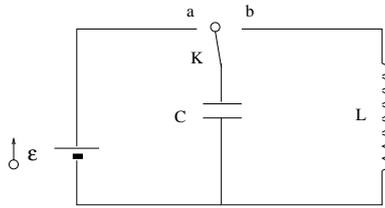


Figura 8 - Um circuito LC.

Um outro exemplo de oscilação pendular é o circuito LC, consistindo de uma bobina (indutor) e um capacitor associados em série com uma bateria (Fig. 8), a qual pode ser ligada ou desligada ao circuito por meio de uma chave  $K$ . A capacitância e a indutância são denotadas, respectivamente, por  $C$  e  $L$ , enquanto  $\mathcal{E}$  é a força eletromotriz fornecida pela bateria. Inicialmente posicionamos a chave na posição A indicada na Fig. 8 e aguardamos até que as placas do capacitor estejam totalmente carregadas com uma carga  $Q = C\mathcal{E}$ . Depois colocamos a chave  $K$  na posição B, desconectando a bateria do circuito, e monitoramos a tensão  $V$  entre as placas do capacitor.

As placas do capacitor, em se descarregando com o tempo, geram uma corrente elétrica que passa pela bobina, tal que a energia elétrica é convertida em magnética e *vice-versa*, de modo que a tensão entre as placas do capacitor oscila harmonicamente com frequência angular [23]

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (32)$$

e o período das oscilações, tanto da carga  $q(t)$  do capacitor como da corrente  $i(t)$  na bobina, é dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (33)$$

onde estamos desprezando as perdas de energia devido à resistência elétrica dos fios e outras causas (como uma possível histerese no núcleo ferromagnético do indutor).

Por que as oscilações do circuito LC são pendulares? Pois a amplitude das oscilações é determinada pela carga inicial do capacitor  $q(0)$ , a qual é facilmente variada, pois depende essencialmente de quanto tempo mantemos a chave  $K$  ligada: se esta ficar muito tempo ligada,  $q(0) = C\mathcal{E}$ , mas pode ser em princípio qualquer valor menor que isto. Essa situação é análoga à liberdade que temos de dar uma amplitude arbitrária ao pêndulo. Em geral, *nas oscilações pendulares a amplitude é facilmente alterada, enquanto nas oscilações de relaxação ela é praticamente fixa* durante a realização de um experimento, pela dificuldade em ser alterada.

Já o período das oscilações, tanto do pêndulo como do circuito LC, são funções de parâmetros difíceis de serem alterados. No primeiro caso, teríamos que aumentar ou diminuir o comprimento  $\ell$  do fio (ou levar o pêndulo - e o resto do aparato - para um lugar onde a aceleração da gravidade fosse significativamente diferente!). No circuito, teríamos que alterar a capacitância

(mais fácil) ou a indutância (mais difícil, implicando em colocar um núcleo ferromagnético no interior da bobina, por exemplo). De modo geral, *nas oscilações pendulares o período é fixo, enquanto para oscilações de relaxação ele é mais facilmente variado*.

Outra diferença essencial consiste em que, nessa discussão que fizemos das oscilações pendulares, tivemos de deixar claras as hipóteses de que não havia perdas de energia (dissipação) e fontes de energia. Dito de outra forma, oscilações pendulares estacionárias só são possíveis na ausência de dissipação, ou quando a dissipação é compensada por uma fonte de energia. Então faz sentido, para as oscilações pendulares, a classificação usual entre oscilações livres, amortecidas, e forçadas; ao passo que, nas oscilações de relaxação, essa distinção deixa de ter significado.

Com tantas diferenças entre oscilações pendulares e de relaxação, pode parecer que uma nada tem a haver com outra. No entanto, há sistemas físicos que apresentam, como situações-limite, tanto oscilações pendulares como de relaxação. O exemplo mais importante dessa classe de sistemas é a famosa equação de van der Pol, que será o objeto da seção VI.

## 5. O efeito de uma perturbação periódica

Além das diferenças vistas na seção anterior, outra distinção importante entre oscilações pendulares e de relaxação diz respeito a seu comportamento ante uma perturbação externa (ou “forçamento”) periódico no tempo. Essa perturbação deve necessariamente atuar sobre um dos fatores que influem sobre o período de uma oscilação de relaxação.

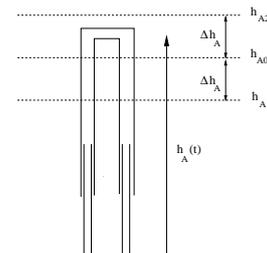


Figura 9 - Detalhe do sifão de um vaso de Tântalo onde o nível máximo d'água varia periodicamente com o tempo.

Vamos, inicialmente, considerar esse tipo de perturbação no vaso de Tântalo. Podemos imaginar uma perturbação externa alterando periodicamente o nível máximo do sifão, o que é possível adaptando um “trombone” à parte superior do sifão, que oscila tal que o nível máximo seja dado por  $h_A(t) = h_{A0} - \Delta h_A \sin(2\pi t/T_0)$ , onde  $T_0$  é o período e  $\Delta h_A$  é a amplitude das oscilações do “trombone” (Fig. 9). Desta forma o nível máximo do sifão oscila entre o valor mínimo  $h_{A1} = h_{A0} - \Delta h_A$  e o máximo  $h_{A2} = h_{A0} + \Delta h_A$ .

Vimos anteriormente que, para um nível máximo do sifão fixo  $h_A$ , o período das oscilações do nível d'água é dado por  $\Delta T \approx Sh_A/Q$ . De forma semelhante, vamos designar por  $\Delta T_1$  e  $\Delta T_2$ , respectivamente, os períodos correspondentes aos níveis mínimo  $h_{A1}$  e máximo  $h_{A2}$ . Como o período depende essencialmente da altura do nível d'água no vaso, se este varia é natural que o período também se ajuste a essa variação.

Como um exemplo, suponhamos que o período  $\Delta T$  seja um pouco superior a  $4T_0$  [7]. No instante inicial o nível máximo do sifão está na posição  $h_A(0) = h_{A0}$ , e nos instantes logo a seguir o nível máximo está descendo ( $h_A(t) \lesssim h_{A0}$ ), e o sifão está escorvando o vaso. Após um intervalo de tempo  $t = 4T_0$  temos praticamente um período da perturbação externa: o nível máximo do sifão estará novamente em  $h_{A0}$  em movimento descendente, mas ainda não estará cheio. Quando estiver cheio e se escorvar, o nível máximo será um pouco inferior a  $h_{A0}$ . Logo, para chegar a um novo preenchimento do sifão e realizar a terceira escorvagem, o tempo necessário será um pouco menor que  $\Delta T$ . Como  $\Delta T$  foi suposto um pouco maior que  $4T_0$ , o tempo necessário para a terceira escorvagem será mais próximo de  $4T_0$ , ou seja, o período da oscilação tende a se ajustar naturalmente a  $4T_0$ .

No exemplo do circuito com a lâmpada de neônio, podemos substituir a fonte de tensão contínua (bateria de fem constante  $\mathcal{E}$ ) por um gerador de tensão alternada  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \Delta\mathcal{E} \sin(2\pi t/T_0)$ , onde  $T_0$  é o período e  $\Delta\mathcal{E}$  é a amplitude das oscilações da tensão, com um viés  $\mathcal{E}_0$ . Vimos que o período das oscilações de tensão na lâmpada é dado, com boa aproximação, por  $\Delta T = RC \ln [(\mathcal{E} - V_1)(\mathcal{E} - V')]$ . Logo, o período mudará conforme os valores instantâneos da fem do gerador, com valores extremos  $\Delta T_1$  e  $\Delta T_2$  correspondendo, respectivamente, aos níveis mínimo  $\mathcal{E}_{min} = \mathcal{E}_0 - \Delta\mathcal{E}$  e máximo  $\mathcal{E}_{max} = \mathcal{E}_0 + \Delta\mathcal{E}$ .

Como ilustração, seja o período da oscilação da tensão na lâmpada igual a um valor um pouco menor que  $3T_0$ , onde  $T_0$  é o período da fem externa alternada. Com o tempo, o período irá ajustar-se de forma espontânea ao valor  $3T_0$ . De forma geral, podemos dizer que, *caso o período da oscilação de relaxação seja próximo (mas não igual) a um múltiplo inteiro  $n = 1, 2, 3, \dots$  do período da perturbação externa, o período da oscilação ajustar-se-á espontânea e exatamente a  $nT_0$ .*

A situação que descrevemos acima é radicalmente diferente em oscilações pendulares. Nelas, é a frequência, e não o período, das oscilações que ajusta-se à frequência da perturbação externa periódica. Por exemplo, consideremos um sistema massa-mola, cuja frequência de oscilações naturais é  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , onde  $k$  é a constante elástica da mola e  $m$  é a massa. Vamos considerar ainda uma força externa horizontal agindo sobre o sistema, variando periodicamente com o tempo na forma  $F = F_0 \sin(\Omega t)$ . Sabemos que a resposta do

sistema a essa perturbação é tal que a frequência das oscilações pendulares  $\omega$  ajusta ao valor da frequência de excitação  $\Omega$  ou a um dos seus harmônicos (múltiplos)  $n\Omega$ , onde  $n$  é um inteiro positivo [7].

Como a frequência é o inverso do período ( $\omega = 2\pi/T$ ), isso significa que o período da oscilação pendular se ajusta a um *sub-múltiplo* do período da força externa. Por exemplo, suponha que o período da oscilação do sistema massa-mola seja  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , e que o período da força externa seja  $T = T_0/n$ , onde  $n$  é um inteiro positivo não-nulo. A interação da força externa periódica com o oscilador leva a um movimento periódico cujo período é o do mais lento. Em geral, o período do movimento resultante é o menor múltiplo comum dos períodos dos movimentos componentes,  $T_0/m$  e  $T_0/n$  [7].

## 6. Conclusões

Oscilações de relaxação ocorrem em vários sistemas físicos e biológicos importantes, e caracterizam-se por terem uma amplitude fixa, ou difícil de ser alterada; ao passo que seu período é mais flexível e pode ser facilmente alterado. Nas oscilações de relaxação há sempre duas escalas de tempo que, adicionadas, compõem o período da oscilação: uma escala “lenta” e uma escala “rápida”. Por esse motivo, as oscilações de relaxação não podem ser caracterizadas por um único harmônico, ou modo de Fourier. Nas oscilações pendulares, mais familiares a estudantes e profissionais em física, a amplitude é mais facilmente variável, enquanto o período é praticamente fixo, e consiste de uma escala de tempo, o que permite sua representação por um pequeno número de modos, ou harmônicos.

Devido à existência de mecanismos de injeção e dissipação de energia, que compensam-se mutuamente, as oscilações de relaxação não são amortecidas, no sentido que damos habitualmente às oscilações pendulares. Por outro lado, as oscilações de relaxação respondem de forma diversa a um forçamento externo harmônico: caso o período da oscilação de relaxação seja próximo (mas não igual) a um múltiplo inteiro do período do forçamento externo, o período da oscilação ajustar-se-á a esse valor múltiplo. Por outro lado, nas oscilações pendulares é a frequência que se ajusta à frequência do forçamento externo (ressonância). Neste trabalho procuramos motivar o interesse pelas oscilações de relaxação, apresentando em detalhes dois exemplos físicos na mecânica (vaso de Tântalo) e na eletricidade (circuito com lâmpada de neônio).

## Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com auxílio financeiro do CNPq, CAPES, e Fundação Araucária (Estado do Paraná).

## Referências

- [1] B. Van der Pol, *Selected Scientific Papers*, 2 volumes, Editores: H. Bremmer e C. J. Bouwkamp (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960).
- [2] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983).
- [3] N. Fiedler-Ferrara e C.P.C. Prado, *Caos: uma Introdução* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1994).
- [4] L.H.A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos* (Ed. da Física, São Paulo, 2007), 2ª Ed.
- [5] Y. Rocard, *Dynamique Générale des Vibrations* (Masson et Cie., Paris, 1960), 3ème ed.
- [6] J.-P. Pérez, *Mécanique Physique* (Masson et Cie., Paris, 1961).
- [7] A. Fouillé, *Física das Vibrações. Tomo I: Estudo Geral dos Movimentos Vibratórios* (Ed. Globo, Porto Alegre, 1970).
- [8] P. Hagedorn, *Oscilações Não-Lineares* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 1984).
- [9] L. Glass, *Dos Relógios ao Caos: Os Ritmos da Vida* (Ed. UNESP, São Paulo, 1997).
- [10] A.C.-L. Chian, *Int. J. Theor. Appl. Finance* **3**, 601 (2000).
- [11] G.F. Herrenden-Harker, *Am. J. Phys.* **8**, 1 (1940).
- [12] E.C. Watson, *Am. J. Phys.* **22**, 390 (1954).
- [13] L. Finegold, *Am. J. Phys.* **39**, 575 (1971).
- [14] R.E. Benenson, *Phys. Teacher* **188**, 188 (1991).
- [15] E.J. Ansaldo, *Phys. Teacher* **20**, 243 (1982).
- [16] L.E. Dood, *Am. J. Phys.* **23**, 313 (1955).
- [17] G. Baker, *Deuses e Heróis: o Romance da Mitologia Grega* (Ed. Brasiliense, São Paulo, 1960).
- [18] Uma talvez excessivamente dramática analogia com o suplício de Tântalo levou o químico A.G. Ekeberg, em 1802, a batizar de *Tântalo* um novo elemento por ele encontrado em minerais finlandeses, e de muito difícil dissolução em ácidos.
- [19] B. Woodcroft (ed.), *The Pneumatics of Hero of Alexandria* (1851, reimpresso em 1971). O texto completo da tradução de Bennet Woodcroft está disponível online em <http://www.history.rochester.edu/steam/hero/>.
- [20] W.B. Jensen, *J. Chem. Education* **84**, 1913 (2007).
- [21] M.S.D. Cattani, *Elementos de Mecânica dos Fluidos* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2005), 2ª ed.
- [22] Uma implementação didática deste circuito pode ser encontrada, com saídas tanto em áudio como em um osciloscópio, no sítio [http://www.feiradeciencias.com.br/sala15/15\\_08.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala15/15_08.asp).
- [23] H.M. Nussenzeig, *Curso de Física Básica. Vol. 3: Eletromagnetismo* (Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2003). A. Chaves, *Física Básica: Eletromagnetismo* (LTC, Rio de Janeiro, 2007).