

Perturbações cosmológicas e a taxa de crescimento das flutuações da matéria

(*Cosmological perturbations and the growth rate of matter fluctuations*)

R.F. vom Marttens¹, F.K. Ribeiro e W. Zimdahl

Departamento de Física, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil

Recebido em 12/8/2011; Aceito em 27/8/2011; Publicado em 27/2/2012

As estruturas observadas no universo (galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias) são resultados da instabilidade gravitacional. Esta instabilidade amplifica perturbações, originalmente muito pequenas, até o regime não linear. Neste artigo comparamos as taxas de crescimento das perturbações da matéria para vários modelos cosmológicos. Geralmente, a presença da energia escura diminui o crescimento. Os detalhes dependem das características do modelo, por exemplo do acoplamento com as perturbações da energia escura ou de uma interação no setor escuro do universo.

Palavras-chave: matéria escura, energia escura, formação de estruturas cosmológicas.

The observed structures in the Universe (galaxies, clusters and superclusters) are the results of gravitational instability. This instability amplifies perturbations, originally very small, to the nonlinear regime. In this paper we compare the growth rates of matter perturbations for several cosmological models. Generally, the presence of dark energy reduces the growth. The details depend on the specific features of the model, for example on the coupling with the dark-energy perturbations or on interactions in the dark sector of the Universe.

Keywords: dark matter, dark energy, cosmic structure formation.

1. Introdução

O conjunto dos dados observacionais atuais está indicando que aproximadamente 95% do substrato cosmológico é invisível e só se manifesta através de sua ação gravitacional. No âmbito da teoria da relatividade geral de Einstein, a conclusão mais aceita é que estes 95% estão formando um “setor escuro” de natureza não bariônica. Este setor é normalmente dividido em energia escura e matéria escura. Energia escura é uma componente exótica com uma pressão negativa que domina dinamicamente o universo atual. Na teoria de Einstein uma pressão efetiva negativa é necessária para entender a expansão acelerada do universo, detectada em 1998 [1]. Matéria escura, por outro lado, é matéria sem pressão, necessária para explicar a origem das estruturas cósmicas. A natureza da matéria escura e da energia escura (cujo candidato mais natural é a constante cosmológica, que, no entanto, ainda não tem o seu valor preciso compreendido) é objeto de intensos estudos em todo o mundo, tanto do ponto de vista teórico quanto observacional. Para resumos da situação atual veja, por exemplo, as Refs. [2–6].

As estruturas observadas no universo (galáxias,

aglomerados e superaglomerados de galáxias) são resultados da instabilidade gravitacional. Tecnicamente, esta instabilidade é descrita pela teoria de perturbações cosmológicas. Uma quantidade crucial é a taxa de crescimento de contraste de densidade da matéria. Dados observacionais relevantes para o índice de crescimento se encontra, por exemplo, na Ref. [7]. Modelos diferentes predizem taxas diferentes de crescimento das inhomogeneidades. Em particular, esta taxa é influenciada pela existência de uma interação entre as componentes dinamicamente mais importantes. Quantificar esta diferença tem sido de interesse recente na literatura cosmológica [8–10]. O cálculo da taxa mencionada representa uma aplicação do formalismo perturbativo da relatividade geral para escalas menores que a escala de Hubble. Sob estas condições uma aproximação newtoniana é justificada. Já a partir da década de 30 foi apresentada por McCrea and Milne [11] a possibilidade da abordagem newtoniana nos problemas cosmológicos locais (escalas inferiores a 100 Mpc). As relações básicas da teoria newtoniana podem ser encontradas, por exemplo, no livro clássico de Weinberg [12]. Neste artigo aplicamos uma teoria neo-newtoniana. Em comparação com a teoria newtoniana, a teoria neo-newtoniana é am-

¹E-mail: rodrigo vom marttens@gmail.com.

pliada pela inclusão da pressão já no fundo homogêneo e isotrópico [13–17], assim admitindo a descrição da fase atual de expansão acelerada.

Enquanto o formalismo neo-newtoniano reproduz a dinâmica relativista no fundo exatamente, têm diferenças no nível perturbativo. No entanto, na primeira ordem a dinâmica relativista das perturbações coincide exatamente com a contraparte neo-newtoniana no caso em que a velocidade do som é igual a zero [16]. Então se pode esperar, que a dinâmica neo-newtoniana fornece uma descrição adequada pelo menos para valores pequenos da velocidade do som. Como aqui calculamos perturbações da matéria sem pressão, consequentemente com velocidade de som zero, as condições para aplicar uma descrição newtoniana são satisfeitas.

Geralmente, o formalismo da teoria (neo-) newtoniana é menos pesado do que o formalismo da relatividade geral. Tendo em mente as limitações inerentes, esta abordagem pode dar uma visão transparente e pedagógica da dinâmica cosmológica até cálculos confiáveis para problemas especiais.

A estrutura do artigo é a seguinte. No capítulo 2 apresentamos as relações básicas da cosmologia newtoniana. A análise perturbativa geral é introduzida no capítulo 3. No capítulo 4 estudamos em detalhe os modelos de Einstein-de Sitter, de Λ CDM, de um fluido viscoso e de um termo cosmológico que decai linearmente com a taxa de Hubble. O sumário dos resultados é o conteúdo do capítulo 5.

2. Cosmologia (neo-) newtoniana

2.1. Dinâmica do fundo homogêneo e isotrópico

Existe um argumento simples na base da teoria newtoniana que permite chegar à equação de Friedmann da relatividade geral (veja a Ref. [12]). Consideramos a trajetória de uma partícula de massa m que é parte de um fluido com simetria esférica em expansão,

$$x_\alpha(t) = x_\alpha(t_0) \frac{a(t)}{a(t_0)}, \quad (1)$$

onde x_α são as coordenadas ($\alpha = 1, 2, 3$) e $a(t)$ é um fator de escala, grandeza que caracteriza a expansão da esfera. As quantidades $x_\alpha(t_0)$ representam valores iniciais ou coordenadas comóveis. Assumimos que a energia potencial $V(t)$ da partícula resulta da matéria dentro da esfera de raio $r \equiv |\mathbf{r}(t)|$, onde $r^2 \equiv \sum_\alpha x_\alpha(t)^2$. O volume da esfera é $\frac{4\pi}{3}r^3$. Com uma densidade da massa μ , a massa dentro da esfera é $M = \frac{4\pi}{3}\mu r^3$. Com isso temos uma energia potencial

$$V(t) = -G \frac{Mm}{r} = -G \frac{4\pi}{3} \mu r^3 \frac{m}{r}. \quad (2)$$

Aplicando a Eq. (1) com $r_0^2 \equiv \sum_\alpha x_\alpha(t_0)^2$ e $a_0 \equiv a(t_0)$ obtemos

$$V(t) = -\frac{4\pi G}{3} m \mu r_0^2 \frac{a^2}{a_0^2}. \quad (3)$$

Com a velocidade

$$v_\alpha = \dot{x}_\alpha = \frac{\dot{a}}{a} x_\alpha, \quad (4)$$

onde o ponto significa uma derivada com respeito ao tempo, a energia cinética da partícula é

$$T(t) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m r_0^2 \frac{\dot{a}^2}{a_0^2}. \quad (5)$$

Então, a energia total da partícula pode ser escrita como

$$E_p = \frac{1}{2} m \frac{r_0^2}{a_0^2} \left(\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3} a^2 \mu \right). \quad (6)$$

Com a identificação

$$E_p \equiv -\frac{1}{2} m \frac{r_0^2}{a_0^2} k, \quad (7)$$

concluimos que

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \mu - \frac{k}{a^2}. \quad (8)$$

Se identificamos a densidade da massa μ com a densidade da energia ρ (em unidades nas quais a velocidade da luz é igual a um), a Eq. (8) coincide com a equação de Friedmann da relatividade geral de Einstein para o fator de escala a da métrica de Robertson-Walker. O último termo no lado direito da Eq. (8) descreve a curvatura espacial na relatividade geral. A equação de Friedmann é a equação básica para estudar a dinâmica de modelos cosmológicos mais simples, os modelos espacialmente homogêneos e isotrópicos.

No passo seguinte consideramos o meio cósmico como um fluido com densidade da energia ρ . Então, $E = \rho V = \frac{4\pi}{3} \rho a^3$ é a energia total no volume V . Na abordagem newtoniana original, efeitos gravitacionais da pressão não são incluídos o que limita a aplicação da teoria à um meio com pressão nula ($p = 0$). A introdução da pressão pode ser obtida da relação de Gibbs para um fluido perfeito em expansão adiabática ($dS = dE + p dV = 0$). Nestas condições temos

$$dS = 0 \Rightarrow dE + p dV = 0 \Rightarrow V d\rho + (\rho + p) dV = 0. \quad (9)$$

Com $dV = 3 \frac{da}{a} V$ achamos

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0. \quad (10)$$

Assim recuperamos a conservação local da energia da relatividade geral. Diferenciar a equação de Friedmann (8) (com $\mu \rightarrow \rho$) com respeito ao tempo nos fornece

$$2 \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{8\pi G}{3} \dot{\rho} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{k}{a^2}. \quad (11)$$

Combinando as Eqs. (10) e (11) chegamos a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (12)$$

que também coincide com a relação correspondente da relatividade geral. Esta relação implica que a pressão age gravitacionalmente, que não é o caso na teoria newtoniana original. Conseqüentemente, a equação de Friedmann e a equação de continuidade que inclui a pressão já implicam a equação correta da aceleração (12).

O fluido também é descrito pela equação de Euler. Como gradientes espaciais da pressão não aparecem no universo homogêneo, temos

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + (v_\mu \nabla_\mu) v_\alpha = -\phi_{,\alpha}. \quad (13)$$

Aqui aplicamos a convenção segundo qual a existência de dois índices (aqui μ) implica uma soma de 1 a 3. Para o lado esquerdo da Eq. (13) obtemos

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + (v_\mu \nabla_\mu) v_\alpha = x_\alpha \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) + x_\alpha \frac{\dot{a}^2}{a^2} = x_\alpha \frac{\ddot{a}}{a}. \quad (14)$$

O lado direito da Eq. (14) é dado pela Eq. (12). Consistência com a Eq. (13) é obtido pela

$$\nabla_\alpha \phi = x_\alpha \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \Rightarrow \Delta \phi = 4\pi G(\rho + 3p), \quad (15)$$

que representa a equação de Poisson modificada.

Para sistemas com mais de uma componente, todas as quantidades hidrodinâmicas (ρ , p e v_α) recebem um índice (i) de componente. As Eqs. (10) e (13) então são válidas separadamente para cada espécie. A Eq. (15) é modificada segundo

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \phi &= x_\alpha \frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_{(i)} + 3p_{(i)}) \Rightarrow \\ \Delta \phi &= 4\pi G \sum_i (\rho_{(i)} + 3p_{(i)}), \end{aligned} \quad (16)$$

e para a equação de Friedmann temos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_{(i)}, \quad (17)$$

onde, por simplicidade, omitimos o termo de curvatura espacial. Segundo os dados observacionais atuais, a curvatura só dá uma contribuição pequena e é desprezada na maioria das investigações. A partir daqui vamos considerar um universo plano com uma dinâmica segundo a Eq. (17).

Generalizando estas relações do universo homogêneo e isotrópico, obtemos as equações hidrodinâmicas newtonianas gerais (em unidades com $c^2 = 1$):

1) A equação da continuidade:

$$\dot{\rho} + v_{\alpha,\alpha}(\rho + p) = 0, \quad (18)$$

onde agora $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_\alpha \nabla_\alpha \rho$.

2) A equação de Euler:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + (v_\mu \nabla_\mu) v_\alpha = -\frac{1}{\rho + p} p_{,\alpha} - \phi_{,\alpha}. \quad (19)$$

3) A equação de Poisson:

$$\nabla_\alpha \nabla_\alpha \phi \equiv \Delta \phi = 4\pi G(\rho + 3p). \quad (20)$$

As equações newtonianas tradicionais seguem no caso limite $p = 0$. O acréscimo dos efeitos da pressão é de importância fundamental para uma descrição adequada da dinâmica do universo no âmbito newtoniano. O fator $\frac{1}{\rho+p}$ na Eq. (19) garante que as perturbações se propaguem com a velocidade adiabática de som. Mas como o nosso interesse será o cálculo das flutuações da matéria sem pressão, este termo não aparecerá.

3. Análise perturbativa

Apesar do universo ser, em grandes escalas, homogêneo e isotrópico, são evidentes inhomogeneidades locais, por exemplo galáxias e aglomerados de galáxias. O surgimento dessas estruturas se deve à evolução de pequenas flutuações no universo primordial. Procuramos estudar a dinâmica de desvios pequenos da homogeneidade e da isotropia. Dividimos todas as quantidades nas equações hidrodinâmicas em partes do fundo homogêneo e isotrópico (índice 0) e de perturbações sobre este fundo. A dinâmica do fundo só depende do tempo, as perturbações dependem também do espaço. Então temos

$$\rho = \rho_0(t) + \hat{\rho}(\mathbf{r}, t) \equiv \rho_0(t)[1 + \delta(\mathbf{r}, t)], \quad (21)$$

e

$$\begin{aligned} p &= p_0(t) + \hat{p}(\mathbf{r}, t), \\ \phi &= \phi_0(t) + \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \\ v_\alpha &= v_{\alpha 0}(t) + \hat{v}_\alpha(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (22)$$

No desenvolvimento seguinte serão omitidos os índices 0, uma vez que o “chapéu” já distingue as perturbações. Inserindo as expressões (21) e (22) nas equações hidrodinâmicas, tomando somente termos de ordem linear nas perturbações e tendo em vista que no fundo essas equações devem ser satisfeitas, obtemos da equação da continuidade

$$\dot{\hat{\rho}} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\hat{\rho} + \hat{p}) + (\rho + p)\hat{v}_{\alpha,\alpha} = 0, \quad (23)$$

onde foi usado (da Eq. (1)) que $v_{\alpha,\alpha} = 3\frac{\dot{a}}{a}$. Da equação de Euler (19) obtemos

$$\dot{\hat{v}}_\alpha = -\frac{\dot{a}}{a}\hat{v}_\alpha - \frac{1}{\rho + p}\hat{p}_{,\alpha} - \hat{\phi}_{,\alpha}. \quad (24)$$

A equação de Poisson na primeira ordem é

$$\Delta\hat{\phi} = 4\pi G(\hat{\rho} + 3\hat{p}) . \quad (25)$$

A generalização para um sistema de vários componentes consiste outra vez em colocar um índice i às quantidades ρ , p e v_α . Nestas circunstâncias as equações de continuidade e de Euler ficam válidas para cada componente separadamente também no nível perturbativo. No entanto, a equação de Poisson assume a forma

$$\Delta\hat{\phi} = 4\pi G \left(\sum_i \hat{\rho}_{(i)} + 3\hat{p}_{(i)} \right) . \quad (26)$$

A flutuação do campo gravitacional é gerado pela soma de todas as perturbações das densidades e , com o fator 3, de todas as perturbações das pressões.

Introduzindo quantidades fracionais $\delta_{(i)} \equiv \frac{\hat{\rho}_{(i)}}{\rho_{(i)}}$, obtemos para a i -ésima componente,

$$\dot{\delta}_{(i)} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\hat{p}_{(i)} - p_{(i)}\delta_{(i)}}{\rho_{(i)}} \right) + \left(1 + \frac{p_{(i)}}{\rho_{(i)}} \right) \hat{v}_{(i),\alpha}^\alpha = 0 . \quad (27)$$

Definimos uma equação de estado $w_{(i)} = \frac{p_{(i)}}{\rho_{(i)}}$ para a i -ésima componente, assumimos perturbações adiabáticas $\hat{p}_{(i)} = v_{(i)s}^2 \hat{\rho}_{(i)}$, onde $v_{(i)s}$ é a velocidade adiabática do som para a componente i e introduzimos coordenadas comóveis q_α através da relação $x_\alpha = a q_\alpha$, achamos

$$\dot{\delta}_{(i)} + 3H(v_{(i)s}^2 - w_{(i)})\delta_{(i)} + (1 + w_{(i)})\frac{1}{a} \frac{\partial \hat{v}_{(i)\alpha}}{\partial q_\alpha} = 0 , \quad (28)$$

onde $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ é a função de Hubble. A equação de Euler (24) diferenciada com respeito à coordenada comóvel q_α se transforma em

$$\frac{\partial \hat{v}_{(i)\alpha}}{\partial q_\alpha} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \hat{v}_{(i)\alpha}}{\partial q_\alpha} - \frac{1}{a(\rho_{(i)} + p_{(i)})} \Delta_q \hat{p}_{(i)} - \frac{1}{a} \Delta_q \hat{\phi} , \quad (29)$$

onde Δ_q é o laplaciano em coordenadas comóveis. Diferenciando a Eq. (28) com respeito ao tempo e utilizando a Eq. (29) fornece

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_{(i)} + \left[2H - \frac{\dot{w}_{(i)}}{1 + w_{(i)}} + 3H(v_{(i)s}^2 - w_{(i)}) \right] \dot{\delta}_{(i)} + \left[3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) (v_{(i)s}^2 - w_{(i)}) + 3H(v_{(i)s}^2)' - 3H\dot{w}_{(i)} \left(\frac{1 + v_{(i)s}^2}{1 + w_{(i)}} \right) \right] \delta_{(i)} \\ - v_{(i)s}^2 \frac{\Delta_q \delta_{(i)}}{a^2} - (1 + w_{(i)}) \frac{\Delta_q \hat{\phi}}{a^2} = 0 , \end{aligned} \quad (30)$$

onde foi usado que $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$. Aplicamos aqui a Eq. (26), obtemos um sistema de duas componentes (índices 1 e 2)

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_{(1)} + \left[2H - \frac{\dot{w}_{(1)}}{1 + w_{(1)}} + 3H(v_{(1)s}^2 - w_{(1)}) \right] \dot{\delta}_{(1)} + \left[3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 \right) (v_{(1)s}^2 - w_{(1)}) + 3H(v_{(1)s}^2)' - 3H\dot{w}_{(1)} \left(\frac{1 + v_{(1)s}^2}{1 + w_{(1)}} \right) \right] \delta_{(1)} \\ + v_{(1)s}^2 \frac{k^2}{a^2} - (1 + w_{(1)})4\pi G\rho_{(1)}(1 + 3v_{(1)s}^2) \delta_{(1)} = (1 + w_{(1)})4\pi G\rho_{(2)}(1 + 3v_{(2)s}^2)\delta_{(2)} \end{aligned} \quad (31)$$

e uma equação correspondente com os índices 1 e 2 trocados. Com $v_{(1)s}^2 = w_{(1)} = \text{constante}$ chegamos a forma simplificada

$$\ddot{\delta}_{(1)} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{(1)} + \left[v_{(1)s}^2 \frac{k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_{(1)}(1 + w_{(1)})(1 + 3v_{(1)s}^2) \right] \delta_{(1)} = (1 + w_{(1)})4\pi G\rho_{(2)}(1 + 3v_{(2)s}^2)\delta_{(2)} , \quad (32)$$

junto com uma equação com $1 \rightleftharpoons 2$. É óbvio, que, em geral, as equações perturbativas para as componentes 1 e 2 estão acopladas gravitacionalmente por causa da existência do lado direito nas Eqs. (31) e (32). No caso mais simples de um fluido só com equação de estado de poeira $w = v_s^2 = 0$ temos

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\rho\delta = 0 . \quad (33)$$

O sistema que consiste na Eq. (31) junto com uma equação equivalente para $1 \rightleftharpoons 2$ forma a base teórica geral para a dinâmica das perturbações num meio cósmico

de duas componentes. Para as aplicações na seção seguinte vamos identificar a componente 1 com matéria não relativista o que nos permite utilizar o sistema simplificado (32) com $w_{(1)} = v_{(1)s}^2 = 0$.

4. Modelos específicos da dinâmica cosmológica

Com toda a análise perturbativa desenvolvida vamos então aplica-la a alguns modelos do universo atual. Antes de estudar modelos do universo com duas compo-

nentes nas subseções seguintes, consideramos o modelo de Einstein-de Sitter. Datado de 1932, o modelo de Einstein-de Sitter considera o universo plano formado apenas de matéria sem pressão. Este modelo foi o modelo padrão antes da detecção da expansão acelerada do universo em 1998.

4.1. Modelo de Einstein-de Sitter

Para um universo com apenas uma componente de poeira ($p = 0$) as equações da continuidade (10) e de Friedmann (8) (com $\mu \rightarrow \rho$) fornecem

$$\rho_{(m)} = \rho_{(m)0} a^{-3} \quad \Rightarrow \quad H = H_0 a^{-3/2}, \quad (34)$$

onde $H_0 \equiv H(t_0)$ é a constante de Hubble e o fator de escala foi normalizado com o valor atual $a_0 \equiv a(t_0) = 1$. A equação relevante para as perturbações é a Eq. (33). Com uma mudança de variável segundo

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{(m)} &= \frac{d\delta_{(m)}}{da} \dot{a} \equiv \delta'_{(m)} a H, \\ \ddot{\delta}_{(m)} &= \frac{d}{da} \left(\delta'_{(m)} a H \right) a H = \\ &= \left[\delta''_{(m)} a H + \delta'_{(m)} H + \delta'_{(m)} a H' \right] a H, \end{aligned} \quad (35)$$

chegamos à equação para $\delta_{(m)}(a)$,

$$\delta''_{(m)} + \frac{3}{2a} \delta'_{(m)} - \frac{3}{2a^2} \delta_{(m)} = 0. \quad (36)$$

A solução geral desta equação é

$$\delta_{(m)} = Aa + Ba^{-3/2}, \quad (37)$$

onde A e B são constantes de integração. O importante é, que temos um termo com crescimento linear em a . É este crescimento que é responsável para a formação das estruturas no universo. Ou seja, o universo necessariamente tinha passado por uma fase com dominância dinâmica da matéria não relativista. O comportamento da moda crescente é visualizado pela reta na Fig. 1.

4.2. Modelo de Λ CDM

Neste modelo o meio cósmico consiste numa componente da matéria escura fria (*CDM: Cold Dark Matter*) com densidade da energia $\rho_{(m)}$ e numa constante cosmológica Λ com densidade da energia $\rho_{(\Lambda)}$,

$$\rho_{(m)} = \rho_{(m)0} a^{-3} \quad \text{e} \quad \rho_{(\Lambda)} = \text{constante}. \quad (38)$$

Assumindo um universo plano, o modelo Λ CDM através da equação de Friedmann (17) é caracterizado pela função de Hubble

$$H = H_0 [\Omega_{(m)0} a^{-3} + \Omega_{(\Lambda)}]^{1/2}, \quad (39)$$

onde introduzimos as definições

$$\Omega_{(m)0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{(m)0} \quad \text{e} \quad \Omega_{(\Lambda)} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{(\Lambda)}. \quad (40)$$

Este modelo, apesar da análise simples, apresenta resultados que estão de acordo com os dados observacionais, sendo ele assim muitas vezes usado como referência na literatura. Para essas duas componentes temos $v_{(m)s}^2 = v_{(\Lambda)s}^2 = 0$, $w_{(m)} = 0$ e $\delta_{(\Lambda)} = 0$ o que nos remete outra vez à Eq. (33), mas com uma função de Hubble diferente da utilizada no modelo de Einstein-de Sitter. Agora obtemos

$$\begin{aligned} \delta''_{(m)} + \frac{3}{a} \left[1 - \frac{\Omega_{(m)0} a^{-3}}{2(\Omega_{(m)0} a^{-3} + \Omega_{(\Lambda)})} \right] \delta'_{(m)} - \\ \frac{3}{2a^2} \frac{\Omega_{(m)0} a^{-3}}{(\Omega_{(m)0} a^{-3} + \Omega_{(\Lambda)})} \delta_{(m)} = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Obviamente, no limite $\Omega_{(\Lambda)} = 0$ recuperamos a Eq. (36). Valores observacionalmente preferidos são $\Omega_{(m)0} \approx 0.28$ e $\Omega_{(\Lambda)} \approx 0.72$. A Fig. 1 mostra, que a existência de um $\Lambda > 0$ diminui o crescimento das perturbações da matéria.

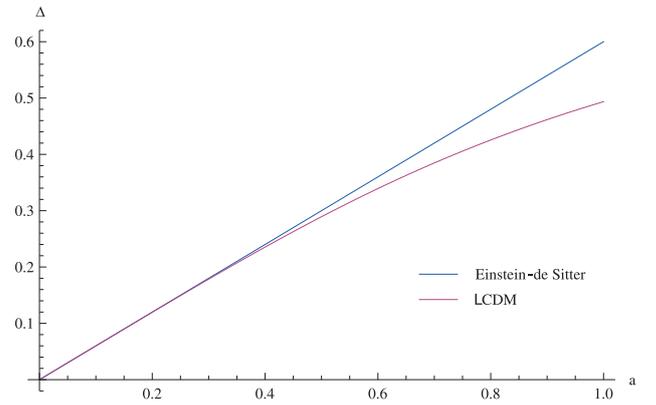


Figura 1 - Comparação entre as taxas da crescimento de flutuações da matéria para os modelos de Einstein-de Sitter e Λ CDM.

4.3. Modelo de fluido viscoso

Fluidos dissipativos representam um caminho para uma descrição unificada do setor escuro do universo [19–25]. Nesta abordagem um fluido único age como matéria escura para altos valores do desvio para o vermelho e como uma constante cosmológica no limite do futuro distante. Na fase atual temos uma mistura dos dois. Foi mostrado que no fundo homogêneo e isotrópico existe uma correspondência entre a dinâmica gerada pelos gases de Chaplygin e a dinâmica gerada pelos fluidos dissipativos [20, 21]. Por outro lado, no nível perturbativo existem diferenças cruciais. É o caracter não adiabático que faz modelos dissipativos aparentemente útil para descrever a distribuição da matéria no universo [25, 26].

4.3.1. Fundo homogêneo e isotrópico

Consideramos um modelo cosmológico com um fluido viscoso e matéria sem pressão. Neste caso a matéria descreve matéria bariônica e o fluido viscoso descreve o setor escuro do universo de maneira unificada. O fluido viscoso é caracterizado pela pressão $p_{(v)} = -3\zeta H$, onde ζ é o coeficiente de viscosidade volumétrica. A densidade de energia total ρ é a soma $\rho = \rho_{(v)} + \rho_{(m)}$, onde $\rho_{(v)}$ representa a densidade de energia do fluido viscoso e $\rho_{(m)}$ é a densidade de energia da matéria. Da equação de Friedmann (17) temos para a função de Hubble $H = \left[\frac{8\pi G}{3}\right]^{\frac{1}{2}} (\rho_{(v)} + \rho_{(m)})^{\frac{1}{2}}$. A pressão do fluido viscoso coincide com a pressão total,

$$p = p_{(v)} = -3\zeta H \quad \Rightarrow \quad p = -A\rho^{\frac{1}{2}}, \quad (42)$$

onde $A \equiv 3\zeta \left[\frac{8\pi G}{3}\right]^{1/2}$. A Eq. (42) equivale à equação de estado de um gás de Chaplygin generalizado que é de estrutura $p = -A\rho^{-\gamma}$. O caso (42) corresponde ao parâmetro $\gamma = -\frac{1}{2}$. Estamos enfatizando que é o meio cósmico *total* que se comporta como um gás de Chaplygin generalizado, não a componente viscosa separadamente. A densidade total de energia é determinada pela equação

$$\dot{\rho} + 3H(\rho - A\rho^{1/2}) = 0, \quad (43)$$

que possui como solução

$$\rho = \left[A + Ba^{-3/2}\right]^2, \quad (44)$$

onde B é uma constante de integração. Introduzindo o parâmetro q de desaceleração através de $q = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}$, podemos reescrever a função de Hubble em termos do valor atual q_0 de q ,

$$H = \frac{H_0}{3} \left[1 - 2q_0 + 2(1 + q_0)a^{-3/2}\right]. \quad (45)$$

Para a matéria temos novamente $\rho_{(m)} = \rho_{(m)0}a^{-3}$. Então a densidade de energia do fluido viscoso é a diferença

$$\rho_{(v)} = \frac{\rho_0}{9} \left[1 - 2q_0 + 2(1 + q_0)a^{-3/2}\right]^2 - \rho_{(m)0}a^{-3}. \quad (46)$$

Repetimos que temos um modelo unificado do setor escuro do universo, descrito pelo fluido viscoso. Além disso, este fluido viscoso, junto com a matéria sem pressão se comporta como um gás de Chaplygin generalizado.

4.3.2. Dinâmica perturbativa

A base para calcular as flutuações da matéria é a Eq. (32). Aqui identificamos a componente 1 com a matéria e a componente 2 com o fluido viscoso. Com

$v_{(m)s}^2 = w_{(m)} = 0$ temos

$$\ddot{\delta}_{(m)} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{(m)} - 4\pi G\rho_{(m)}\delta_{(m)} = 4\pi G\rho_{(v)}(1 + 3v_{(v)s}^2)\delta_{(v)}. \quad (47)$$

O lado esquerdo da Eq. (47) coincide com a Eq. (33). Por causa da existência do lado direito as flutuações da matéria ficam acopladas às flutuações do fluido viscoso. O sistema acoplado da Eq. (47) e da equação correspondente para $\delta_{(v)}$ é difícil demais para soluções simples e transparentes. Por isso introduzimos a simplificação $(1 + 3v_{(v)s}^2)\delta_{(v)} = \alpha\delta_{(m)}$. Assim, o acoplamento das flutuações da matéria às flutuações do fluido viscoso é codificado no parâmetro α . Com esta suposição, que corresponde à aproximação

$$\frac{1}{a^2}\Delta_q\hat{\phi} = 4\pi G(\rho_{(m)} + \alpha\rho_{(v)})\delta_{(m)} \quad (48)$$

para a equação de Poisson (veja Eq. (26)), a equação relevante é

$$\ddot{\delta}_{(m)} + 2H\dot{\delta}_{(m)} - 4\pi G(\rho_{(m)} + \alpha\rho_{(v)})\delta_{(m)} = 0. \quad (49)$$

Novamente usaremos a mudança de variável dada pelas relações na Eq. (35), resultando em

$$\delta''_{(m)} + \frac{3}{2a} \left[1 + \frac{1 - 2q_0}{1 - 2q_0 + 2(1 + q_0)a^{-3/2}}\right] \delta'_{(m)} - \frac{3}{2a^2} \left[\frac{9(1 - \alpha)\Omega_{(m)0}a^{-3}}{[1 - 2q_0 + 2(1 + q_0)a^{-3/2}]^2}\right] \delta_{(m)} = 0. \quad (50)$$

Para $q_0 = \frac{1}{2}$ e $\alpha = 0$ recuperamos o limite da Eq. (36) do universo de Einstein-de Sitter. Com um valor $q_0 < 0$, ou seja para um universo em expansão acelerada, o comportamento $\delta_{(m)}(a)$ é de novo bem diferente do modelo de Einstein-de Sitter. Um comportamento mais próximo ao caso Λ CDM é obtido por $\alpha = 1$. Como no fundo a densidade $\rho_{(v)0}$ domina a dinâmica total, isso é um resultado não inesperado. A dependência do crescimento de q_0 é visualizada na Fig. 2 para $\alpha = 1$ e $\Omega_{(m)0} = 0,046$.

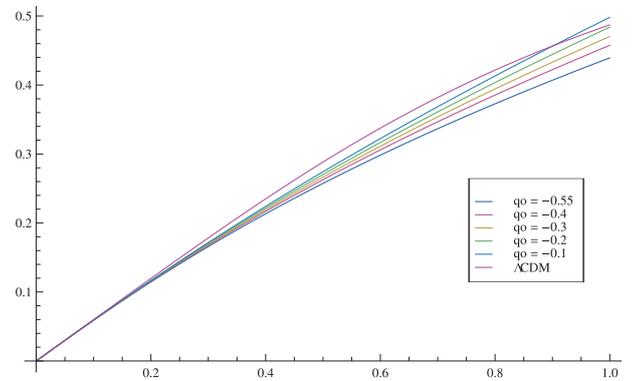


Figura 2 - Dependência do parâmetro atual de desaceleração q_0 no crescimento de contraste de densidade da matéria bariônica para o modelo do fluido viscoso.

A Fig. 3 mostra a influência do parâmetro do acoplamento α no crescimento das perturbações para $q_0 = -0,55$ e $\Omega_{(m)0} = 0,046$. Observa-se neste gráfico que valores de $\alpha \neq 1$ não reproduzem o comportamento observado para a taxa de crescimento da matéria.

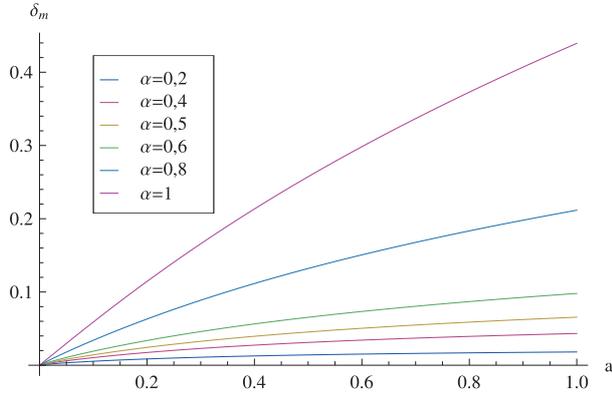


Figura 3 - Dependência do parâmetro α de acoplamento no crescimento de contraste de densidade da matéria bariônica para o modelo do fluido viscoso.

Na Fig. 2 vemos ainda que para $\alpha = 1$ e $\Omega_{(m)0} = 0,046$ o comportamento de $\delta_{(m)}$ da matéria bariônica é similar ao $\delta_{(m)}$ da matéria escura do modelo Λ CDM numa faixa entre $q_0 = -0.1$ e $q_0 = -0.2$. Também está indicado no gráfico o comportamento para $q_0 = -0.55$, o valor preferido no modelo Λ CDM.

Enfatizamos que o modelo viscoso é o único dos modelos discutidos aqui no qual $\delta_{(m)}$ é identificado com as perturbações da matéria bariônica. Nos outros modelos $\delta_{(m)}$ descreve as perturbações da matéria escura.

4.4. Modelo com termo cosmológico decaindo

Frequentemente, o termo cosmológico é relacionado à energia quântica do vácuo. Mas não existe uma teoria satisfatória que poderia descrever esta relação. Isso faz parte do famoso problema da constante cosmológica. Aqui vamos seguir um caminho fenomenológico, assumindo que o termo cosmológico decai linearmente com a taxa de Hubble [27–29]. O tempo de Hubble é a única escala temporal num universo espacialmente plano, homogêneo e isotrópico. Também existem argumentos na base de cromodinâmica quântica que favorecem esta dependência. Además, supomos uma equação do estado $p_{(x)} = -\rho_{(x)}$ para a component x do vácuo. Diferentemente dos modelos anteriores, o modelo com um termo cosmológico decaindo deste tipo implica uma interação entre matéria escura e energia escura.

4.4.1. Fundo homogêneo e isotrópico

Assumimos que o universo está formado por matéria escura ($p_{(m)} = 0$) e por um termo cosmológico decaindo, modelado através de um fluido com

$$\rho_{(x)} = \sigma H, \quad p_{(x)} = -\rho_{(x)} = -\sigma H, \quad (51)$$

onde σ é uma constante. A equação para \dot{H} neste caso é

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) = -4\pi G\rho_{(m)}. \quad (52)$$

Para a função de Hubble achamos

$$H = H_0 \left[1 - \Omega_{(m)0} + \Omega_{(m)0} a^{-3/2} \right]. \quad (53)$$

Diferentemente dos casos anteriores, aqui temos um sistema com duas componentes acopladas segundo

$$\dot{\rho}_{(m)} + 3H\rho_{(m)} = Q \equiv 4\pi G\sigma\rho_{(m)}, \quad (54)$$

e

$$\dot{\rho}_{(x)} = -Q \equiv -4\pi G\sigma\rho_{(m)} \quad (55)$$

com soluções

$$\rho_{(m)} = \rho_0 \Omega_{(m)0} a^{-3/2} \left[1 - \Omega_{(m)0} + \Omega_{(m)0} a^{-3/2} \right] \quad (56)$$

e

$$\rho_{(x)} = \rho_0 (1 - \Omega_{(m)0}) \left[1 - \Omega_{(m)0} + \Omega_{(m)0} a^{-3/2} \right]. \quad (57)$$

Obviamente, a razão $\frac{\rho_{(m)}}{\rho_{(x)}}$ decai como $a^{-3/2}$ que é menos do que o decaimento no modelo Λ CDM com $\frac{\rho_{(m)}}{\rho_{(x)}} \propto a^{-3}$.

4.4.2. Dinâmica perturbativa

A análise perturbativa deverá ser discutida novamente, pois o estudo anterior não levou em conta nenhuma interação não gravitacional entre os dois fluidos que compõem o Universo. A equação de balanço da matéria perturbada é modificada segundo

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{(m)} + 3\frac{\dot{a}}{a}\hat{\rho}_{(m)} + \rho_{(m)}\hat{v}_{(m),\alpha}^\alpha &= \hat{Q} \Rightarrow \\ \dot{\delta}_{(m)} + \hat{v}_{(m),\alpha}^\alpha &= \frac{1}{\rho_{(m)}} \left(\hat{Q} - Q\delta_{(m)} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Para simplificar nosso estudo assumimos para a perturbação do termo de interação que $\hat{Q} = \beta Q\delta_{(m)}$, onde β é uma constante que quantifica a relevância deste termo. Então, a equação para $\delta_{(m)}$ vira

$$\dot{\delta}_{(m)} + \hat{v}_{(m),\alpha}^\alpha = -(1 - \beta) \frac{Q}{\rho_{(m)}} \delta_{(m)}. \quad (59)$$

Para um acoplamento só no fundo temos $\beta = 0$. A estrutura das Eqs. (54) e (55) aparentemente implica $\beta = 1$. Mas estas equações são relações do fundo homogêneo e isotrópico. Uma análise mais detalhada no contexto de relatividade geral mostra que $\hat{Q} - Q\delta_m \neq 0$ em geral [29]. Utilizando a equação de Euler diferenciada como no caso anterior, nos fornece a equação para o contraste de densidade,

$$\begin{aligned} \delta_{(m)}'' + \frac{3}{2a} \left[1 + 2 \frac{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right) (1 - \Omega_{(m)0})}{1 - \Omega_{(m)0} + \Omega_{(m)0} a^{-3/2}} \right] \delta_{(m)}' \\ - \frac{3}{2a^2} \left[1 - \frac{[(1 - \alpha) + 2(1 - \beta)](1 - \Omega_{(m)0})}{1 - \Omega_{(m)0} + \Omega_{(m)0} a^{-3/2}} \right] \delta_{(m)} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

O limite $\Omega_{(m)0} = 1$ corresponde ao modelo de Einstein-de Sitter. O parâmetro α descreve a influência das perturbações da energia escura. Formalmente, α é introduzido como descrito entre as Eqs. (47) e (48). Mas a situação aqui é diferente da situação do capítulo anterior. Aqui as componentes são matéria escura e energia escura. Calculamos as perturbações da matéria escura que, pelo parâmetro α são acoplados às flutuações da energia escura. No caso do fluido viscoso, no entanto, as componentes são matéria bariônica e o fluido escuro. Naquele caso, o parâmetro α descreve a influência das flutuações do setor escuro total sobre as flutuações da matéria bariônica. Comparando os resultados para o crescimento das flutuações nos dois modelos implica a suposição que o comportamento perturbativo dos bárions é aproximadamente o mesmo comportamento perturbativo da matéria escura. Lembramos que também no modelo Λ CDM calculamos as perturbações da matéria escura. A Fig. 4 mostra a dependência do crescimento de $\delta_{(m)}$ de $\Omega_{(m)0}$ para $\beta = 0$ e $\alpha = 1$. A mesma dependência é mostrado na Fig. 5 para $\beta = 1$ e $\alpha = 1$. As curvas para o modelo Λ CDM foram obtidas com $\Omega_{(m)0} = 0.3$. Um crescimento das perturbações para $\beta = 0$ comparável com o crescimento no modelo Λ CDM exige valores de $\Omega_{(m)0}$ mais alto que compatível com a expansão acelerada. Os casos com $\beta = 1$ exigem valores menores de $\Omega_{(m)0}$, mas ainda maiores que o valor do modelo padrão. Frizamos que este resultado coincide com a análise mais detalhada nas Refs. [28, 29], onde foi encontrado um valor de melhor ajuste $\Omega_{(m)0} \approx 0.48$.

A variação com β se vê na Fig. 6 para $\alpha = 1$ e $\Omega_{(m)0} = 0.48$.

Finalmente, na Fig. 7 conferimos curvas de todos os modelos estudados neste artigo. Para obter comportamentos similares do contraste da densidade, escolhas diferentes de parâmetros em cada um dos modelos são necessárias. Para o modelo Λ CDM utilizamos $\Omega_{\Lambda} = 0.7$ (Lembramos que $\Omega_{(m)0} = 1 - \Omega_{\Lambda}$). Para o modelo viscoso aplicamos $\Omega_{(m)0} = 0.046$ e $q_0 = -0.55$. O modelo de termo cosmológico decaindo é caracterizado por $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\Omega_{(m)0} = 0.48$. Mencionamos também que para $q_0 = -0.55$, $\Omega_{(m)0} = 0.3$, $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ as curvas do modelo viscoso e do modelo de termo cosmológico decaindo se superpõem.

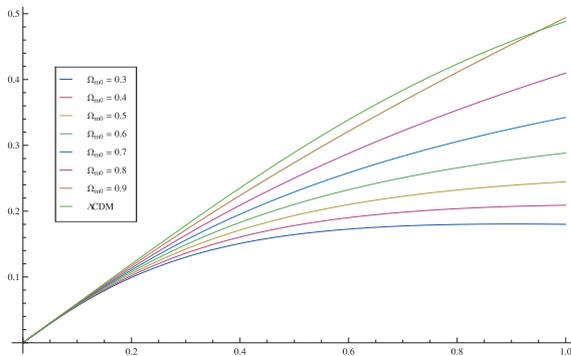


Figura 4 - Dependência de $\Omega_{(m)0}$ na taxa de crescimento das flutuações da matéria para o modelo com um termo cosmológico decaindo com $\beta = 0$.

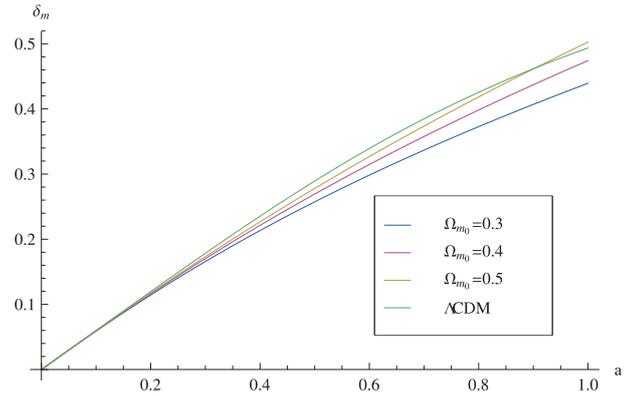


Figura 5 - Dependência de $\Omega_{(m)0}$ na taxa de crescimento das flutuações da matéria para o modelo com um termo cosmológico decaindo com $\beta = 1$.

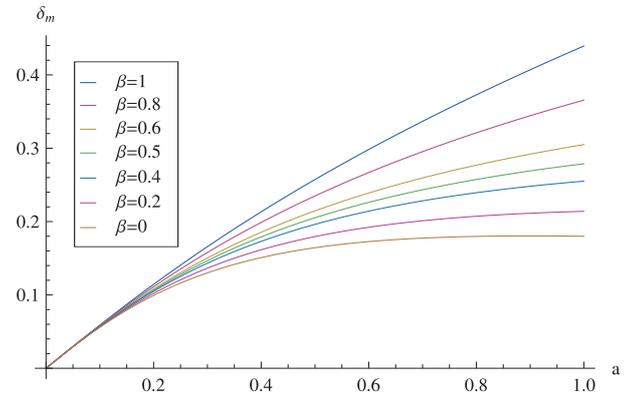


Figura 6 - Dependência de β no crescimento das flutuações da matéria para o modelo com um termo cosmológico decaindo com $\Omega_{(m)0} = 0.48$.

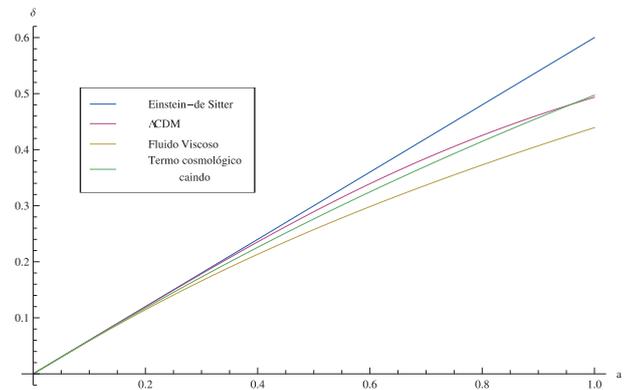


Figura 7 - Comparação entre as taxas de crescimento de perturbações da matéria para todos os modelos estudados.

5. Discussão

Quantificar o crescimento das perturbações da matéria é crucial para entender a formação das estruturas no universo expandindo. Neste trabalho conferimos 4 modelos cosmológicos com respeito à dinâmica de tais perturbações. No modelo de Einstein-de Sitter, um uni-

verso de matéria sem pressão, as perturbações crescem linearmente com o fator de escala. No modelo padrão atual, o modelo Λ CDM, a presença da constante cosmológica enfraquece o crescimento em relação ao modelo de Einstein-de Sitter. Por causa dos problemas conhecidos da constante cosmológica, modelos alternativos foram construídos nos quais a constante cosmológica é substituída por um substrato dinâmico. Modelos alternativos do meio cósmico predizem taxas diferentes deste crescimento. Como o modelo padrão descreve, a *grosso modo*, bem as observações, se espera que os resultados de modelos diferentes competitivos não desviem drasticamente dos resultados do modelo Λ CDM. Neste trabalho estudamos dois tais modelos alternativos de duas componentes. O primeiro, o modelo viscoso, fornece uma descrição unificada do setor escuro. Calculamos a taxa de crescimento da matéria bariônica e esclarecemos as condições sob quais esta taxa é qualitativamente similar à taxa do modelo Λ CDM. Encontramos que com o valor padrão do parâmetro atual de desaceleração, $q_0 = -0.55$, esta taxa é menor do que no modelo padrão. Taxas similares resultam para $q_0 \approx -0.2$. No segundo modelo alternativo determinamos as flutuações da matéria escura que é acoplada a um termo cosmológico que decai linearmente com a função de Hubble. A diferença principal em comparação ao modelo Λ CDM é um valor mais alto do parâmetro atual $\Omega_{(m)0}$ da densidade de matéria. A mesma taxa de crescimento como no modelo padrão com $\Omega_{(m)0} \approx 0.3$ exige um valor $\Omega_{(m)0} \approx 0.48$ neste modelo alternativo. A tarefa que fica é confrontar as taxas de modelos diferentes encontradas aqui com dados observacionais. Isso será um objetivo para investigações futuras.

Agradecimentos

Agradecemos à UFES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] A.G. Riess, A.V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P.M. Garnavich, R.L. Gilliland, C.J. Hogan, S. Jha, R.P. Kirshner, *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998); S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R.A. Knop, P. Nugent, P.G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D.E. Groom, *et al.* *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999); N.A. Bahcall, J.P. Ostriker, S. Perlmutter and P.J. Steinhardt, *Science* **284**, 1481 (1999).
- [2] N. Straumann, *astro-ph/0203330*.
- [3] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* **380**, 235 (2003); *hep-th/0212290*.
- [4] E.J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006); *arXiv:hep-th/0603057*.
- [5] T. Padmanabhan, *Gen. Relativ. Gravit.* **40**, 529 (2008).
- [6] R. Durrer e R. Maartens, *Gen. Relativ. Gravit.* **40**, 301 (2008).
- [7] J. Dosset, M. Ishak, J. Moldenhauer, Y. Gong e A. Wang, *arXiv:1004.3086* (2010)
- [8] Y. Gong, *Phys. Rev. D* **78**, 123010 (2008).
- [9] G. Caldera-Cabral, R. Maartens and B.M. Schaefer, *JCAP* **0907**, 027 (2009); *arXiv:0905.0492*, (2009).
- [10] I. Durán, D. Pavón and W. Zimdahl, *JCAP* **1007**, 018 (2010).
- [11] W.H. McCrea and E.A. Milne, *Quart. J. Math.* **5**, 73 (1934).
- [12] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).
- [13] W.H. McCrea, *Proc. R. Soc. London* **206**, 562 (1951).
- [14] E.R. Harrison, *Ann. Phys. (N.Y.)* **35**, 437 (1965).
- [15] J.A.S. Lima, V. Zanchin and R. Brandenberger, *Month. Not. R. Astron. Soc.* **291**, L1 (1997).
- [16] R.R.R. Reis, *Phys. Rev.* **D67**, 087301 (2003); *erratum-ibid* **D68**, 089901 (2003).
- [17] J.F. Jesus, F.A. Oliveira, S. Basilakos e J.A.S. Lima, *arXiv:1105.1027*.
- [18] C.-G. Park, J. Hwang, J. Lee and H. Noh, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 151303 (2009).
- [19] J.C. Fabris, S.V.B. Gonçalves and R. de Sá Ribeiro, *Gen. Rel. Grav.* **38**, 495 (2006).
- [20] M. Szydlowski and O. Hrycyna, *Ann. Phys.* **322**, 2745 (2007).
- [21] R. Colistete Jr., J.C. Fabris, J. Tossa and W. Zimdahl, *Phys. Rev.* **D76**, 103516 (2007).
- [22] A. Avelino e U. Nucamendi, *JCAP* **0904**, 006 (2009).
- [23] B. Li e J.D. Barrow, *Phys. Rev.* **D79**, 103521 (2009).
- [24] A. Avelino e U. Nucamendi, *JCAP* **1008**, 006 (2010).
- [25] W.S. Hipólito-Ricaldi, H.E.S. Velten e W. Zimdahl, *JCAP* **06**, 016 (2009).
- [26] W. S. Hipólito-Ricaldi, H. E. S. Velten e W. Zimdahl, *Phys. Rev. D* **82**, 063507 (2010).
- [27] H.A. Borges and S. Carneiro, *Gen. Rel. Grav.* **37**, 1385 (2005).
- [28] H.A. Borges, S. Carneiro, J.C. Fabris and C. Pigozzo, *Phys. Rev.* **D77**, 043513 (2008).
- [29] W. Zimdahl, H.A. Borges, S. Carneiro, J.C. Fabris and W.S. Hipólito-Ricaldi, *JCAP* **1104**, 028 (2011).